PROBABILITA'
Seconda prova di Esonero del 09/01/2017
Corso di laurea in SG e SES

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	=

E1) Sia X una v.a. con distribuzione uniforme nell'insieme $\{-1, 0, 1\}$ e Y un'altra v.a., indipendente da X, con funzione di densità $f_Y(y) = 3y^2 I_{(0,1)}(y)$.

a) Sia $Z = (1 - |X|)(2 + Y)$. Determinare la funzione di ripartizione di Z e rappresentarla graficamente. Stabilire se Z ammette funzione di densità, motivando la risposta, e in caso affermativo determinarla.

b) Sia $W = (1 + |X|)(2 + Y)$. Determinare la funzione di ripartizione di W e rappresentarla graficamente. Stabilire se W ammette funzione di densità, motivando la risposta, e in caso affermativo determinarla.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Dato che $(1 - |X|) \in \{0, 1\}$ q.c. e $(2 + Y) \in (2, 3)$ q.c. segue che $Z \in \{0\} \cup (2, 3)$ q.c. Pertanto possiamo affermare che $F_Z(z) = 0$ per $z < 0$ e $F_Z(z) = 1$ per $z \geq 3$. Fissato $z \in [0, 3)$ abbiamo che

$$\begin{aligned} F_Z(z) = P(Z \leq z) &= P((1 - |X|)(2 + Y) \leq z, X \in \{-1, 1\}) + P((1 - |X|)(2 + Y) \leq z, X = 0) \\ &= P(0 \leq z, X \in \{-1, 1\}) + P(2 + Y \leq z, X = 0) \\ &= P(X \in \{-1, 1\}) + P(Y \leq z - 2)P(X = 0) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}P(Y \leq z - 2) \end{aligned}$$

E' necessario distinguere due casi. Per $z \in [0, 2)$ abbiamo che $P(Y \leq z - 2) = 0$, mentre per $z \in [2, 3)$ si ha

$$P(Y \leq z - 2) = \int_0^{z-2} 3y^2 dy = (z - 2)^3$$

In conclusione

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \frac{2}{3}, & 0 \leq z < 2, \\ \frac{2}{3} + \frac{(z-2)^3}{3}, & 2 \leq z < 3, \\ 1, & z \geq 3. \end{cases}$$

La v.a. Z è una mistura di v.a. Infatti in 0 la funzione di ripartizione ha un un salto e $P(Z = 0) = F_Z(0) - F_Z(0^-) = P(X \in \{-1, 1\}) = \frac{2}{3}$. Pertanto Z non ammette funzione di densità.

b) Dato che $(1 + |X|) \in \{1, 2\}$ q.c. e $(2 + Y) \in (2, 3)$ q.c. segue che $W \in (2, 3) \cup (4, 6)$ q.c. Pertanto possiamo affermare che $F_W(w) = 0$ per $w < 2$ e $F_W(w) = 1$ per $w \geq 6$. Fissato $w \in [2, 6)$ abbiamo che

$$F_W(w) = P(W \leq w) = P((1 + |X|)(2 + Y) \leq w, X \in \{-1, 1\}) + P((1 + |X|)(2 + Y) \leq w, X = 0)$$

$$= P\left(Y \leq \frac{w-4}{2}, X \in \{-1,1\}\right) + P(Y \leq w-2, X=0)$$
$$= P(X \in \{-1,1\})P\left(Y \leq \frac{w-4}{2}\right) + P(Y \leq w-2)P(X=0)$$
$$= \frac{2}{3}P\left(Y \leq \frac{w-4}{2}\right) + \frac{1}{3}P(Y \leq w-2)$$

