PROBABILITA'
Esame del 09/06/2017
Corso di laurea in SG e SES

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	+E3 :	=

E1) Vengono distribuite casualmente 10 figurine diverse in tre bustine. Calcolare la probabilità:

a) che ci siano 3 figurine nella prima bustina, 3 figurine nella seconda bustina e 4 figurine nella terza bustina;

b) che nella terza bustina ci siano 2 figurine;

c) che due bustine siano vuote;

d) che nella seconda bustina ci sia un numero maggiore di figurine rispetto a quelle contenute nella terza, sapendo che nella prima bustina c'è solo una figurina.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Si sfrutta lo schema della suddivisione di 10 oggetti in tre gruppi distinti. La probabilità cercata è pari a

$$\frac{\binom{10}{3}\binom{7}{3}\binom{4}{4}}{3^{10}} = \frac{\frac{10!}{3!3!4!}}{3^{10}}.$$

b) In questo caso abbiamo che ad esempio fissato $k = 0, 1, 2, ..., 8$ una possibile distribuzione delle figurine potrebbe essere quella in cui ci sono k figurine nell prima bustina, $8 - k$ nella seconda e 2 nella terza bustina con probabilità

$$\frac{\binom{10}{k}\binom{10-k}{8-k}\binom{2}{2}}{3^{10}}.$$

Pertanto la probabilità dell'evento al punto b) diventa

$$\sum_{k=0}^{8} \frac{\binom{10}{k}\binom{10-k}{8-k}}{3^{10}}.$$

c) Fissate le due bustine vuote, abbiamo solo un modo di distribuire le 10 figurine nella bustina rimasta. Essendo $\binom{3}{2} = 3$ i modi possibili di scegliere le due bustine vuote, si ha che la probabilità dell'evento diventa

$$\frac{3}{3^{10}} = \frac{1}{3^9}.$$

d) Condizionatamente all'evento che nella prima bustina è presente una figurina, possiamo considerare la distribuzione casuale delle restanti 9 figurine nelle due bustine in maniera tale che l'evento sia verificato. Quindi abbiamo che la probabilità è data da

$$\sum_{k=5}^{9} \frac{\binom{9}{k}}{2^9}.$$

E2) Siano $X \sim \text{Un}\{0,1\}$ e $Y \sim \text{Un}(1,2)$ due v.a. indipendenti.

a) Calcolare la funzione di ripartizione di $Z = \frac{X}{X+Y}$. Z è una v.a. assolutamente continua? Perché?

b) Calcolare $P(Z > \frac{1}{6})$ e $P(Z \in A)$ con $A = \cap_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2})$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) $Z \in \{0\} \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ q.c. Pertanto per $z \in [0, \frac{1}{3})$ abbiamo che

$$P(Z \leq z) = P(X = 0) = \frac{1}{2}.$$

Se $z \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ abbiamo che

$$\begin{aligned}
P(Z \leq z) &= P(Z \leq z, X = 0) + P(Z \leq z, X = 1) \\
&= P(0 \leq z, X = 0) + P\left(\frac{1}{1+Y} \leq z, X = 1\right) \\
&= P(X = 0) + P(X = 1)P\left(Y \geq \frac{1}{z} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[2 - P\left(Y < \frac{1}{z} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[4 - \frac{1}{z}\right] = 2 - \frac{1}{2z}
\end{aligned}$$

In conclusione

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{1}{2}, & 0 \leq z < \frac{1}{3}, \\ 2 - \frac{1}{2z}, & \frac{1}{3} \leq z < \frac{1}{2}, \\ 1, & z \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

La v.a. Z non è assolutamente continua poiché la sua F_Z in 0 ha un salto. Infatti

$$P(X = 0) = F_Z(0) - F_Z(0^-) = \frac{1}{2}.$$

b) Abbiamo che

$$P\left(Z > \frac{1}{6}\right) = 1 - F_Z\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Osserviamo che

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right) = \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Quindi

$$P(Z \in A) = P\left(\frac{1}{3} \leq Z < \frac{1}{2}\right) = F_Z\left(\frac{1}{2}\right) - F_Z\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

E3) Sia $(X_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti con $X_n \sim \text{Esp}(\lambda)$. Inoltre consideriamo un'altra v.a. $Y \sim \text{Esp}(\mu)$ indipendente da X_n.

a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione $(Z_n)_{n\geq 1}$ dove

$$Z_n = \frac{\min(X_1, ..., X_n)}{Y}.$$

b) Dal risultato ottenuto al punto *a*) cosa possiamo concludere sulla convergenza q.c. di Z_n?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $Z_n > 0$ q.c. Inoltre dalla teoria (oppure mediante un calcolo diretto) segue che $V_n = \min(X_1, ..., X_n)$ ammette densità

$$f_{V_n}(v) = n\lambda e^{-n\lambda v}, \quad v > 0.$$

Pertanto fissato $z > 0$

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq z) &= P\left(Y \geq \frac{V_n}{z}\right) \\ &= \int_0^\infty n\lambda e^{-n\lambda v} \left(\int_{v/z}^\infty \mu e^{-\mu y} dy\right) dv \\ &= n\lambda \int_0^\infty e^{-\left(n\lambda + \frac{\mu}{z}\right)v} dv \\ &= \frac{n\lambda}{n\lambda + \frac{\mu}{z}}. \end{aligned}$$

In conclusione

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{n\lambda}{n\lambda + \frac{\mu}{z}}, & z \geq 0, \end{cases} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0, \end{cases}$$

per $z \neq 0$, da cui segue che

$$Z_n \xrightarrow{d} 0.$$

b) Nulla. Infatti $Z_n \xrightarrow{d} 0$ implica $Z_n \xrightarrow{p} 0$ ma non $Z_n \xrightarrow{q.c.} 0$.