I modelli matematici del caos

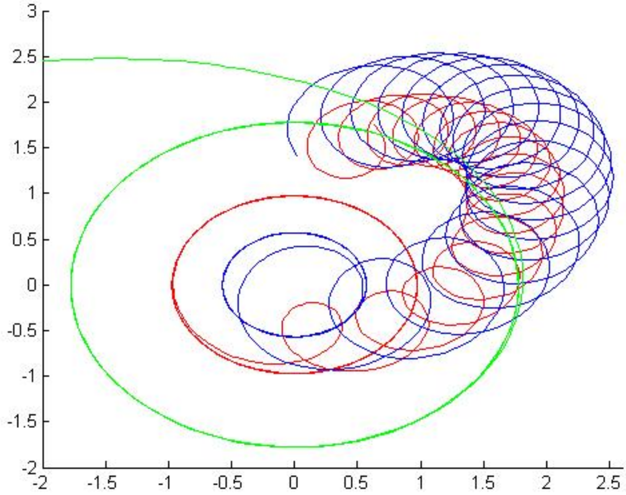
I modelli della realtà permettono di comprendere più approfonditamente i fenomeni ma, soprattutto, permettono di fare previsioni sullo svolgimento dei fenomeni nel futuro.

Qualche volta però il futuro non è prevedibile tanto facilmente ....

Un po' di storia

La "**teoria del caos**" nasce alla fine dell'Ottocento, con i lavori del grande fisico-matematico francese Henry Poincare' (1854-1912)

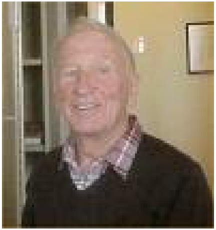
Studiando con equazioni analoghe a quelle di Newton il moto di tre pianeti che si attraggono mutuamente (ad esempio il sole, la terra e la luna), Poincare' dimostra, con metodi nuovi da lui inventati a questo scopo, che vicino ad una traiettoria periodica di questi pianeti (quelle che si osservano nella realta'), possono esistere anche traiettorie periodiche molto piu' complicate, che possono essere anche completamente irregolari. Definisce queste traiettorie "**caotiche**".
Queste traiettorie non erano previste dagli studi classici di moto dei pianeti.


3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

I risultati teorici di Poincare' dimostrano anche che una traiettoria apparentemente regolare, se guardata a una scala piu' dettagliata, appare profondamente perturbata ma contiene sempre, all'interno del disordine, delle isole di ordine, che a loro volta rivelano, a una scala ancora piu' "fine", delle zone di disordine ove la stessa struttura si perpetua in miniatura.
L'ordine e il disordine, il regolare e l'irregolare, il prevedibile e l'imprevedibile si intrecciano indissolubilmente man mano che si procede verso l'infinitamente piccolo.
"*Si rimarrebbe sbalorditi dalla complessita' di questa figura - scrive Poincare' - che non cerco nemmeno di tracciare. Niente e' piu' adatto a darci un'idea della complicazione del problema dei tre pianeti...*

La meteorologia

All'inizio degli anni '60 del Novecento, uno studioso americano di meteorologia, Edward Lorenz (1917-2008), si occupa di descrivere teoricamente gli spostamenti delle perturbazioni atmosferiche. L'obiettivo dei suoi studi è quello di arrivare a fornire previsioni meteo affidabili.



Lorenz, che lavora nei laboratori del Massachusetts Institute of Technology (MIT) USA, vorrebbe ottenere modelli in grado di rappresentare, in analogia con i moti di un fluido, evoluzioni meterologiche, con particolare attenzione alla turbolenza atmosferica.

Lo studio teorico delle turbolenze atmosferiche (il modello) puo' essere ricondotto ad un piccolo numero di equazioni piuttosto semplici, molto simili a quelle di tipo logistico,

$$x' = -a(x - y)$$

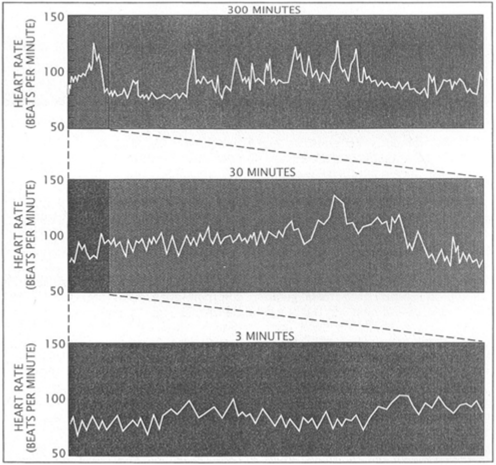
$$y' = bx - y - zx$$

$$z' = -cz + xy.$$

Elaborazioni al calcolatore evidenziano anche in questo modello deterministico **la natura "imprevedibile", caotica, di alcune evoluzioni.** Lorenz conclude che e' proprio a causa di questa imprevedibilita' che previsioni attendibili per tempi maggiori di qualche giorno sono impossibili.

