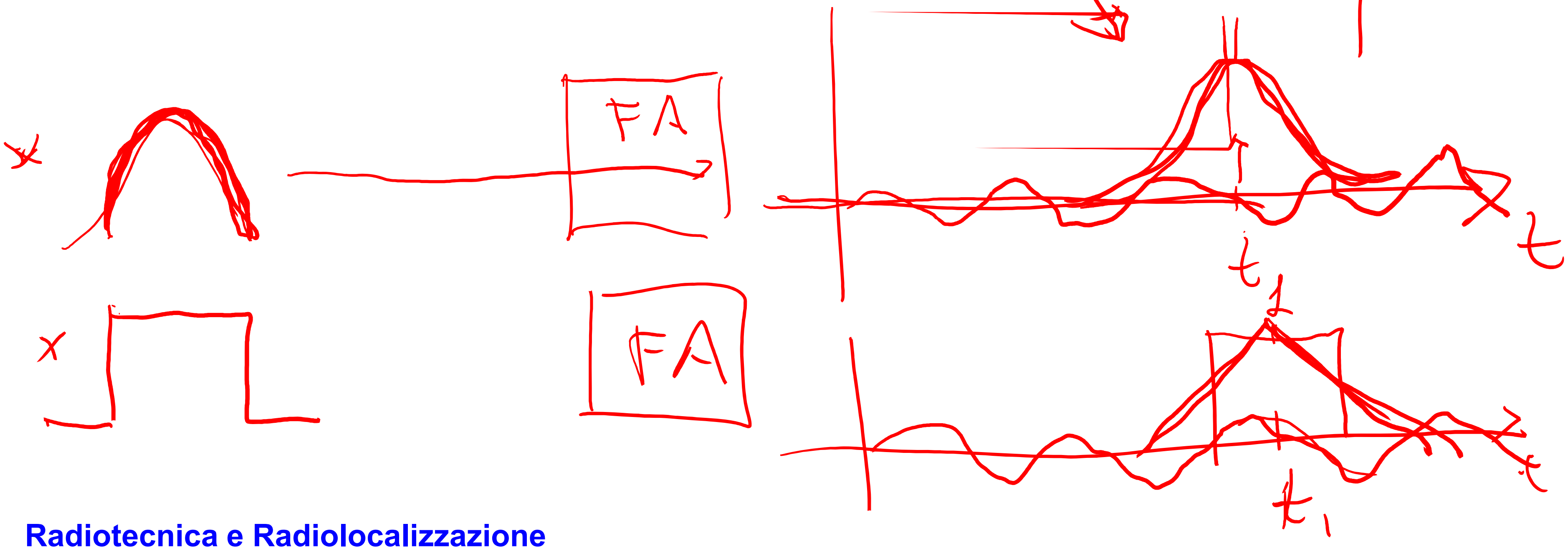
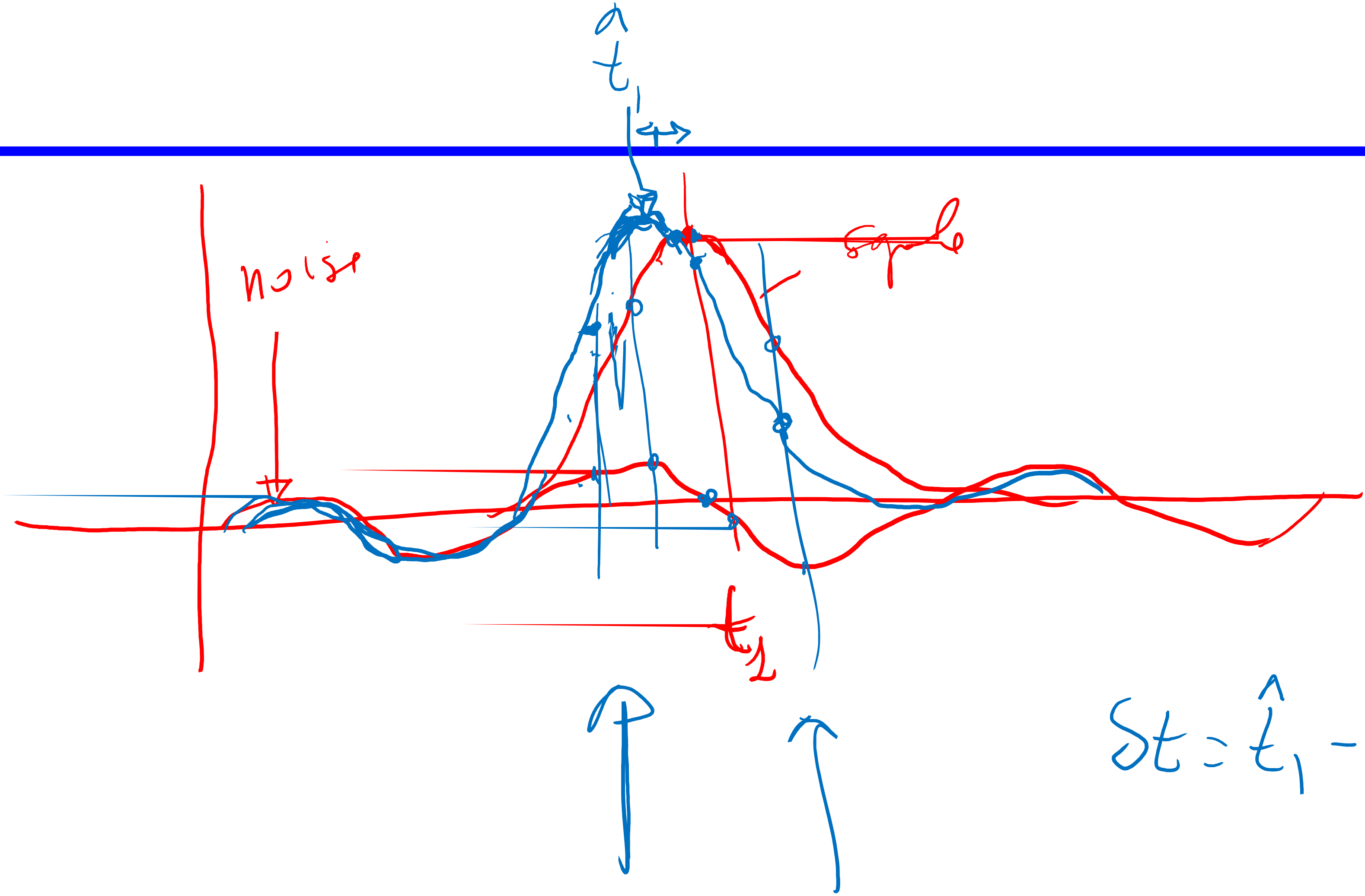
La stima di distanza