Per $w \in [2,3)$ si ha $P\left(Y \leq \frac{w-4}{2}\right) = 0$ e quindi

$$F_W(w) = \frac{1}{3}(w-2)^3$$

Per $w \in [3,4)$ si ha $P\left(Y \leq \frac{w-4}{2}\right) = 0$ e $P(Y \leq w-2) = 1$ da cui

$$F_W(w) = \frac{1}{3}$$

Per $w \in [4,6)$ si ha $P(Y \leq w-2) = 1$ e quindi

$$F_W(w) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{w-4}{2}\right)^3$$

Ricapitolando

$$F_W(w) = \begin{cases} 0, & w < 2, \\ \frac{1}{3}(w-2)^3, & 2 \leq w < 3, \\ \frac{1}{3}, & 3 \leq w < 4, \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{w-4}{2}\right)^3, & 4 \leq w < 6 \\ 1, & w \geq 6. \end{cases}$$

La funzione di ripartizione F_W soddisfa le condizioni del teorema fondamentale del calcolo integrale (cioè F_W è continua su $\mathbb{R}$ ed ammette derivata continua q.o.) e quindi W è assolutamente continua ed ammette densità data da

$$f_W(w) = F'_W(w) = \begin{cases} (w-2)^2, & 2 < w < 3, \\ \left(\frac{w-4}{2}\right)^2, & 4 < w < 6, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

E2) Consideriamo $X \sim \text{Un}(0,2)$ e una successione di v.a. indipendenti $(Y_n)_{n\geq 1}$, le quali sono anche indipendenti rispetto ad X, dove $Y_n \sim \text{Esp}(\lambda_n)$.

a) Studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. $(Z_n)_{n\geq 1}$ con $Z_n = X/Y_n$, supponendo che per $n \to \infty$: 1) $\lambda_n \to \frac{1}{2}$; 2) $\lambda_n \to \infty$.

b) Studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. $(V_n)_{n\geq 1}$ dove

$$V_n = e^{\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - EY_k)}{n}},$$

supponendo $\lambda_n = n$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Notiamo che $Z_n \in (0, \infty)$ q.c. e che la densità congiunta di X e Y_n è data da

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\lambda_n e^{-\lambda_n y} I_{(0,2)\times(0,\infty)}(x,y)$$

Pertanto per $z > 0$

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) = P\left(\frac{X}{Y_n} \leq z\right) &= \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<2, y>0, x/y\leq z\}} f(x,y)dxdy \\ &= \int_0^2 \left(\int_{x/z}^{\infty} \lambda_n e^{-\lambda_n y} dy\right) \frac{1}{2} dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{-\lambda_n \frac{x}{z}} dx \\ &= \frac{z}{2\lambda_n}\left(1 - e^{-\lambda_n \frac{2}{z}}\right) \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} F(z) = z\left(1 - e^{-\frac{1}{z}}\right) I_{[0,\infty)}(z), & \text{se } \lambda_n \to \frac{1}{2} \\ 0, & \text{se } \lambda_n \to \infty \end{cases}$$

da cui possiamo concludere che $Z_n \xrightarrow{d} Z$ dove Z è una v.a. con f.r. data da F se $\lambda_n \to \frac{1}{2}$, mentre non converge in distribuzione se $\lambda_n \to \infty$.

b) Osserviamo che

$$\frac{\sum_{k=1}^n (Y_k - EY_k)}{n} = \frac{Y_1 + ... + Y_n - (EY_1 + ... + EY_n)}{n}$$

la cui convergenza in probabilità può essere studiate, qualora tutte le condizioni siano verificate, mediante la legge dei grandi numeri. La successione $(Y_n)_{n\geq 1}$ è costituita da v.a. indipendenti ma non identicamente distribuite; pertanto dobbiamo verificare che le ipotesi del Teorema di Cebicev siano valide nel nostro caso. Abbiamo che $E(Y_n) = 1/\lambda_n = 1/n$ e $Var(Y_n) = 1/\lambda_n^2 = 1/n^2$. Inoltre

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n Var(Y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty,$$

essendo quest'ultima una serie armonica convergente; pertanto

$$\frac{\sum_{k=1}^n Var(Y_k)}{n^2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Si ha in definitiva

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}(Y_k - EY_k)}{n} \xrightarrow{p} 0$$

da cui segue, dalla proprietà della convergenza in probabilità per funzione continue, che

$$V_n \xrightarrow{p} 1$$

che implica

$$V_n \xrightarrow{d} 1.$$