Nei successivi anni '70, un gran numero di fisici, biologi, fisiologi, riconoscono diversi tipi di irregolarita', di disordine, nell'osservazione di fenomeni naturali.
Con i matematici ricercano possibili descrizioni astratte (matematiche) e connessioni fra i diversi tipi di irregolarita'.

Ad esempio i fisiologi scoprono, anche utilizzando opportuni modelli teorici, che l'apparente caos nel funzionamento del cuore umano e' ritenersi un indice di buona salute. I modelli teorici prevedono anche che il ristabilirsi di ordine e' una delle cause di morte improvvisa, fino ad allora inspiegabile. Le osservazioni sperimentali confermano queste affermazioni



Gli ecologi investigano con i nuovi strumenti teorici le fluttuazioni climatiche o di numerosita' delle popolazioni e riescono a comprendere il comportamento fortemente irregolare di alcune specie.

In termini correnti il termine **caos** e' sinonimo di totale disordine e imprevedibilita', nel linguaggio dei modelli scientifici il **caos** indica un comportamento che appare disordinato, ma in realta' e' governato da un ordine, una regola assegnata di evoluzione.

E' per questa ragione che questo tipo di comportamento, apparentemente molto disordinato, viene anche chiamato **caos deterministico**.

Attrattivita' e caos

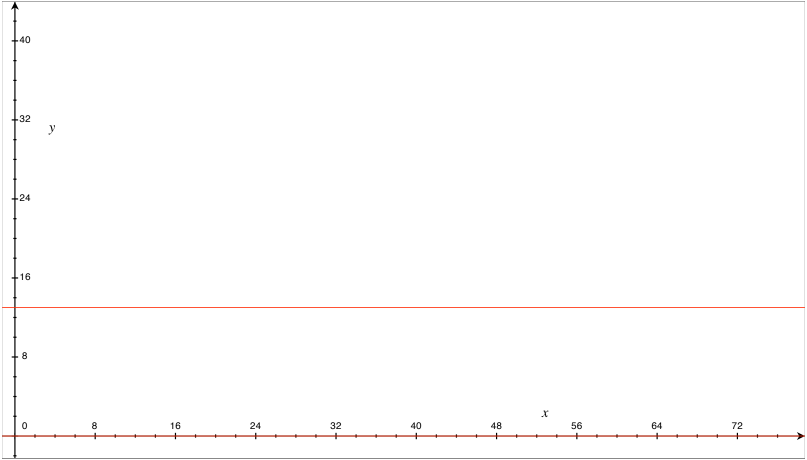
Nella descrizione dell' evoluzione di fenomeni naturali non e' tanto importante quello che accade a tempi finiti, ma cio' che si realizza su tempi lunghi. Piu' precisamente, quello che interessa è "il destino finale" o

il comportamento asintotico dell'evoluzione

Ad esempio, se una popolazione evolve logisticamente, possiamo notare diversi tipi di comportamento asintotico, che dipendono, oltre che dalla legge di evoluzione, soprattutto dalle condizioni iniziali:

a) se il valore iniziale della numerosita' e' esattamente uguale a zero oppure al valore k della "soglia ecologica" ($N_0 = 0$, $N_0 = k$), la popolazione e' in **equilibrio** cioe' il valore della numerosita' non varia mai,

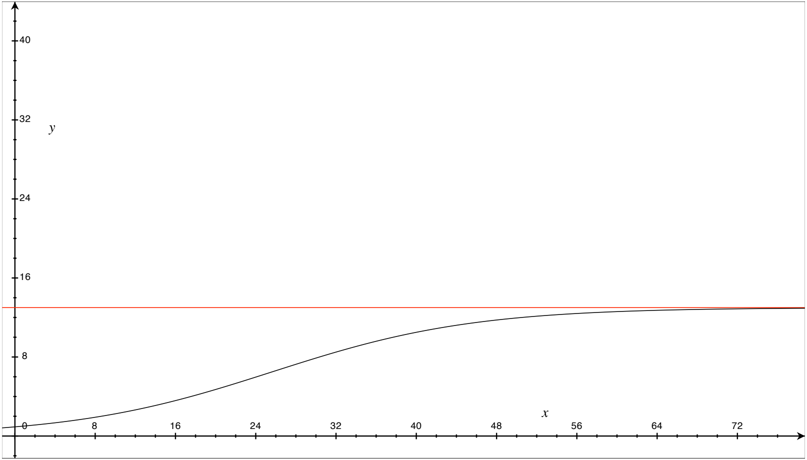
$$N(t) = 0 \text{ oppure } N(t) = k \text{ per ogni valore di } t.$$



$$N(t) = \frac{k}{1+(k/N_0-1)e^{-rt}} \text{ con } k = 13,\ N_0 = 0 \text{ e } N_0 = 13$$

b) Se la numerosita' iniziale e' $0 < N_0 < k$, per $t > 0$ la numerosita' aumenta e, asintoticamente, si avvicina sempre piu' al valore k.

