

PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 12/07/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	Nome :	Matricola :
------------------	---------------	--------------------

E1 :	+E2 :	+E3 :	=
------	-------	-------	---

E1) Una scatola contiene 6 palline numerate da 1 a 6. Il numero riportato su ciascuna pallina rappresenta la quantità di monete da un euro vinte in caso di estrazione. Alfa estrae una biglia dalla scatola e, dopo averne letto il numero, la reinserisce nella scatola. A questo punto Beta effettua l'estrazione di una pallina e legge il valore riportato sulla stessa.

1) Indicando con X_1 e X_2 la quantità di denaro vinto rispettivamente da Alfa e Beta, determinare la distribuzione di probabilità della quantità aleatoria Y che indica lo scarto, in valore assoluto, tra le vincite dei due giocatori.

2) Calcolare la funzione di ripartizione di Y . Calcolare, inoltre, la probabilità che Y assuma un valore al massimo pari a 2.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

1) Le due v.a. X_1 e X_2 si distribuiscono secondo una $\text{Un}(\{1,2,3,4,5,6\})$ e sono chiaramente indipendenti (da cui $(X, Y) \sim \text{Un}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2)$). Pertanto dobbiamo determinare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y = |X_2 - X_1|.$$

Lo spettro di Y è dato da $S_Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. La densità discreta si calcola come segue

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P(Y = y) = P(|X_2 - X_1| = y) \\ &= P(|X_2 - X_1| = y, X_1 = X_2) + P(|X_2 - X_1| = y, X_1 < X_2) + P(|X_2 - X_1| = y, X_1 > X_2) \end{aligned}$$

La rappresentazione grafica dello spettro e delle rette $x_2 = x_1 + y$ e $x_2 = x_1 - y$ è utile alla comprensione del testo che segue.

Notiamo che per $y = 0$ si ha

$$p_Y(0) = P(|X_2 - X_1| = 0, X_1 = X_2) = \sum_{k=1}^6 P(X_1 = k, X_2 = k) = \frac{6}{36}$$

mentre per $y = 1, 2, 3, 4, 5$ si ottiene

$$\begin{aligned} p_Y(y) &= P(|X_2 - X_1| = y, X_1 < X_2) + P(|X_2 - X_1| = y, X_1 > X_2) \\ &= P(X_2 = X_1 + y, X_1 < X_2) + P(X_2 = X_1 - y, X_1 > X_2) \\ &= 2P(X_2 = X_1 + y, X_1 < X_2) \\ &= 2 \sum_{k=1}^6 P(X_1 = k, X_2 = y + k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{6-y} P(X_1 = k, X_2 = y + k) \\ &= 2 \sum_{k=1}^{6-y} \frac{1}{36} = \frac{6-y}{18} \end{aligned}$$

In conclusione

$$p_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & y = 0, \\ \frac{6-y}{18}, & y = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

2) Abbiamo che

$$F_Y(y) = \sum_{k \leq y} p_Y(k) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ \frac{1}{6}, & 0 \leq y < 1, \\ \frac{1}{6} + \sum_{j=1}^k \frac{6-j}{18}, & k \leq y < k+1, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, \\ 1, & y \geq 5. \end{cases}$$

Bisogna calcolare

$$P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \sum_{y=0}^2 p_Y(y) = \frac{1}{6} + \frac{5}{18} + \frac{4}{18} = \frac{2}{3}$$

E2) Sia $C > 0$ e

$$f(x, y) = \begin{cases} Cy^2, & -1 < x < 1, 0 < y < 1, y > |x|, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

1) Determinare il valore di C tale che (X, Y) sia una v.a. con funzione di densità data da $f(x, y)$.

2) Calcolare le funzioni di densità marginali di X e Y e dire se le due v.a. sono indipendenti.

3) Determinare la densità di X condizionata da $Y = y$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

1) Sia

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1, 0 < y < 1, y > |x|\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, -y < x < y\}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} 1 &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy \\ &= C \iint_A y^2 dx dy \\ &= C \int_0^1 y^2 \left(\int_{-y}^y dx \right) dy \\ &= 2C \int_0^1 y^3 dy = \frac{C}{2} \end{aligned}$$

da cui segue che $C = 2$.

2) Dobbiamo determinare le densità marginali di X e Y . Cioè

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy = \begin{cases} 2 \int_{-x}^1 y^2 dy = \frac{2}{3}(1+x^3), & -1 < x < 0, \\ 2 \int_x^1 y^2 dy = \frac{2}{3}(1-x^3), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

e

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dx = \begin{cases} 2 \int_{-y}^y y^2 dx = 4y^3, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Possiamo affermare che X e Y non sono indipendenti. Infatti si ha

$$0 < f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y) = 0, \quad (x, y) \in T,$$

dove abbiamo considerato, ad esempio, tutti i punti nel triangolo $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1, y < x\}$.

3) Per $0 < y < 1$, si ha

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{1+x^3}{6y^3}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1-x^3}{6y^3}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

E3) Sia $(X_n)_{n \geq 1}$ una successione di v.a. con $X_n \sim \text{Esp}(n^\alpha)$, $\alpha > 0$. Consideriamo

$$Y_n = \log(1 + nX_n).$$

Studiare la convergenza in distribuzione di $(Y_n)_{n \geq 1}$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Notiamo che $Y_n \in (0, \infty)$ q.c. Pertanto

$$F_{Y_n}(y) = P(\log(1 + nX_n) \leq y) = P\left(X_n \leq \frac{e^y - 1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-n^{\alpha-1}(e^y - 1)}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Consideriamo tre casi:

- per $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = 0, \quad y \in \mathbb{R};$$

- per $\alpha = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-(e^y - 1)}, & y \geq 0; \end{cases}$$

- per $\alpha > 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1, & y \geq 0. \end{cases}$$

In conclusione

$$Y_n \xrightarrow{d} \begin{cases} \text{non converge}, & 0 < \alpha < 1, \\ Y, & \alpha = 1, \\ \text{Deg}(0), & \alpha > 1. \end{cases}$$