PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 26/10/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

E1 :	+E2 :	+E3 :	=

E1) Un dado non truccato è lanciato un numero aleaotorio N di volte. Assumiamo che $P(N = i) = 2^{-i}, i \geq 1$. Indicando con S la somma dei punteggi ottenuti, calcolare la probabilità che:

a) $N = 2$ dato che $S = 4$;
b) $S = 4$ dato che N è pari;
c) $N = 2$ sapendo che $S = 4$ e il primo lancio dà 1.
N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione
a)

$$\begin{aligned} P(N = 2|S = 4) &= \frac{P(S = 4|N = 2)P(N = 2)}{P(S = 4)} \\ &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\sum_{i=1}^{\infty} P(S = 4|N = i)P(N = i)} \\ &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\sum_{i=1}^{4} P(S = 4|N = i)P(N = i)} \\ &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{6^3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6^4} \cdot \frac{1}{16}} \end{aligned}$$

b) Dato che $\{N \text{ è pari}\} = \cup_{i=1}^{\infty}\{N = 2i\}$ si ha

$$\begin{aligned} P(S = 4|N \text{ è pari}) &= \frac{P(\{S = 4\} \cap \{N \text{ è pari}\})}{P(N \text{ è pari})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(\{S = 4\} \cap \{N = 2i\})}{\sum_{i=1}^{\infty} P(N = 2i)} \\ &= \frac{P(S = 4|N = 2)P(N = 2) + P(S = 4|N = 4)P(N = 4)}{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i} \\ &= \frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{6^4} \cdot \frac{1}{16}}{\frac{1}{3}} = \frac{4^2 \cdot 3^3 + 1}{4^4 \cdot 3^3} \end{aligned}$$

c) Indicando con $D = 1$ l'evento esce 1 al primo lancio, abbiamo che

$$\begin{aligned} P(N = 2|S = 4, D = 1) &= \frac{P(N = 2, S = 4, D = 1}{P(S = 4, D = 1)} \\ &= \frac{P(S = 4, D = 1|N = 2)P(N = 2)}{\sum_{i=1}^{\infty} P(S = 4, D = 1, N = i)} \\ &= \frac{\frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{4}}{\sum_{i=2}^{4} P(S = 4, D = 1, N = i)} = \frac{\frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{6^3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{6^4} \cdot \frac{1}{16}} \end{aligned}$$

E2) Siano X ed Y due v.a. indipendenti distribuite secondo una legge di probabilità uniforme nell'insieme $\{1, 2, 3\}$. Determinare:

a) la densità discreta di $Z = XY$;

b) la funzione di ripartizione di Z;

c) la varianza di Z.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Lo spettro di Z è dato da $S_Z = \{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$. Pertanto essendo

$$p_X(x) = p_Y(x) = P(X = x) = P(Y = x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & x = 1, 2, 3, \\ 0, & x \neq 1, 2, 3, \end{cases}$$

abbiamo che

$$\begin{aligned} p_Z(z) &= P(Z = z) = P(XY = z) \\ &= P(XY = z, \cup_{x=1}^{3} \{X = x\}) \\ &= \sum_{x=1}^{3} P\left(Y = \frac{z}{x}\right) P(X = x) \\ &= \sum_{x=1}^{3} p_Y(z/x) p_X(x) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{9}, & z = 1, 4, 9, \\ \frac{2}{9}, & z = 2, 3, 6, \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases} \end{aligned}$$

b) Abbiamo che

$$F_Z(z) = \sum_{x \leq z} p_Z(x) = \begin{cases} 0, & z < 1, \\ \frac{1}{9}, & 1 \leq z < 2, \\ \frac{1}{3}, & 2 \leq z < 3, \\ \frac{5}{9}, & 3 \leq z < 4, \\ \frac{2}{3}, & 4 \leq z < 6, \\ \frac{8}{9}, & 6 \leq z < 9, \\ 1, & z \geq 9. \end{cases}$$

c) Utilizziamo la seguente uguaglianza $Var(Z) = E(Z^2) - (EZ)^2$. Pertanto

$$E(Z) = \sum_{z \in S_Z} z p_Z(z) = 4$$

$$E(Z^2) = \sum_{z \in S_Z} z^2 p_Z(z) = \frac{196}{9}$$

$$Var(Z) = \frac{52}{9}$$

E3) a) Sia $(Y_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro $\lambda > 0$. Determinare il valori delle costanti a e b tali che la successione di v.a. definita da

$$Z_n = [\exp\{Y_1 + Y_2 + .. + Y_n - na\}]^{\frac{1}{b\sqrt{n}}},$$

converga in distribuzione.

b) Sia $(W_n)_{n\geq 1}$ una successione di v.a. indipendenti ed esponenziali di parametro $\lambda_n > 0$. Consideriamo inoltre $X \sim$ Un(0,1) indipendente da W_n. Studiare la convergenza in distribuzione della successione di v.a. $(U_n)_{n\geq 1}$ dove

$$U_n = W_n/X,$$

distinguendo due casi: 1) $\lambda_n \to \infty$, 2) $\lambda_n \to 1$ (per $n \to \infty$).

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Per il Teorema del limite centrale si avrebbe che

$$\frac{Y_1 + Y_2 + .. + Y_n - na}{b\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1)$$

per $a = E(Y_n) = 1/\lambda$ e $b = \sqrt{Var(Y_n)} = 1/\lambda$. Pertanto per la continuità della convergenza in distribuzione fissando $a = b = 1/\lambda$ si avrebbe

$$Z_n = \exp\left\{\frac{Y_1 + Y_2 + .. + Y_n - na}{b\sqrt{n}}\right\} \xrightarrow{d} Z$$

dove $Z \sim \exp\{Y\}$ rappresenta una v.a. lognormale; cioè $f_Z(z) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log z)^2}{2}}, z > 0$.

b) $U_n > 0$ q.c. Pertanto per $u \geq 0$

$$\begin{aligned} F_{U_n}(u) &= P(W_n \leq uX) \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{ux} \lambda_n e^{-\lambda_n w} dw \\ &= \int_0^1 (1 - e^{-\lambda_n ux}) dx \\ &= 1 - \frac{1}{\lambda_n u}(1 - e^{-\lambda_n u}) \end{aligned}$$

Pertanto sotto la condizione 1), $U_n \xrightarrow{d} U \sim$ Deg(0) essendo $F_{U_n}(u) \to F_U(u) = 1, u \geq 0$. Considerando l'ipotesi 2), $U_n \xrightarrow{d} U$ dove U è una v.a. con funzione di ripartizione $F_U(u) = 1 - \frac{1}{u}(1 - e^{-u}), u \geq 0$.