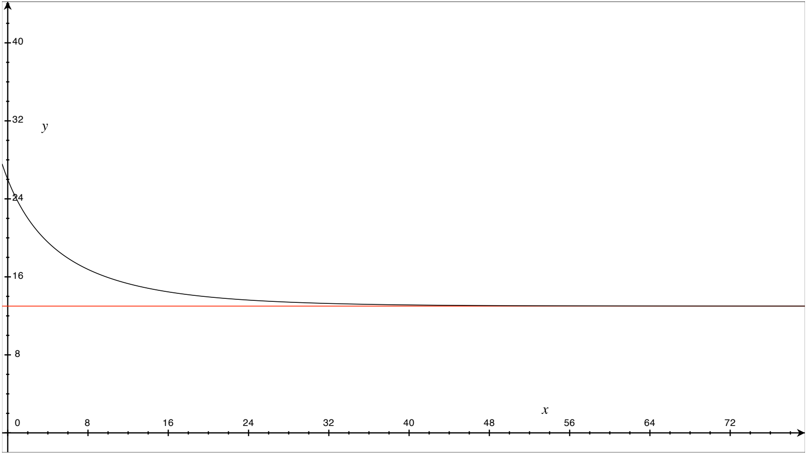
Si puo' dire che la soglia ecologica, che e' soluzione di equilibrio, ha anche la proprieta' di "**attrarre**" le evoluzioni che hanno origine da condizioni iniziali minori del valore di soglia.



$$N(t) = \frac{k}{1+(k/N_0-1)e^{-rt}} \text{ con } k = 13,\ N_0 = 1$$

(c) Se e' $N_0 > k$, la numerosita' diminuisce e, asintoticamente, si avvicina sempre piu' al valore k.

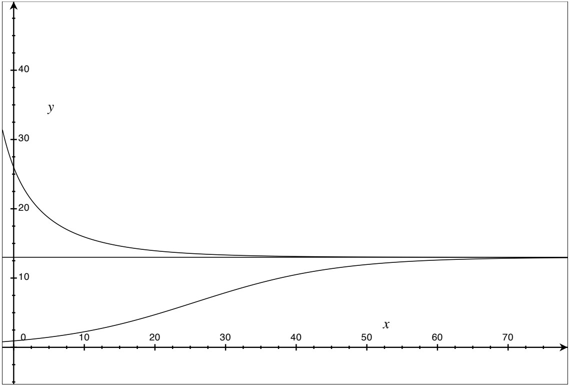
La soglia ecologica, anche in questo caso, ''**attrae**'' le evoluzioni che hanno origine da condizioni iniziali maggiori del valore di soglia.



$$N(t) = \frac{k}{1+(k/N_0-1)e^{-rt}} \text{ con } k = 13,\ N_0 = 26$$

Diversa e' la proprieta' della soluzione di equilibrio $N(t) = 0$.

Infatti, , al passar del tempo, qualunque soluzione dell'equazione logistica e' "**lontana per sempre**" dalla soluzione di equilibrio $N(t) = 0$.
Si puo' dire che la soluzione di equilibrio $N(t) = 0$ e' "**repulsiva**".



ATTRATTIVITA' e REPULSIVITA'

sono PROPRIETA' ASINTOTICHE delle soluzioni

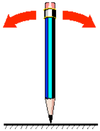
Altri esempi

I fenomeni fisici di moto.

Un corpo pesante occupa una posizione di "**equilibrio attrattiva (e stabile)**" se:
- quando e' posto nella posizione di equilibrio li' rimane per sempre
- ritorna nella posizione di equilibrio quando ne viene allontanato di poco.

