PROBABILITA'
Prima prova di Esonero del 10/11/2017
Corso di laurea in SG e SES

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	=

E1) Un campione casuale di 10 studenti, che non contiene ripetizioni, è ottenuto da una popolazione di quattro classi formate da 25 studenti ciascuna.

a) Calcolare la probabilità che nel campione ci siano 4 studenti provenienti da una classe fissata (evento A).

b) Calcolare la probabilità che tutti gli studenti provengano dalla stessa classe (evento B).

c) Qual è la probabilità che 6 studenti del campione provengano dalla stessa classe (evento C)?

d) Qual è la probabilità che 4 studenti siano stati scelti da una classe ed altri 4 da un'altra classe (evento D)?

[Facoltativo] Scegliamo a caso, senza ripetizioni, due studenti da una classe di cui non conosciamo la numerosità n. Ripetiamo questa prova due volte; sapendo che la probabilità di ottenere la seconda volta lo stesso campione della prima prova è pari a 1/15, qual è il valore di n?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Usiamo la probabilità uniforme dove facendo riferimento ad estrazioni in blocco abbiamo che $|\Omega| = \binom{100}{10}$.

a) Si ha

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{25}{4}\binom{75}{6}}{\binom{100}{10}}$$

b) In questo caso

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{4\binom{25}{10}}{\binom{100}{10}}$$

dove 4 indica tutti i modi possibili di scegliere la classe di provenienza.

c) La probabilità cercata diventa

$$P(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{4\binom{25}{6}\binom{75}{4}}{\binom{100}{10}}$$

d) Abbiamo che

$$P(D) = \frac{|D|}{|\Omega|} = \frac{\binom{4}{2}\binom{25}{4}\binom{25}{4}\binom{50}{2}}{\binom{100}{10}}$$

dove $\binom{4}{2}$ indica tutti i modi possibili di scegliere le due classi e $\binom{50}{2}$ sono le possibili scelte dei rimanenti due studenti.

[Facoltativo] Osserviamo che

$$\frac{1}{\binom{n}{2}} = \frac{1}{15}.$$

Dunque $\binom{n}{2} = 15$ se e solo se $n(n-1)/2 = 15$. Dunque per ottenere il valore di n dobbiamo risolvere l'equazione di secondo grado $n^2 - n - 30 = 0$ che ammette due radici reali: $n = -5$, che è da scartare, e

$$n = 6$$

che rappresenta la soluzione del problema.

E2) Da un sacchetto contenente m gettoni, numerati da 1 a m, estraiamo un gettone a caso. A questo punto prendiamo n (con $n > m$) palline bianche e ne coloriamo di rosso un numero pari a quello riportato sul gettone estratto. Dopo questa operazione mettiamo le palline in un'urna e le mescoliamo.

a) Estraiamo una pallina dall'urna. Calcolare la probabilità che sia rossa (*suggerimento*: si ricordi che $\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2}$).

b) Sapendo di aver estratto pallina rossa, qual è la probabilità di averne colorate i, con $1 \leq i \leq m$?

c) Estraiamo 4 palline con ripetizione dall'urna, qual è la probabilità che 2 siano rosse?

d) Calcolare la probabilità al punto a) supponendo $m \geq n$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Sia A_i =(estratto il numero i), $i = 1, 2, ..., m$.

a) Poniamo $\Omega = \cup_{i=1}^{m} A_i$. La probabilità diventa

$$\begin{aligned}
P(\text{rossa}) &= P(\text{rossa} \cap \Omega) \\
&= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) P(\text{rossa}|A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{m} \cdot \frac{i}{n} = \frac{1}{mn} \sum_{i=1}^{m} i \\
&= \left(\sum_{i=1}^{m} i = \frac{m(m+1)}{2} \right) \\
&= \frac{m+1}{2n}
\end{aligned}$$

b) Utilizziamo il Teorema di Bayes

$$\begin{aligned}
P(A_i|\text{rossa}) &= \frac{P(\text{rossa}|A_i)P(A_i)}{P(\text{rossa})} \\
&= \frac{\frac{1}{m} \cdot \frac{i}{n}}{\frac{m+1}{2n}} = \frac{2i}{m(m+1)}
\end{aligned}$$

c) Osserviamo che $P(k\,\text{rosse}|A_i)$ rappresenta una distribuzione binomiale su 4 prove indipendenti con probabilità di successo i/n. Dunque

$$\begin{aligned}
P(2 \text{ rosse}) &= \sum_{i=1}^{m} P(A_i) P(2 \text{ rosse}|A_i) \\
&= \frac{1}{m} \binom{4}{2} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{i}{n} \right)^2 \left(1 - \frac{i}{n} \right)^2
\end{aligned}$$

d) Chiaramente $P(\text{rossa}|A_i) = 1$ se $i = n, n+1, ..., m$. In questo caso abbiamo che

$$P(\text{rossa}) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i) P(\text{rossa}|A_i)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n-1} P(\text{rossa}|A_i) + \sum_{i=n}^{m} P(\text{rossa}|A_i)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} + \sum_{i=n}^{m} P(\text{rossa}|A_i)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} + (m-n+1)\right] \\
&= \frac{1}{m}\left[\frac{(n-1)}{2} + (m-n+1)\right] \\
&= \frac{2m-n+1}{2m}
\end{aligned}
$$