Accuratezza

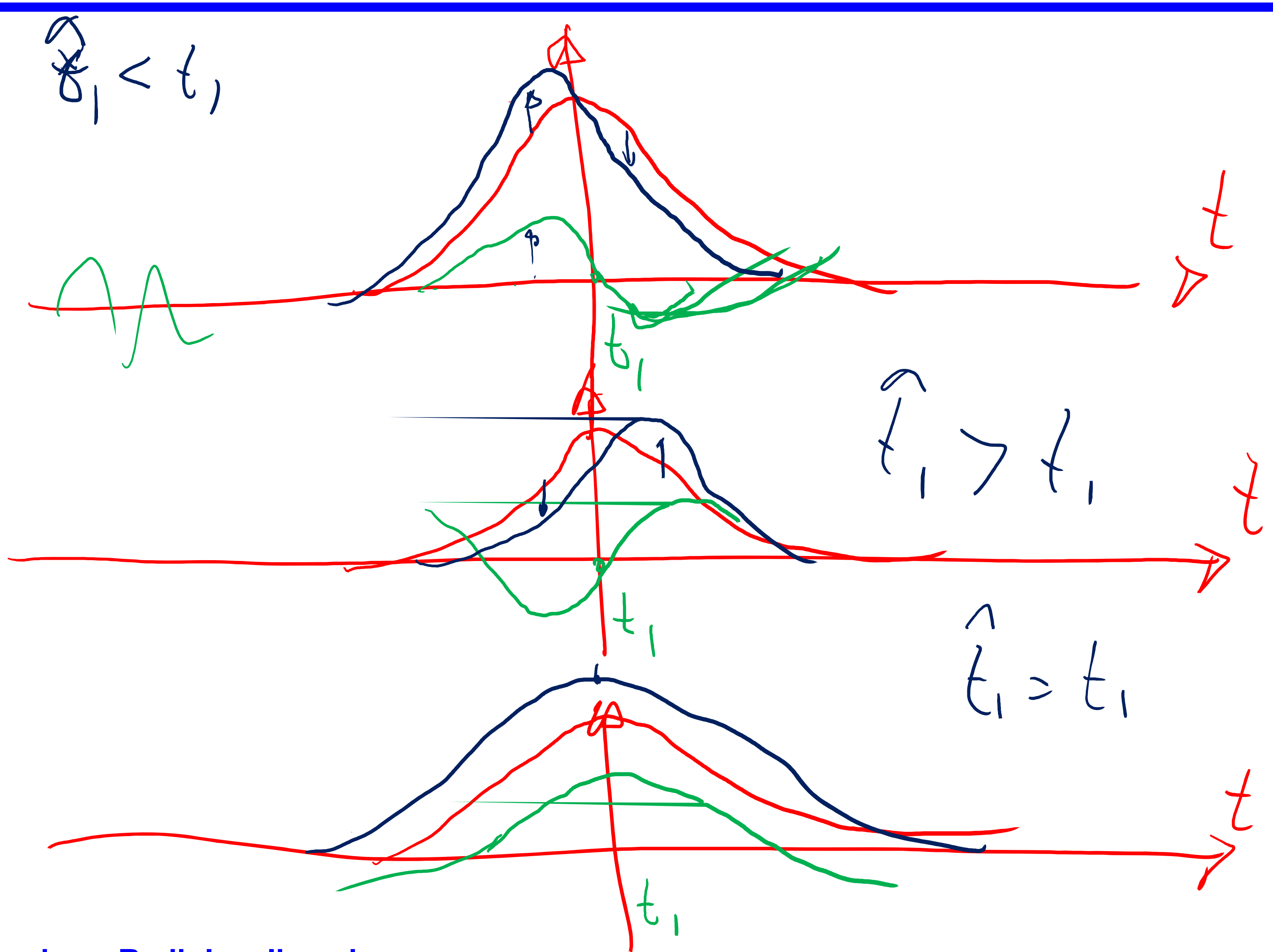
$$\boxed{\sigma = 1{,}5\ m}$$

$$\sigma_t = \frac{1{,}5}{3 \cdot 10^8}\ s = 0{,}5 \cdot 10^{-8}\ s = 5 \cdot 10^{-9}\ s = 5\ ns$$