Un corpo pesante occupa una posizione di "**equilibrio instabile (repulsivo)**" se:
- quando e' posto nella posizione di equilibrio li' rimane per sempre
- si allontana definitivamente dalla posizione di equilibrio quando ne viene allontanato di poco

Ad esempio:



equilibrio instabile *equilibrio stabile*

La soluzione di equilibrio delle equazioni di Lorenz

$$x' = -a(x - y)$$

$$y' = bx - y - zx$$

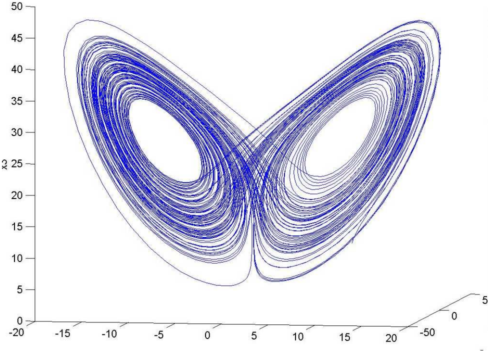
$$z' = -cz + xy$$

e'

$$x = y = \sqrt{c(b-1)}, \qquad z = b - 1,$$

ed e' un attrattore.

iLorenza dimostra che l comportamento asintotico di soluzioni che hanno dato iniziale delle soluzioni vicino all'equilibrio equilibrio puo' essere molto complicato



La soluzione di equilibrio delle equazioni di Lorenz e' detto "un attrattore strano"

La ”mappa logistica” di Robert May

La forma discreta dell’equazione logistica presenta molti comportamenti asintotici diversi (e anche molto complicati).

R. May nasce nel 1937 in Australia, dopo essersi laureato in Fisica a Sidney si trasferisce, nel 1971, negli Stati Uniti per perfezionarsi in matematica applicata. I suoi interessi si rivolgono ben presto allo studio di questioni riguardanti modelli per la dinamica di popolazioni animali.

Il modello

May studia un modello molto semplice, fino a quel momento ritenuto analogo a alla forma continua del modello logistico: la cosiddetta **mappa logistica**.

Si tratta di un **sistema dinamico** ($t = 0, 1, ...,$ intero) di evoluzione della numerosità. A secondo membro la "regola" è quella logistica:

$$N(t+1) = N(t)(r - r'N(t)) = rN(t)(1 - N(t)/k), \qquad (*)$$

$$N(0) = N_0$$

(r rappresenta, come nel caso continuo, il tasso di crescita della popolazione, r', il tasso di competizione intraspecifico, $k = r/r'$ è la capacita' portante (la numerosità massima di individui compatibile con le risorse a disposizione).

Per semplificare lo studio, scegliamo $k = 1$ cioè $r = r'$; questa scelta si può sempre fare scegliendo opportunamente le unità di misura.

Con questa scelta la $(*)$ si riscrive nella forma

$$N(t+1) = rN(t)[1 - N(t)]. \quad (**)$$

Notare che la $(**)$ prescrive la legge di variazione della numerosità al passare delle "generazioni". Affinchè la $(**)$ abbia senso biologico, per ogni $t \geq 0$ deve essere $N(t+1) > 0$.
Visto che $N(t+1) = rN(t)[1 - N(t)]$, si deve avere quindi $rN(t)[1 - N(t)] > 0$. Visto che $N(t)$ è positivo, deve essere, per ogni t, $r[1 - N(t)] > 0$, cioè

$$r > 0 \quad \text{e} \quad 1 - N(t) > 0 \Rightarrow N(t) < 1$$

oppure

$$r < 0 \quad \text{e} \quad 1 - N(t) < 0 \Rightarrow N(t) > 1.$$

Studiamo solo il caso in cui sia $r > 0$ (quindi $N(t) < 1$). Ricordare che, per le ipotesi fatte, la capacità portante è $k = 1$.

Equilibrio

Si ha equilibrio se, fissato un dato iniziale N_0, per ogni t risulta $N(t+1) = N(t) = N(t-1) = ... = N(1) = N(0)$.

Tenendo conto della legge $N(t+1) = rN(t)[1 - N(t)]$ si ha equilibrio se

$$N(t) = rN(t)[1 - N(t)].$$

L'equazione precedente è soddisfatta se è $N(t) = 0$, (equilibrio banale) oppure, dividendo a primo e secondo membro per $N(t)$, se $1 = r[1 - N(t)] \Rightarrow$

$$N(t) = 1 - 1/r = (r-1)/r.$$

Notare che, visto che $N(t)$ deve essere positivo, quest'ultimo equilibrio esiste solo se $r > 1$.

Problema. Che comportamento asintotico hanno le soluzioni con dato iniziale $N(0) \neq 0$, $N(0) \neq (r-1)/r$?
Per rispondere a questa domanda,

seguiamo l'evoluzione per alcuni valori di r.

