PROBABILITA' E LABORATORIO DI PROBABILITA'
Esame del 31/03/2016
Corso di laurea in Statistica Gestionale

Cognome :	Nome :	Matricola :
------------------	---------------	--------------------

E1 :	+E2 :	+E3 :	=
------	-------	-------	---

E1) Vengono disposti a caso su un ripiano di una libreria 5 tomi di matematica, 5 tomi di storia e 5 di geografia. Calcolare la probabilità:

- a) che i 5 libri di ciascuna materia siano disposti l'uno accanto all'altro;
- b) che i 5 libri di almeno due materie siano posizionati l'uno accanto all'altro;
- c) che i 5 libri di almeno una materia siano disposti l'uno accanto all'altro.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

Calcoliamo la probabilità sotto le ipotesi che ci consentono di utilizzare la regola di calcolo per gli spazi di probabilità uniformi. Introduciamo i seguenti eventi:

M = "i 5 tomi di matematica sono disposti l'uno accanto all'altro"

S = "i 5 tomi di storia sono disposti l'uno accanto all'altro"

G = "i 5 tomi di geografia sono disposti l'uno accanto all'altro"

a) Abbiamo che

$$P(M \cap S \cap G) = \frac{3!(5!)^3}{15!},$$

dove $15!$ indica tutti i modi possibili di distribuire i volumi sul ripiano, $5!$ indica tutti i modi di disporre 5 libri della stessa categoria uno vicino all'altro e $3!$ sono tutti i modi di disporre i 3 gruppi di tomi.

b) In questo caso si ha, applicando la regola di calcolo per l'unione di tre eventi qualsiasi, che la probabilità cercata diventa

$$\begin{aligned} &P((M \cap S) \cup (M \cap G) \cup (S \cap G)) \\ &= P(M \cap S) + P(M \cap G) + P(S \cap G) - 2P(M \cap S \cap G) \\ &= 3P(M \cap S) - 2P(M \cap S \cap G) \end{aligned}$$

Essendo

$$P(M \cap S) = \frac{7!(5!)^2}{15!},$$

dove $7!$ sono tutti i modi di disporre 7 gruppi (2 gruppi formati dai libri della stessa categoria più i 5 libri rimanenti) sul ripiano, si ha

$$P((M \cap S) \cup (M \cap G) \cup (S \cap G)) = 3 \frac{7!(5!)^2}{15!} - 2 \frac{3!(5!)^3}{15!}$$

c) Con ragionamenti analoghi a quelli del punto b) otteniamo

$$\begin{aligned} P(M \cup S \cup G) &= P(M) + P(S) + P(G) \\ &\quad - P(M \cap S) - P(M \cap G) - P(S \cap G) + P(M \cap S \cap G) \\ &= 3P(M) - 3P(M \cap S) + P(M \cap S \cap G) \\ &= 3 \frac{11!5!}{15!} - 3 \frac{7!(5!)^2}{15!} + \frac{3!(5!)^3}{15!} \end{aligned}$$

E2) Il numero di veicoli che transitano su un determinato tratto autostradale può essere rappresentato da una v.a. X che si distribuisce secondo una Poisson di parametro $\lambda > 0$. Ogni veicolo ha probabilità pari a p di incidente. Sia Y una v.a. che conta il numero di incidenti.

- a) Qual è la legge di probabilità della v.a. Y condizionata a $X = n, n \in \mathbb{N}_0$?
- b) Determinare la distribuzione di probabilità di Y .
- c) Siano Y e Z v.a. indipendenti con $Z \sim \text{Poi}(q)$. Determinare la legge di probabilità di $Y + Z$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Dato il numero di veicoli che transitano sull'autostrada, cioè sia $X = n, n \in \mathbb{N}_0$, il numero di incidenti Y può essere visto come una v.a. con distribuzione binomiale di parametri n e p , (è lecito ipotizzare che gli incidenti dei singoli veicoli siano indipendenti). Pertanto

$$P(Y = k | X = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

b) Y è una v.a. discreta con spettro $\mathbb{N}_0$. Si ha

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P(\{Y = k\} \cap \Omega) = P(\{Y = k\} \cap (\cup_{n=0}^{\infty} \{X = n\})) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = k, X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k, X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} P(Y = k | X = n) P(X = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} \\ &= \frac{p^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} (1-p)^{n-k} \lambda^n = (j = n - k) \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (\lambda(1-p))^j \\ &= \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda}}{k!} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k e^{-\lambda p}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

In conclusione $Y \sim \text{Poi}(\lambda p)$.

c) Dalla teoria sulla somma di v.a. segue immediatamente che $Y + Z \sim \text{Poi}(q + \lambda p)$.

E3) Consideriamo due successioni $(X_n)_{n \geq 1}$ e $(Y_n)_{n \geq 1}$ di v.a. indipendenti e distribuite, rispettivamente, come una uniforme su $(0, n)$ ed un'esponenziale di parametro n . Poniamo

$$Z_n = \frac{Y_n}{1 + X_n}.$$

- a) Studiare la convergenza in distribuzione di Z_n .
 b) Studiare la convergenza in probabilità di $\log(1 + Z_n)$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

Soluzione

a) Osserviamo che $Z_n \in (0, \infty)$ q.c. La densità congiunta di X_n e Y_n è data da

$$f_{X_n, Y_n}(x, y) = e^{-ny}, \quad 0 < x < n, y > 0.$$

Pertanto per $z \geq 0$ ricaviamo la f.r. nel modo seguente:

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= P(Y_n \leq z(1 + X_n)) \\ &= \iint_{\{(x, y): 0 < x < n, 0 < y < z(1+x)\}} f_{X_n, Y_n}(x, y) dx dy \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n dx \int_0^{z(1+x)} n e^{-ny} dy \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n (1 - e^{-nz(1+x)}) dx \\ &= \frac{1}{n} \int_0^n dx - \frac{1}{n} \int_0^n e^{-nz(1+x)} dx \\ &= 1 - \frac{1}{n^2 z} (1 - e^{-nz(1+n)}) \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1, & z \geq 0 \end{cases}$$

ovvero $Z_n \xrightarrow{d} 0$.

b) Da $Z_n \xrightarrow{d} 0$ segue $Z_n \xrightarrow{P} 0$. Per il Teorema della funzione continua possiamo concludere che

$$\log(1 + Z_n) \xrightarrow{P} 0.$$