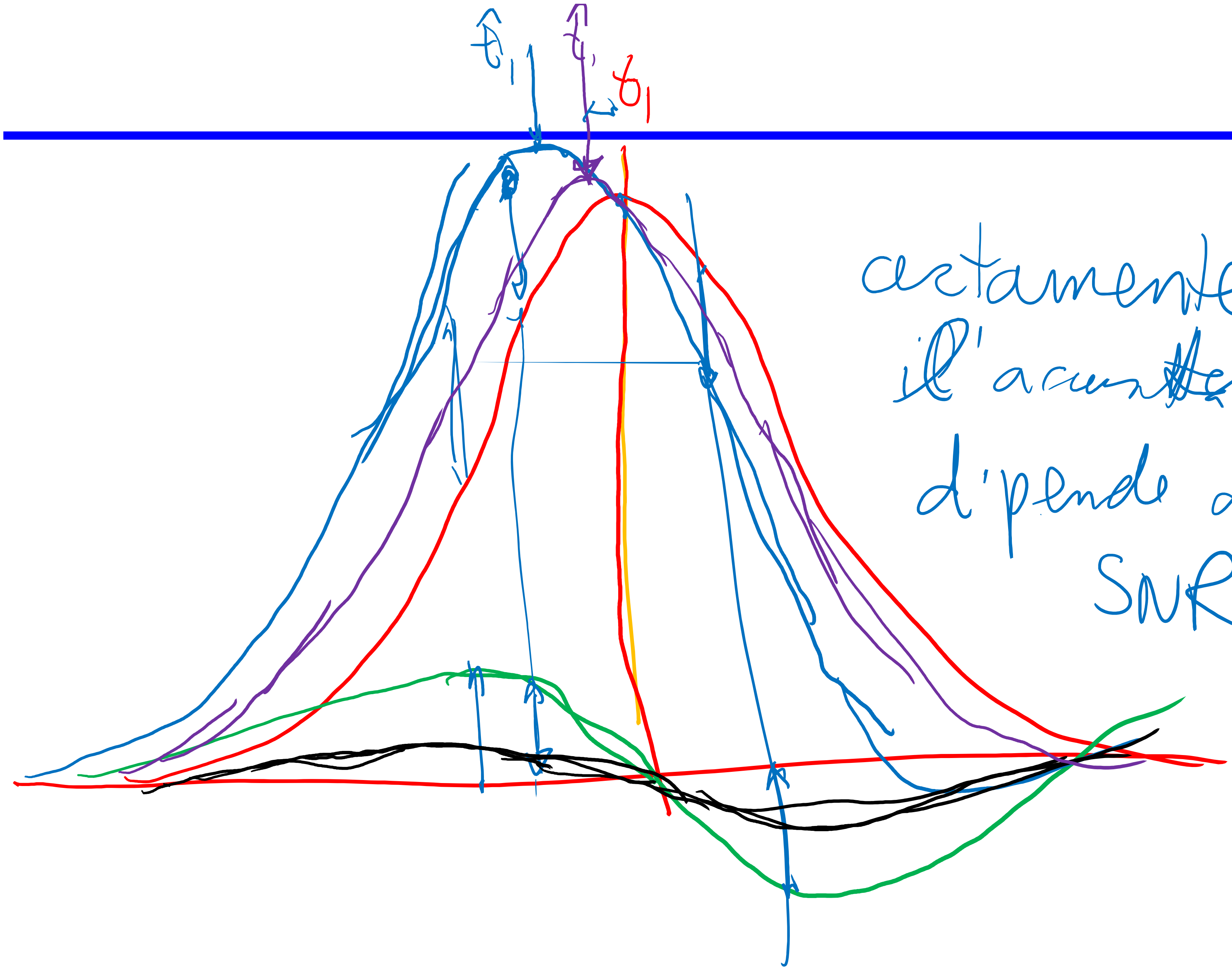




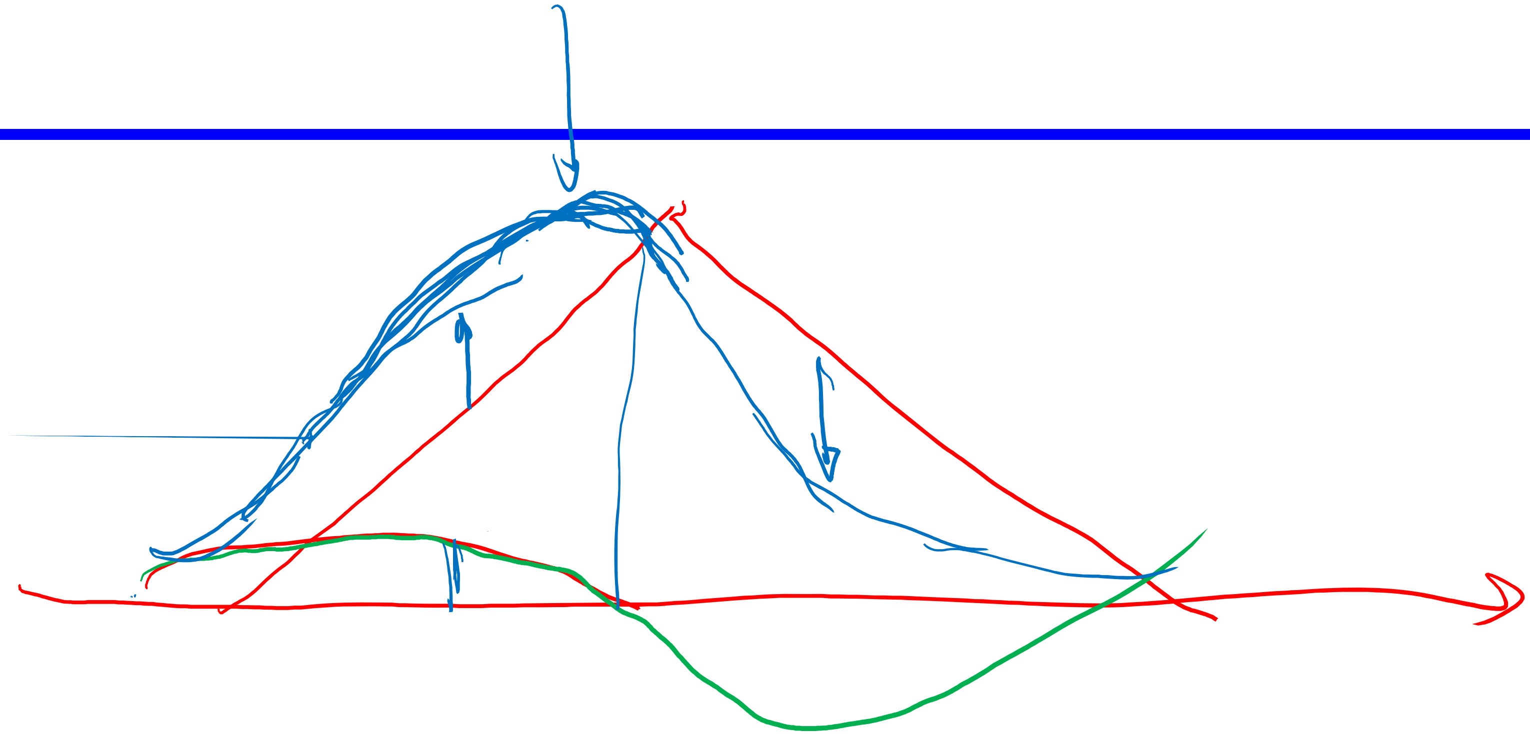
$$\delta t = \hat{t}_1 - t_1$$

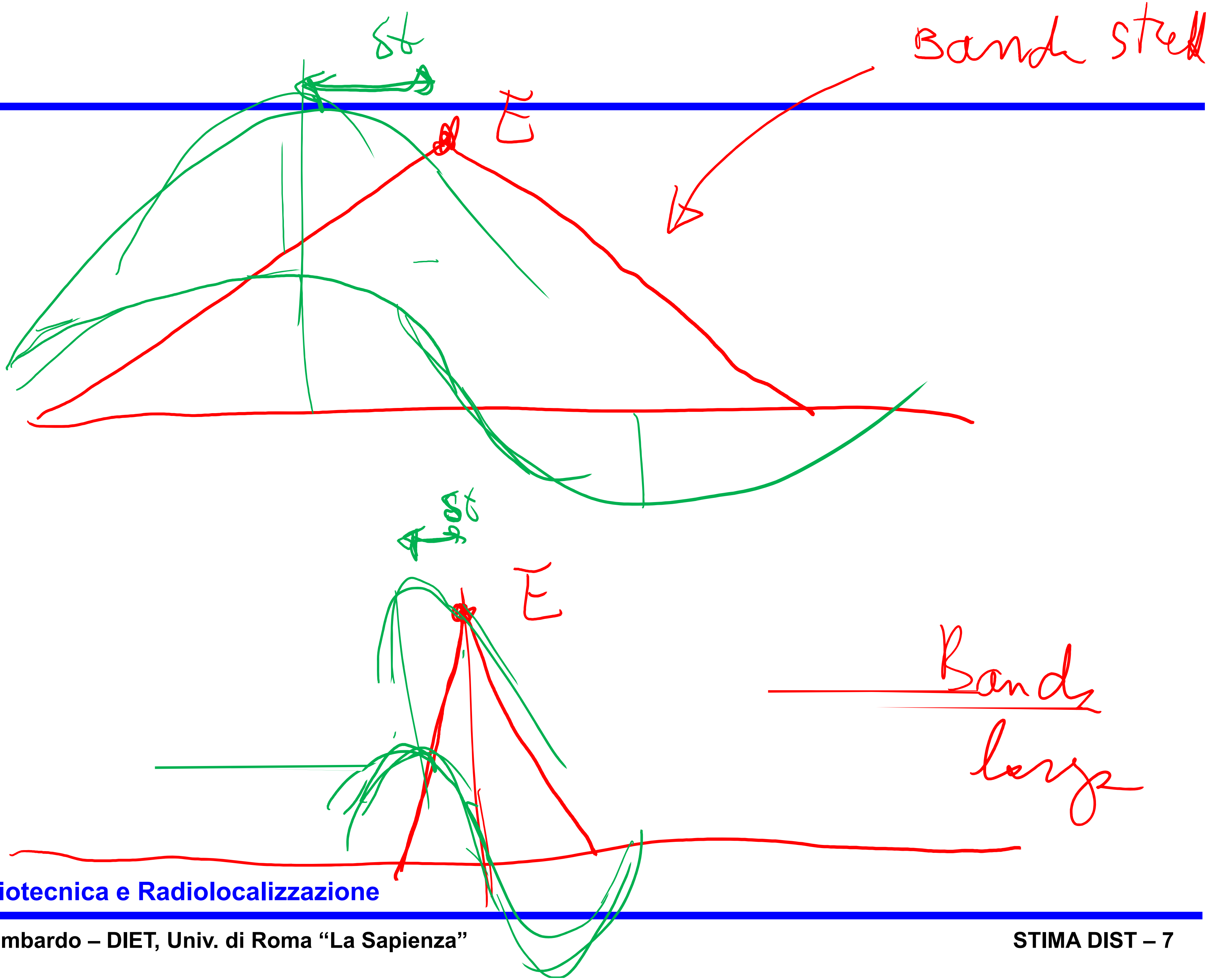


$\hat{t}_1 < t_1$
t
t_1
$\hat{t}_1 > t_1$
t
t_1
$\hat{t}_1 = t_1$
t
t_1

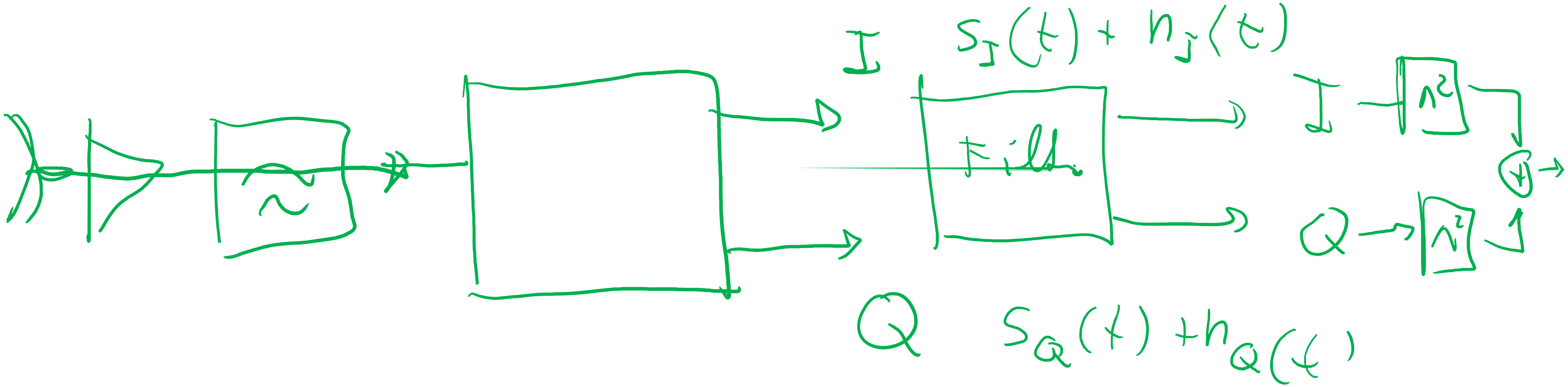


certamente l'accuratezza dipende dalla SNR





Radiotecnica e Radiolocalizzazione


I
$s_I(t) + n_I(t)$
Filt.
I
$(\cdot)^2$
Q
$(\cdot)^2$
+
Q
$s_Q(t) + n_Q(t)$

Risoluzione ed accuratezza

$\frac{1}{B}$ $\frac{c}{2B}$

$\frac{c}{B}$ Δ

- Risoluzione = rappresenta la distanza minima fra due oggetti di cui si riescono a distinguere i ritorni. La risoluzione è il parametro di interesse quando si è interessati alla rivelazione dei bersagli.
- Accuratezza = rappresenta la capacità di misurare con precisione la distanza di un oggetto. Il parametro rappresentativo è l'errore di stima della distanza. L'accuratezza è la qualità di interesse quando si è interessati alla misura di distanza e non alla rivelazione.