Osserviamo subito che la legge
$N(t+1) = rN(t)[1 - N(t)] = rN(t) - rN^2(t) \qquad (**)$ fa corrispondere un numero ad un altro numero secondo la seguente "regola":

scelto $N(t) = x$, in corrispondenza si trova il numero $N(t+1) = y$ che ha la seguente proprieta': $y = f(x) = rx - rx^2$.

In altre parole le coppie di numeri x e y sono le coordinate di punti appartenenti al grafico di una parabola di equazione $y = f(x) = rx - rx^2$

Caso $0 < r < 1$

Scegliamo, ad esempio $r = 0.5 = 1/2 < 1$; la parabola ha equazione

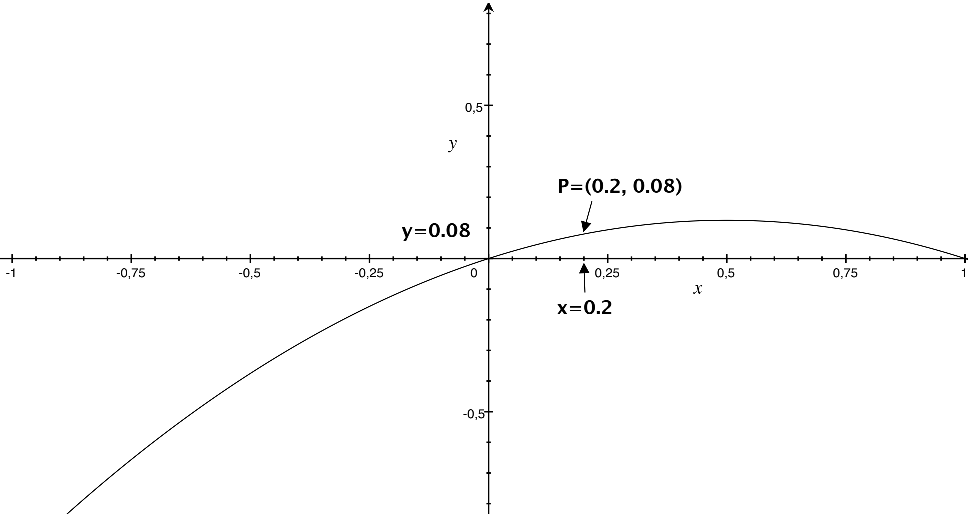
$$y = 0.5x - 0.5x^2.$$

Visto che $r < 1$, esiste solo l'equilibrio $N(t) = 0$, .

Scelta la condizione iniziale $N(0) = x_0 = 0.2$ (ma non cambia niente per valori di x_0 diversi), il valore $N(1) = y_0$ e' dato da

$$y_0 = rx_0[1 - x_0] = 0.5(0.2) - (0.5)(0.2)^2 = 4/25 = 0.08$$

(il punto di coordinate $(x_0, y_0) = (0.2, 0.08)$ appartiene al grafico della parabola $y = f(x) = 0.5x - 0.5x^2$).

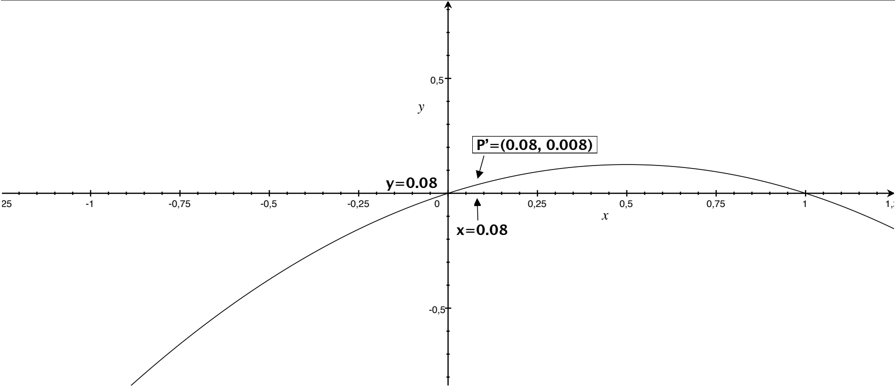


0,5
y
P=(0.2, 0.08)
y=0.08
-1
-0,75
-0,5
-0,25
0
0,25
0,5
0,75
1
x
x=0.2
-0,5

Il successivo valore di numerosità si ottiene iterando la $(**)$ e ricordando che $x_1 = y_0 = N(1)$: $N(2) = y_1 = rN(1)[1 - N(1)] = rx_1(1 - x_1)$. Quindi

