

PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 07/09/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	Nome :	Matricola :
------------------	---------------	--------------------

E1 :	+E2 :	+E3 :	=
------	-------	-------	---

E1) Un mazzo di n carte, numerate da 1 ad n , viene mescolato.

1) Fissiamo un numero $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Considerando i due sottomazzi formati dalle prime m e dalle successive $n - m$ carte, qual è la probabilità che le carte del primo sottomazzo abbiano numeri minori delle carte del secondo sottomazzo? (Nei casi $m = 0$ e $m = n$ si avrà un sottomazzo vuoto e l'evento è considerato verificato)

2) Fissiamo ora una variabile aleatoria $M \sim \text{Bin}(n, \frac{1}{2})$ (indipendente dall'ordinamento delle carte del mazzo). Considerando i due sottomazzi formati dalle prime M e dalle successive $n - M$ carte, qual è la probabilità che le carte del primo sottomazzo abbiano numeri minori delle carte del secondo sottomazzo?

3) Ada divide il mazzo in due sottomazzi usando la variabile aleatoria M , come descritto nel punto 2), e comunica a Mario che le carte del primo sottomazzo hanno numeri minori delle carte del secondo sottomazzo. Sulla base di questa informazione, che cosa può dire Mario sulla distribuzione della variabile aleatoria M ?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

1) L'esperimento aleatorio determina uno spazio campionario Ω formato da tutte le $n!$ permutazioni semplici degli elementi dell'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$. Sotto l'ipotesi di probabilità uniformi per i singoli risultati della prova abbiamo che l'evento A = "le carte del primo sottomazzo hanno numeri inferiori a quelle del secondo sottomazzo" ammette probabilità

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{m!(n-m)!}{n!} = \frac{1}{\binom{n}{m}}.$$

La cardinalità dell'evento A si ottiene considerando tutti i possibili ordinamenti nei quali il primo sottomazzo, formato dalle carte $\{1, 2, \dots, m\}$, ed il secondo sottomazzo, formato dalle carte $\{m+1, m+2, \dots, n\}$, rimangono inalterati (cioè le carte appartenenti ai due gruppi non si mescolano tra di loro). Da ciò segue che $|A| = m!(n-m)!$.

2) Si vede subito, grazie al punto 1), che

$$P(A|M = m) = \frac{1}{\binom{n}{m}}.$$

Pertanto essendo $\cup_{m=0}^n \{M = m\}$ uguale all'evento certo, per il Teorema delle probabilità totali si ottiene

$$P(A) = \sum_{m=0}^n P(A|M = m)P(M = m) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n}{m} \frac{1}{2^n} = \frac{n+1}{2^n}.$$

3) Utilizzando il Teorema di Bayes

$$P(M = m|A) = \frac{P(A|M = m)P(M = m)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{n+1}{2^n}} = \frac{1}{n+1},$$

per $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dunque possiamo concludere che condizionatamente all'evento A , la v.a. M si distribuisce come una uniforme discreta nell'insieme $\{0, 1, \dots, n\}$.

E2) Siano X ed Y due v.a. indipendenti e distribuite secondo un'esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Poniamo $U = XY$ e $V = \log X$.

- 1) Determinare la densità di (U, V) .
- 2) Calcolare la funzione di ripartizione della v.a. V .
- 3) Calcolare $P(U > 1|V = v)$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

1) Osserviamo che $U = g_1(X, Y) = XY$ e $V = g_2(X, Y) = \log X$. Le funzioni $u = g_1(x, y) = xy$ e $v = g_2(x, y) = \log x$, definite su $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$, determinano una trasformazione biunivoca (quindi invertibile) (g_1, g_2) tale che

$$\begin{cases} u = g_1(x, y) = xy \\ v = g_2(x, y) = \log x \end{cases} \iff \begin{cases} x = h_1(u, v) = e^v \\ y = h_2(u, v) = ue^{-v} \end{cases}$$

Si ha inoltre che $h_1(u, v)$ e $h_2(u, v)$ sono definite su $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : e^v > 0, ue^{-v} > 0\} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v \in \mathbb{R}\}$. Inoltre il determinante Jacobiano diventa

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & e^v \\ e^{-v} & -ue^{-v} \end{vmatrix} = 1.$$

Pertanto applichiamo il Teorema dello Jacobiano ed otteniamo

$$\begin{aligned} f_{U,V}(u, v) &= \begin{cases} f_{X,Y}(e^v, ue^{-v})|J|, & e^v > 0, ue^{-v} > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} f_X(e^v)f_Y(ue^{-v}), & e^v > 0, ue^{-v} > 0 \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda e^v} e^{-\lambda ue^{-v}}, & u > 0, v \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases} \end{aligned}$$

2) Calcoliamo la densità di V . Si ottiene immediatamente, sfruttando la densità della v.a. X ed il Teorema della funzione inversa, che

$$f_V(v) = f_X(e^v)e^v = \lambda e^{-\lambda e^v} e^v, \quad v \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente potevano ottenere f_V come marginale della funzione $f_{U,V}$ ottenuta al punto 1). La funzione di ripartizione diventa

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \int_{-\infty}^v f_V(x)dx = \int_{-\infty}^v \lambda e^{-\lambda e^x} e^x dx \\ &= (\lambda e^x = y) \\ &= \int_0^{\lambda e^v} e^{-y} dy = 1 - e^{-\lambda e^v}, \quad v \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

3) Fissato $v \in \mathbb{R}$, si ha

$$P(U > 1|V = v) = \int_1^\infty f_{U|V}(u|v)du = \int_1^\infty \frac{f_{U,V}(u, v)}{f_V(v)} du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_1^\infty \lambda e^{-v} e^{-\lambda u e^{-v}} du \\
&= e^{-\lambda e^{-v}}
\end{aligned}$$

E3) Consideriamo lo spazio di probabilità $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}((0, 1))$ e $P((a, b)) = b - a$, $0 < a < b < 1$. Data la successione di v.a. $(X_n)_{n \geq 1}$ definite come

$$X_n(\omega) = \begin{cases} n^{\frac{1}{3}}, & \omega < \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ 0, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

- 1) Studiare la convergenza in distribuzione di $(X_n)_{n \geq 1}$.
- 2) Dimostrare che $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$ (suggerimento: utilizzare la definizione di convergenza puntuale per successioni).

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

- 1) X_n è una v.a. discreta che assume valori in $S = \{0, n^{\frac{1}{3}}\}$. Pertanto

$$P(X_n = n^{\frac{1}{3}}) = P\left(\omega < \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(\left(0, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

mentre $P(X_n = 0) = 1 - P(X_n = n^{\frac{1}{3}}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$. Da questo segue che

$$F_{X_n}(x) = P(X_n \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}, & 0 \leq x < n^{\frac{1}{3}}, \\ 1, & x \geq n^{\frac{1}{3}} \end{cases}$$

Otteniamo in questo modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

In conclusione $X_n \xrightarrow{d} 0$.

- 2) Fissato $\omega \in \Omega = (0, 1)$ si ha che per n sufficientemente grande $\omega \geq 1/\sqrt{n}$ e quindi $X_n(\omega) = 0$. In altre parole per ogni $n \geq n_0(\omega) = 1/\omega^2$ e per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $|X_n(\omega)| < \varepsilon$ e cioè $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0$. Da questo segue $X_n \xrightarrow{q.c.} 0$.