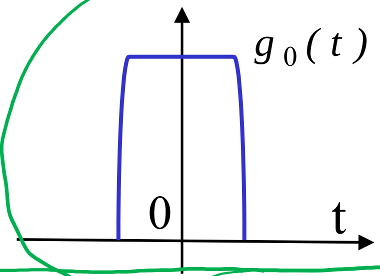
?

↳ dipende da "banda" e SNR

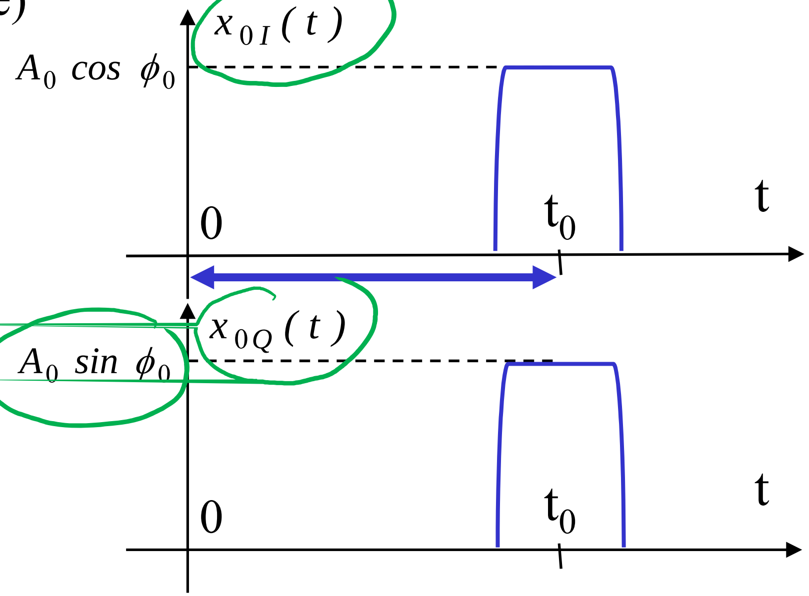
Segnali impulsivi per stima di distanza

- Si consideri di trasmettere la forma d'onda $g_0(t)$ con banda B_p
- Si assuma che il segnale trasmesso sia inviato indietro da un oggetto a distanza R (per riflessione, o ritrasmissione)
- Sia $x_0(t)$ il segnale di ritorno con:
  - ampiezza A_0 e
  - fase ϕ_0 incognita (dovuta alla propagazione)
  - ritardo $t_0=2R/c$ (c = velocità della luce)

$\frac{R}{c}$



$$\boxed{x_0(t) = A_0\, e^{j\phi_0}\, g_0(t-t_0)}$$



Esempio:

$$g_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}$$

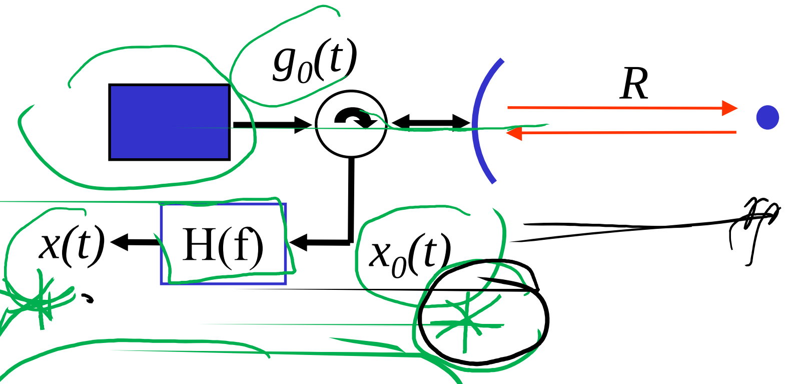
$$\boxed{B_p = \frac{\sqrt{2}}{\pi\, \sigma_p}}$$

$$x_0(t) = A_0\, e^{j\phi_0}\, e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_p^2}}$$