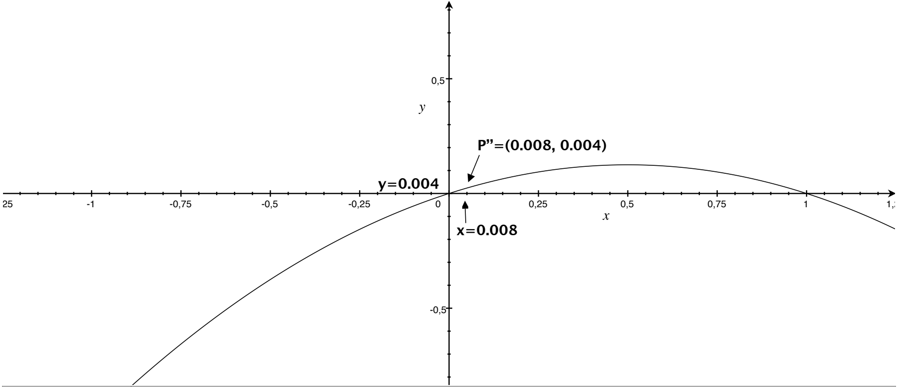
$$N(2) = y_1 = 0.5(0.08) - (0.5)(0.0.08)^2 = 0.008 :$$

(il punto di coordinate $(x_1, y_1) = (0.08, 0.008)$ appartiene al grafico della parabola $y = f(x) = 0.5x - 0.5x^2$).



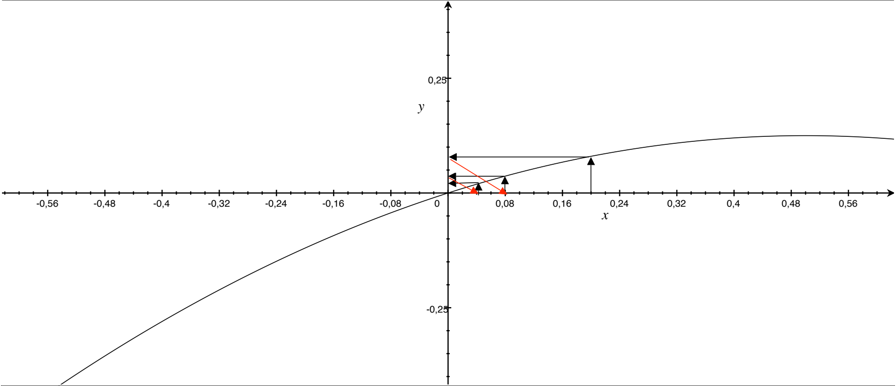
Il terzo valore e' $N(3) = y_2 = rN(2)[1 - N(2)] = rx_2(1 - x_2)$ $(x_2 = y_1)$

$$N(3) = y_2 = 0.5(0.008) - (0.5)(0.008)^2 \approx 0.004$$



Gli altri valori si ottengono in modo del tutto analogo e non è difficile verificare che si ha $N(4) = y_3 \approx 0.002$, $N(5) = y_4 \approx 0.001$ ecc.

Si può concludere che ad ogni iterazione il punto si avvicina sempre piu' all'origine (l'origine, che è soluzione di equilibrio, ''**attrae**'' tutti i punti)



Se $0 < r < 1$, la popolazione è destinata all'estinzione per ogni valore iniziale della numerosità.

Caso $1 < r < 3$

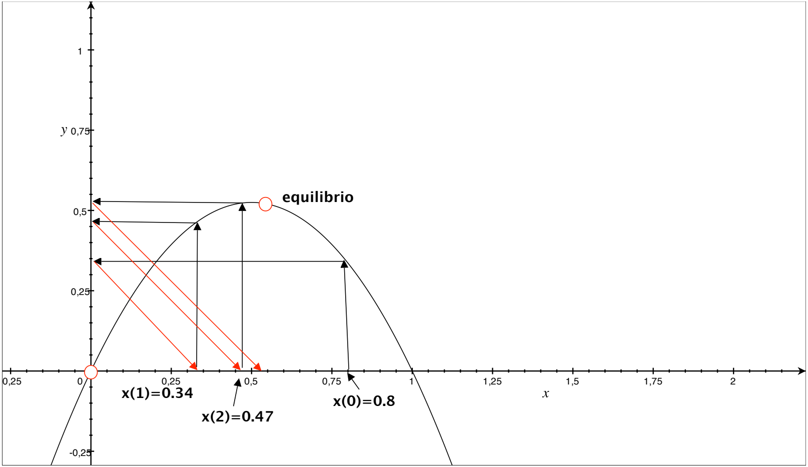
Scegliamo ora $r = 2.1$. In questo caso ci sono 2 valori di equilibrio: $N(t) = 0$ e $N(t) \approx 0.5238$ per ogni t.
Sia $N(0) = 0.8$ (ma qualunque altro dato iniziale produce una analoga evoluzione). Si ha

$$N(1) = 2.1(0.8)[1 - 0.8] \approx 0.34$$
$$N(2) = 2.1(0.34)(1 - 0.34) \approx 0.47$$
$$N(3) = 2.1(0.47)(1 - 0.2736) \approx 0.523$$
$$N(4) = 2.1(0.523)(1 - 0.523) \approx 0.5237$$

