

1) Sia

$$f(x) = x \exp\left(\frac{1}{1-|x|}\right)$$

studiare:

i) dominio e asintoti

ii) insieme di derivabilità, intervalli di monotonia, estremi relativi ed assoluti

iii) insiemi di concavità e convessità ed eventuali punti di flesso

iv) il grafico e l'immagine

v) il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = a$ al variare del numero reale

a.

2) Per ogni $a \in \mathbf{R}$ sia

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1-e^t}{t} & t \neq 0 \\ a & t = 0 \end{cases}$$

Determinare a in modo che la funzione sia continua in \mathbf{R} . Per tale valore di a si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Si dimostri che F è dotata di derivata seconda in 0 e si scriva il polinomio di Taylor di grado 2 e di punto iniziale 0 di F .

3) Provare che per ogni $c \in \mathbf{R}$ esiste un'unica soluzione dell'equazione

$$\arctan x \exp(x^2 - 2) = c$$

4) Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y = \cos^2 x \\ y(\pi/2) = y'(\pi/2) = 0 \end{cases}$$

5) Calcolare il seguente integrale doppio

$$\iint_D \frac{x-2y}{(x+y)^2} dx dy \quad D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; 1 \leq x+y \leq 2, 0 \leq x-y \leq 4\}$$

Auguri di un sereno Natale e di uno splendido 2018 a tutti gli studenti del mio corso e alle loro famiglie