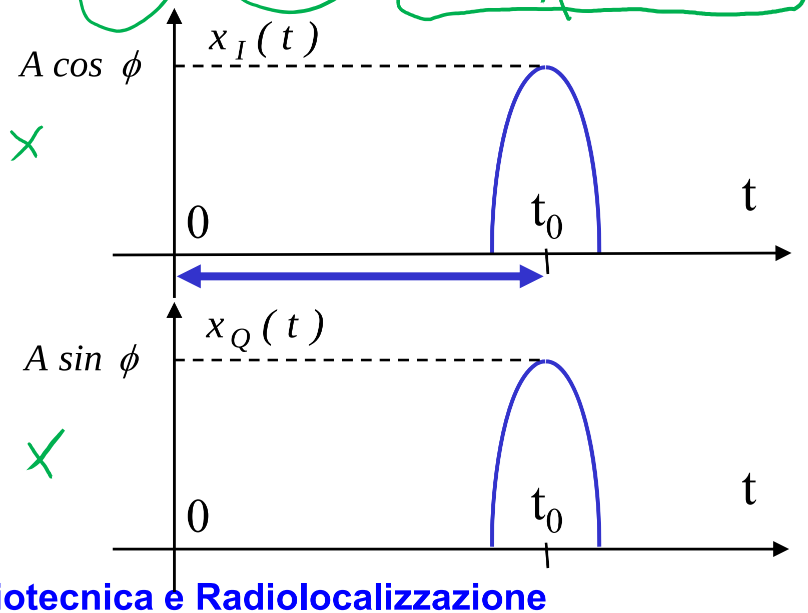
Filtro di ricezione

• il ricevitore può schematizzarsi come un filtro con funzione di trasferimento *H(f)* (*risposta impulsiva h(t)*)

• in uscita dal ricevitore si ha idealmente il segnale $x(t)=x_0(t) * h(t)$



$$\boxed{x(t) = x_0(t) * h(t) = Ae^{j\phi} g(t-t_0)}$$ con $\boxed{g(t) = g_0(t) * h(t)}$



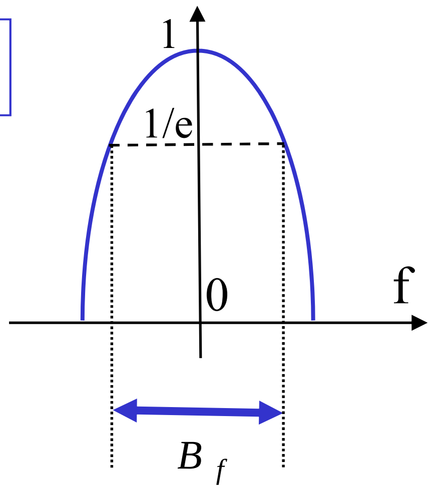
• il filtro è caratterizzato dalla forma di *H(f)* e dalla sua larghezza di banda a 3 dB, B_f:

- se $B_f << B_p$, solo una piccola parte del segnale di ritorno arriva al ricevitore. Si perde potenza trasmessa e risoluzione (mai in pratica).
- se $B_f = B_p$, e la forma di *h(t)* è la stessa di *g*(-t)*, siamo nel caso di un filtro adattato.
- se $B_f >> B_p$, il segnale di ritorno non viene alterato dalla presenza del filtro.

Segnali impulsivi e filtro di ricezione

Esempio:

- si usi un filtro con funzione di trasferimento $H(f) = e^{-2\pi^2 \sigma_f^2 f^2}$
- banda a 3 dB (circa 1/e) $B_f = \dfrac{\sqrt{2}}{\pi \sigma_f}$



- *risposta impulsiva h(t)* $h(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}}$

- in uscita dal ricevitore si ha idealmente il segnale

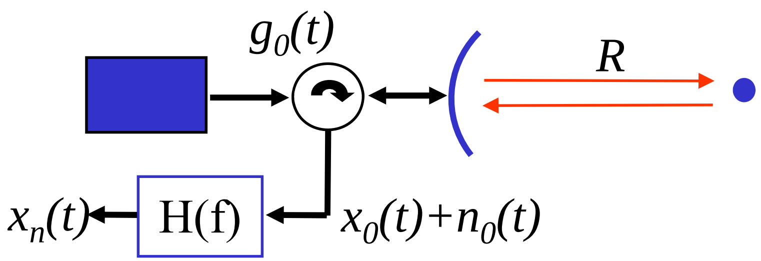
$x(t)=x_0(t) * h(t)$

$$x(t) = x_0(t) * h(t) = A e^{j\phi} g(t - t_0)$$

$$G(f) = G_0(f) \cdot H(f) = \sqrt{2\pi\sigma_p^2}\; e^{-2\pi\sigma_p^2 f^2}\; e^{-2\pi\sigma_f^2 f^2} = \sqrt{2\pi\sigma_p^2}\; e^{-2\pi(\sigma_p^2+\sigma_f^2) f^2}$$

$$\Rightarrow \quad g(t) = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2+\sigma_f^2)}}$$

Rumore termico

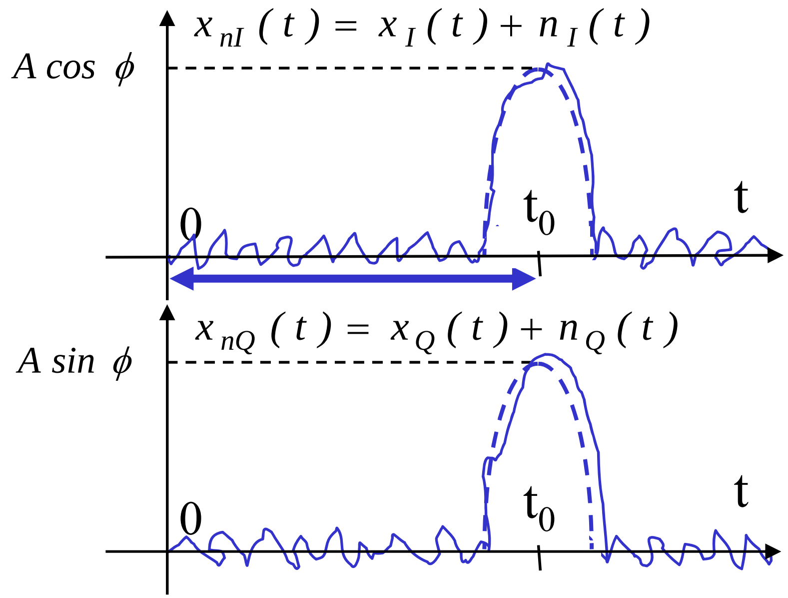


$$x_n(t) = x(t) + n(t)$$

$$\boxed{x_n(t) = Ae^{j\phi}\, g(t - t_0) + n(t)}$$

- In antenna e nei primi stadi di amplificazione si genera la componente dominante di rumore termico
- quindi, in pratica, si usa una misura del segnale $x_n(t)$, affetta da rumore termico
- il rumore termico ha valore medio nullo sulle componenti I e Q
- Il rumore termico $n_0(t)$ in ingresso al ricevitore ha spettro di densità di potenza costante e pari ad N_0
- il rumore termico $n(t)$ in uscita al ricevitore ha spettro di densità di potenza $S_n(f) = N_0 |H(f)|^2$

e potenza totale $\sigma_n^2 = N_0 B_n$, con B_n = banda di rumore

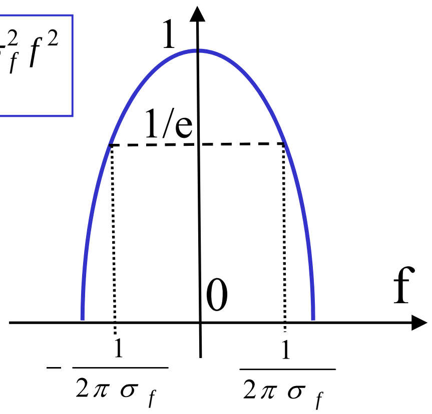


Caratteristiche del rumore termico

Esempio:

- si usi un filtro con funzione di trasferimento $\boxed{|H(f)|^2 = e^{-4\pi^2\sigma_f^2 f^2}}$
- Potenza di rumore termico:

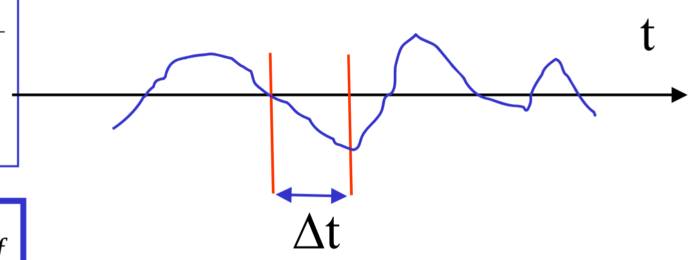
$$\boxed{\sigma_n^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2\sigma_f^2 f^2} df = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi}\sigma_f} = N_0 B_n}$$



- *banda equivalente di rumore termico* $\boxed{B_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_f}}$

- Autocorrelazione del rumore termico

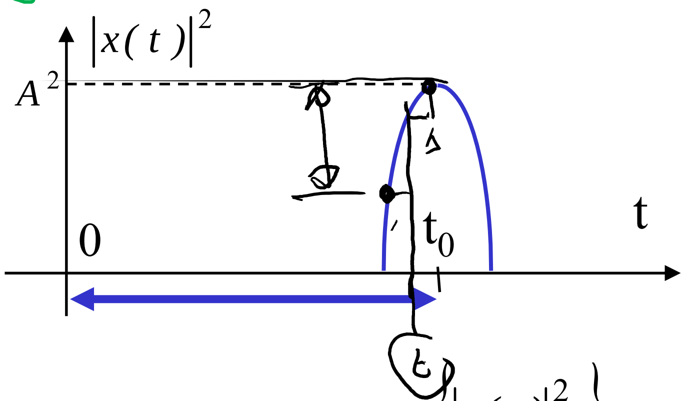
$$\boxed{R_{nn}(t) = \Im^{-1}\{S_n(f)\} = N_0 \Im^{-1}\left\{|H(f)|^2\right\} = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi}\sigma_f} e^{-\frac{t^2}{4\sigma_f^2}}}$$



⇒ Tempo di decorrelazione (1/e) $\boxed{\Delta t = 2\sigma_f}$

Misura del tempo di arrivo

- In assenza di rumore, la misura del tempo di arrivo si può ottenere misurando l'istante di tempo in cui la potenza istantanea del segnale di ritorno presenta il massimo

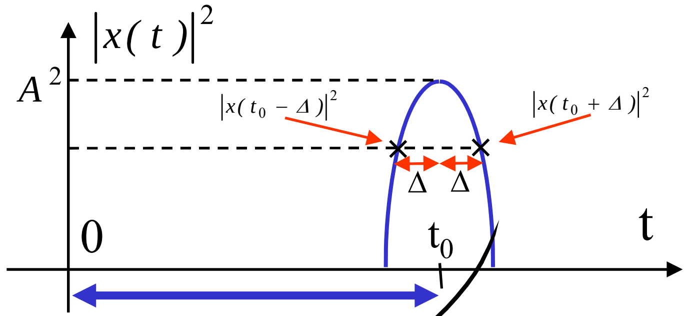


$$t_0 = \arg\max_t \left\{ |x(t)|^2 \right\}$$

- il massimo si ottiene quando si annulla la derivata

- usando una forma d'onda simmetrica, si può ottenere una stima annullando una differenza finita:

$$\boxed{t_0 \ \text{tale che} \ \frac{|x(t_0+\Delta)|^2 - |x(t_0-\Delta)|^2}{2\Delta} = 0}$$

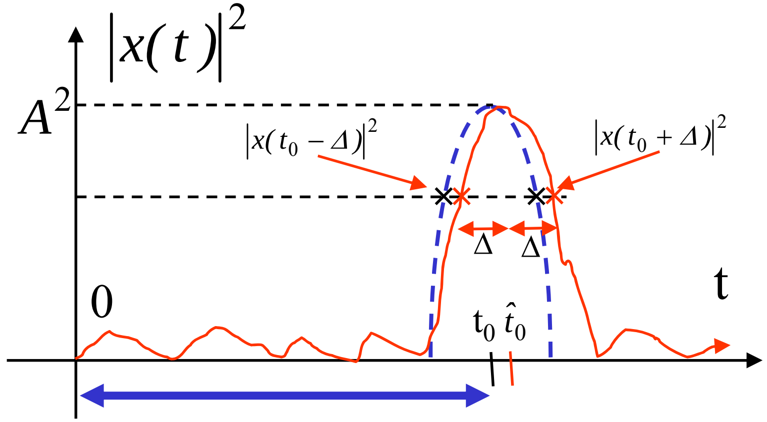


- Si noti che, facendo tendere Δ a zero, questa è esattamente la derivata. Dunque la espressione di sopra contiene anche la derivata come caso limite.

Stima del tempo di arrivo

• In presenza di rumore, la stima del tempo di arrivo $\hat{t}_0$ si può ottenere misurando l'istante di tempo in cui :

$$\boxed{\frac{\left|x_n(\hat{t}_0+\Delta)\right|^2-\left|x_n(\hat{t}_0-\Delta)\right|^2}{2\Delta}=0}$$



• Vogliamo ricavare l'errore di stima $\delta t=\hat{t}_0-t_0$

• Assumendo errore di stima δt piccolo, e rumore $|n(t)|^2$ piccolo, si sviluppa al primo ordine:

$$\left|x_n(t)\right|^2=\left|A_0\,e^{j\phi_0}\,g(t-t_0)+n(t)\right|^2=A_0^2\left|\,g(t-t_0)\right|^2+\left|n(t)\right|^2+2\,A_0\,Re\left\{e^{j\phi_0}\,g(t-t_0)n^*(t)\right\}$$

$$\left|x_n(\hat{t}_0+\Delta)\right|^2=A_0^2\left|\,g(\delta t+\Delta)\right|^2+\left|n(\hat{t}_0+\Delta)\right|^2+2\,A_0\,Re\left\{e^{j\phi_0}\,g(\delta t+\Delta)n^*(\hat{t}_0+\Delta)\right\}=$$

$$\cong A_0^2\left|\,g(\Delta)\right|^2+A_0^2\left.\frac{\partial\left|\,g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\delta t+2\,A_0\,Re\left\{e^{j\phi_0}\,g(\Delta)n^*(\hat{t}_0+\Delta)\right\}=$$

$$\cong A_0^2\left|\,g(\Delta)\right|^2+A_0^2\left.\frac{\partial\left|\,g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\delta t+2\,A_0\left|g(\Delta)\right|n_R'(t_0+\Delta)$$

Sviluppo al I° ordine :
Si trascura termine quadratico nel rumore $|n(t)|^2$ e termini misti in δt e n(t).