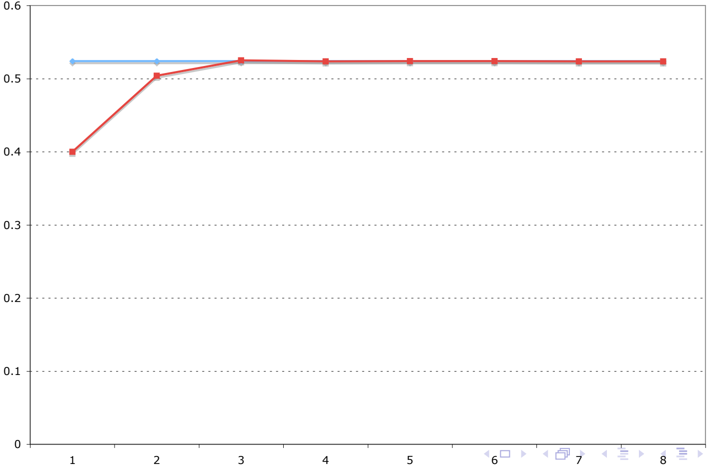
In poche iterazioni il punto si avvicina all'equilibrio $N \approx 0.5238$ (attrattore). La soluzione di equilibrio $N = 0$ e' diventata repulsiva.

Questo cambiamento nel comportamento asintotico, che dipende dal fatto che il valore di r è aumentato, si chiama **biforcazione**.

Conclusione: nel caso in cui sia $1 < r < 3$, il comportamento asintotico delle soluzioni con dato iniziale minore 1 (e diverso dal valore di equilibrio) è diverso da quello del caso $0 < r < 1$. Infatti, in questo caso, le soluzioni tendono, asintoticamente, verso l'equilibrio non banale.



I valori di numerosità possono essere rappresentati, equivalentemente, dal seguente grafico, in cui la linea blu rappresenta il valore di equilibrio e il valore iniziale è $N(0) = 0.4$.



Caso $3 < r < 3.45$

Scegliamo $r = 19/6 \approx 3.17 \in (3, 1 + \sqrt{6} \approx 3.45]$.

Le soluzioni di equilibrio sono
$N(t) = 0$ e $N(t) = (r-1)/r = 13/19 \approx 0.68$ per tutti i t.

Se il dato iniziale e' $N(0) = 15/19 \approx 0.79$, non è difficile verificare che si ha

$$N(1) = (19/6)(15/19)[1 - (15/19)] = 10/19$$

mentre

Inoltre

$$N(2) = (19/6)(10/19)[1 - (10/19)] = 15/19$$

$$N(3) = (19/6)(15/19)[1 - (15/19)] = 10/19$$

$$N(4) = (19/6)(10/19)[1 - (10/19)] = 15/19$$

$$N(5) = (19/6)(15/19)[1 - (15/19)] = 10/19$$

....

a tutti i passi pari si trova il valore $15/19$, a quelli dispari $10/19$.

Le soluzioni che hanno come dato iniziale $N(0) = 10/19$ **oppure** $N(0) = 15/19$ **possono solo oscillare tra i valori 10/19 e 15/19 (sono soluzioni periodiche di periodo 2)**.

Che comportamento hanno le soluzioni con dato iniziale diverso dagli equilibri 0, $13/9(\approx 0.68)$ e dalle soluzioni periodiche $10/19(\approx 0.53)$ e $15/19(\approx 0.79)$?

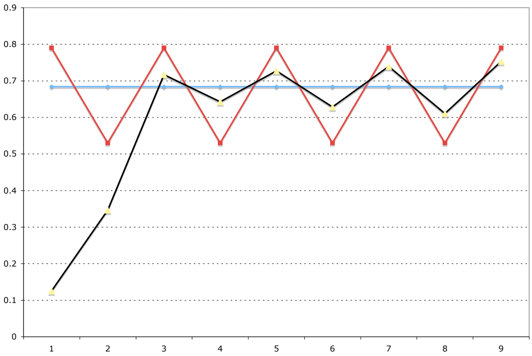
Se, ad esempio, $N(0) = 0.13$ si ha

$$N(1) = 19/6(0.13) - 19/6(0.13)^2 \approx 0.32$$
$$N(2) = (19/6)(0.0.32) - 19/6(0.32)^2 \approx 0.71$$
$$N(3) = (19/6)(0.71) - (19/6)(0.71)^2 \approx 0.65$$
$$N(4) = (19/6)(0.65) - (19/6)(0.65)^2 \approx 0.73$$
$$N(5) = (19/6)(0.73) - (19/6)(0.73)^2 \approx 0.63$$

....