Errore di stima del tempo di arrivo (I)

• sviluppando la differenza in presenza di rumore si ha:

$$\left|x_n(\hat{t}_0+\Delta)\right|^2-\left|x_n(\hat{t}_0-\Delta)\right|^2=$$

$$\cong A_0^2\left|g(\Delta)\right|^2+A_0^2\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\delta t+2A_0\left|g(\Delta)\right|n_R'(t_0+\Delta)-A_0^2\left|g(-\Delta)\right|^2-A_0^2\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=-\Delta}\delta t-2A_0\left|g(-\Delta)\right|n_R'(t_0-\Delta)=$$

$$=A_0^2\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\delta t+2A_0\left|g(\Delta)\right|n_R'(t_0+\Delta)-A_0^2\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=-\Delta}\delta t-2A_0\left|g(-\Delta)\right|n_R'(t_0-\Delta)=$$

$$=2A_0^2\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\delta t+2A_0\left|g(\Delta)\right|\left[n_R'(t_0+\Delta)-n_R'(t_0-\Delta)\right]=0$$

$$\boxed{\delta t=\frac{\left|g(\Delta)\right|}{A_0\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|^2}{\partial t}\right|_{t=\Delta}}\left[n_R'(t_0-\Delta)-n_R'(t_0+\Delta)\right]}$$

$$\delta t=\frac{\left|g(\Delta)\right|}{A_0 2\left|g(\Delta)\right|\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}}\left[n_R'(t_0-\Delta)-n_R'(t_0+\Delta)\right]$$

$$\boxed{\delta t=\frac{1}{2A_0\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}}\left[n_R'(t_0-\Delta)-n_R'(t_0+\Delta)\right]}$$

Errore di stima del tempo di arrivo (II)

- effettuando il valore atteso dei due membri della equazione:

Valore atteso dell'errore

$$\boxed{\langle \delta t \rangle = \frac{1}{2A_0 \left.\dfrac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}} \left[\langle n_R'(t_0 - \Delta) \rangle - \langle n_R'(t_0 + \Delta) \rangle \right] = 0}$$

Stima non polarizzata

Varianza dell'errore

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left.\dfrac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta} \right)^2} \left\langle \left[n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta) \right]^2 \right\rangle$$

$$\left\langle \left[n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta) \right]^2 \right\rangle =$$

$$= \left\langle n_R'^2(t_0 - \Delta) \right\rangle + \left\langle n_R'^2(t_0 + \Delta) \right\rangle - 2 \left\langle n_R'(t_0 - \Delta) n_R'(t_0 + \Delta) \right\rangle =$$

$$= 2\sigma_{nR}^2 - 2R_{nR}(2\Delta) = \sigma_n^2 - R_n(2\Delta) = \sigma_n^2 \left[1 - \rho_n(2\Delta) \right]$$

Coefficiente di correlazione

$$\rho_n(\tau) = \frac{R_n(\tau)}{\sigma_n^2}$$

Ricordando

$$R_{nn}(\tau) = < [n_R(t) + jn_I(t)][n_R(t+\tau) - jn_I(t+\tau)] > =$$

$$= < n_R(t) n_R(t+\tau) > + < n_I(t) n_I(t+\tau) > + j < n_I(t) n_R(t+\tau) > - j < n_R(t) n_I(t+\tau) > =$$

$$= R_{n_R n_R}(\tau) + R_{n_I n_I}(\tau) + 0 = 2R_{n_R n_R}(\tau)$$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left.\dfrac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta} \right)^2} \sigma_n^2 \left[1 - \rho_n(2\Delta) \right]$$

Errore di stima del tempo di arrivo (III)

- sviluppando la differenza in presenza di rumore si ha:

$$\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} \sigma_n^2 [1-\rho_n(2\Delta)] = \frac{1}{4\frac{A_0^2}{\sigma_n^2} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} [1-\rho_n(2\Delta)]$$

$$\boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{1-\rho_n(2\Delta)}{4\,SNR \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2}}$$

- l'errore di stima diminuisce:
  - all'aumentare del SNR
  - all'aumentare della derivata del segnale nel punto usato Δ
  - leggera dipendenza da Δ anche per il numeratore

Nota: per Δ=0 sia numeratore che denominatore si annullano e tutto dipende dalla velocità con cui vanno a zero

Errore di stima del tempo di arrivo (IV)

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1-\rho_n(2\Delta)}{4\,SNR\left(\left.\dfrac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\right)^2}$$

- H(f) a banda larga ($B_f >> B_p$, $B_n >> B_p$):
  - banda di rumore B_n grande $\Rightarrow$ SNR piccolo
  - assumendo che $\Delta \leq 2/B_p \Rightarrow \Delta >> 1/B_f \Rightarrow \rho_n(2\Delta) \approx 0$
  - $g(t)$ è quasi identico a $g_0(t)$ (quasi inalterato dal filtro)
  - il valore ottimo di Δ dipende solo dalla derivata del segnale

- H(f) = filtro adattato ($B_f = B_p$):
  - SNR massimo possibile (per definizione)
  - $\rho_n(\tau)$ circa si dimezza in $1/B_p \Rightarrow \Delta >> 1/B_f \Rightarrow \approx 0$
  - $g(t)$ è pari all'autocorrelazione di $g_0(t)$
  - il valore ottimo di Δ dipende sia dalla derivata del segnale, sia dalla decorrelazione del rumore

Esempi di varianza di stima (I)

$$|H(f)|^2 = e^{-4\pi^2 \sigma_f^2 f^2} \qquad B_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma_f} \qquad R_{nn}(t) = N_0\, B_n\, e^{-\frac{t^2}{4\sigma_f^2}}$$

$$g_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \qquad g(t) = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}}\, e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2+\sigma_f^2)}} \qquad \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{-\sigma_p\, t}{(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)^{3/2}}\, e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2+\sigma_f^2)}}$$

$$\boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{1-\rho_n(2\Delta)}{4\,SNR\left(\left.\frac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\right)^2} = \frac{1-e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4\,\frac{A_0^2}{N_0\, B_n}\,\frac{\sigma_p^2\,\Delta^2}{(\sigma_p^2+\sigma_f^2)^3}\, e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2+\sigma_f^2}}}}$$

Esempi di varianza di stima (II)

- H(f) a banda larga ($B_f >> B_p$, $\sigma_f << \sigma_p$):

  - banda di rumore B_n grande $\Rightarrow$ SNR piccolo
  - assumendo che $\Delta \leq 2/B_p$ $\Rightarrow \Delta >> 1/B_f \Rightarrow$ $\rho_n(2\Delta) \approx 0$
  - $g(t)$ è quasi identico a $g_0(t)$ (quasi inalterato dal filtro): $\sigma_p^2 + \sigma_f^2 \approx \sigma_p^2$

$$\boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{1-\rho_n(2\Delta)}{4\,SNR\left(\left.\frac{\partial\left|g(t)\right|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\right)^2} = \frac{1-e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4\,\frac{A_0^2}{N_0\,B_n}\,\frac{\sigma_p^2\,\Delta^2}{(\sigma_p^2+\sigma_f^2)^3}\,e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2+\sigma_f^2}}} \approx \frac{\sigma_p^2}{4\,\frac{A_0^2}{N_0\,B_n}\,\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}\,e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}}}}$$

  - il valore ottimo di Δ dipende solo dalla derivata del segnale: usando $z = \Delta^2/\sigma_p^2$, a denominatore si ha $z\,e^{-z}$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[z\,e^{-z}\right] = e^{-z} - z\,e^{-z} = e^{-z}\left[1-z\right] = 0$$

Valore ottimo $z=1$ cioè $\boxed{\Delta = \sigma_p}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{e\,\sigma_p^2}{4SNR^{(f)}}}$

Esempi di varianza di stima (III)

- H(f) = filtro adattato ($B_f = B_p$, $\sigma_f = \sigma_p$):

  - SNR massimo possibile (per definizione)
  - $\rho_n(\tau)$ circa si dimezza in $1/B_p$ $\Rightarrow$ $\Delta >> 1/B_f \Rightarrow$ ≈ 0
  - $g(t)$ è pari all'autocorrelazione di $g_0(t)$ $\quad \sigma_p^2 + \sigma_f^2 = 2\sigma_p^2$

$$\boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{1-\rho_n(2\Delta)}{4\,SNR\left(\left.\frac{\partial |g(t)|}{\partial t}\right|_{t=\Delta}\right)^2} = \frac{1-e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4\,\frac{A_0^2}{N_0 B_n}\frac{\sigma_p^2\,\Delta^2}{(\sigma_p^2+\sigma_f^2)^3}\,e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2+\sigma_f^2}}} = \frac{2\sigma_p^2\,[1-e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}}]}{\frac{A_0^2}{N_0 B_n}\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}\,e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_p^2}}}}$$

  - il valore ottimo di Δ dipende sia dalla derivata del segnale, sia dalla decorrelazione del rumore

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1-e^{-z}}{z\,e^{-\frac{z}{2}}}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{z}\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)\right] = -\frac{1}{z^2}\left(e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}\right)+\frac{1}{2z}\left(e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}\right) = \frac{1}{2z^2}e^{-\frac{z}{2}}\left[-2e^z+2+ze^z+z\right]=0$$

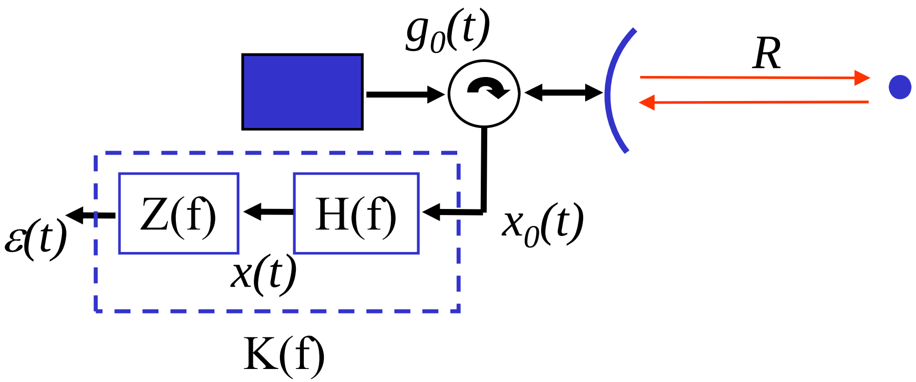
$$e^z[2-z]=2+z \qquad e^z = \frac{2+z}{2-z} \qquad \boxed{z=0} \qquad \boxed{\left\langle \delta t^2 \right\rangle = \frac{2\sigma_p^2}{SNR^{(p)}}}$$

Interpretazione/Implementazione (I)

- la stima di t_0 consiste nel trovare il valore di t tale che $\varepsilon(t)=0$

$$z(t)=\frac{1}{2\Delta}u_0(t+\Delta)-\frac{1}{2\Delta}u_0(t-\Delta)$$

$$Z(f)=2j\frac{\sin(2\pi f\Delta)}{2\Delta}$$



$$\boxed{k(t)=z(t)*h(t)=\frac{1}{2\Delta}h(t+\Delta)-\frac{1}{2\Delta}h(t-\Delta)}$$

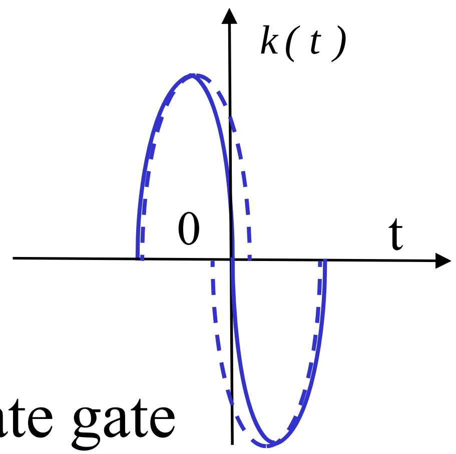
$$\boxed{K(f)=2j\frac{\sin(2\pi f\Delta)}{2\Delta}H(f)}$$

$$h(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}} \Rightarrow$$

$$h(t)=\frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}e^{-\frac{(t+\Delta)^2}{2\sigma_f^2}}-\frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}e^{-\frac{(t-\Delta)^2}{2\sigma_f^2}}=$$

$$=\frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_f^2}}\left[e^{-\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}}-e^{\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}}\right]e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\Delta}\sinh\left(\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}\right)e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_f^2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}}$$



Early-Late gate

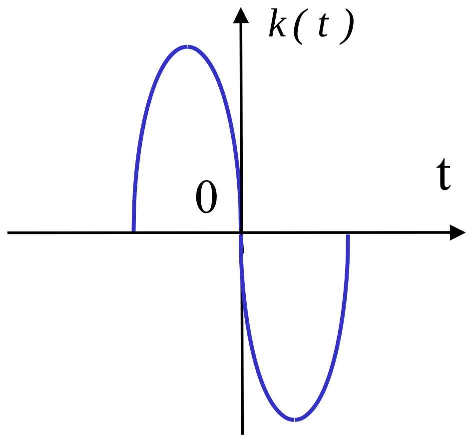
Interpretazione/Implementazione (II)

- condizione ottima per filtro adattato:

  - per $\Delta \to 0$ $\qquad \lim\limits_{\Delta\to 0} K(f) = \lim\limits_{\Delta\to 0} 2j\dfrac{\sin(2\pi f\Delta)}{2\Delta}H(f) = j2\pi f \; H(f)$

$$k(t) = \frac{\partial}{\partial t}h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k(t) = \frac{-t}{\sigma_p^2\sqrt{2\pi\sigma_p^2}}e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}}$$



Early-Late gate