La soluzione oscilla tra $10/19(\approx 0.53)$ e $15/19(\approx 0.79)$: le soluzioni periodiche sono attrattive (altra biforcazione)

Conclusione: nel caso in cui sia $3 < r < 3.45$, il comportamento asintotico delle soluzioni con dato iniziale minore 1 (e diverso dai valori di equilibrio e di periodicità) è ancora diverso da quello dei due casi precedenti. Infatti, in questo caso, le soluzioni tendono asintoticamente, oscillando, verso l'equilibrio le soluzioni periodiche (in rosso nella figura).



Caso $r \approx 4$

Al crescere di r intorno al valore 4 il comportamento asintotico delle soluzioni si complica sempre piu' e non si puo' riconoscere alcun comportamento definito.
In particolare due soluzioni che partono da condizioni iniziali anche molto vicine possono avere comportamenti asintotici profondamente diversi: in questi casi vi e' il caos.

Esempio

$$r = 3.9$$

Le soluzioni di equilibrio sono $N(t) = 0$ e $N(t) = 2.9/3.9 \approx 0.743$.

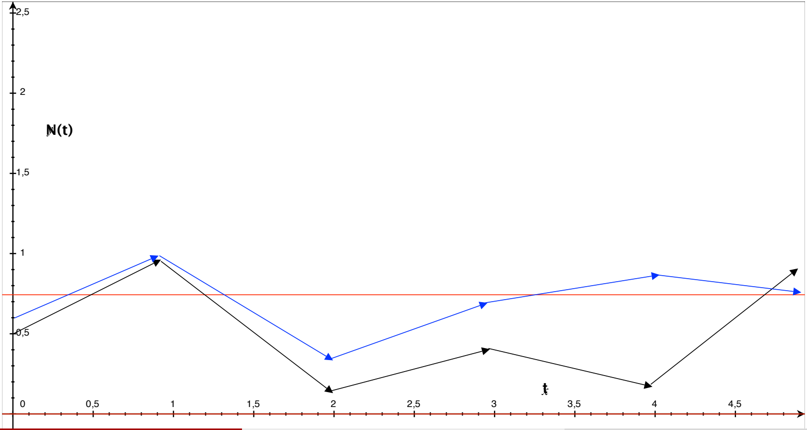
Se scegliamo come dato iniziale $N(0) = 0.5$, le prime iterate sono

$N(1) \approx 0.97$, $N(2) \approx 0.11$, $N(3) \approx 0.382$, $N(4) \approx 0.29$
$N(5) \approx 0.803$, ...

Se scegliamo invece $N(0) = 0.6$ (molto vicino a 0.5) si ha

$N(1) = 0.936$, $N(2) \approx 0.234$, $N(3) \approx 0.7$, $N(4) \approx 0.82$
$N(5) \approx 0.75$, ...

Evoluzioni con dati iniziali molto vicini non si mantengono vicine: si ha il caos.



I motivi per i quali la mappa logistica presenta comportamenti asintotici così vari dipendono, essenzialmente, dal fatto che il sistema dinamico é non lineare.

Uno studio rigoroso si trova nell'articolo di R.May

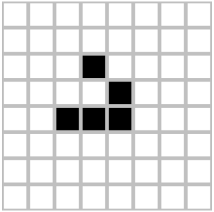
> *"Simple mathematical models with very complicated dynamics"*
> Nature vol.261 pp.459-467 (1976)

Il gioco della vita

(Una simulazione si trova al sito: http://www.bitstorm.org/gameoflife/.)

Ispirandosi alla mappa di May, negli anni '70 del Novecento il matematico inglese John Conway ha pubblicato sulla rivista Scientific American un gioco detto "gioco della vita" (in realtà un "*automa cellulare*") che presenta una grande varietà di possibili esiti.
L'obiettivo è quello di mostrare che comportamenti simili a quelli della vita possono emergere da regole semplici e dalle interazioni tra individui.
Il gioco, che ha avuto un enorme successo, è stato in particolare considerato un modello per la replicazione e l'auto organizzazione delle cellule o degli organismi.

Nel gioco della vita non ci sono giocatori, ma viene solo assegnata una serie di regole e una configurazione iniziale. In una griglia estesa indefinitamente, detta ''mondo'', alcune caselle sono occupate (la cella è **viva**) oppure vuote (la cella è **morta**).



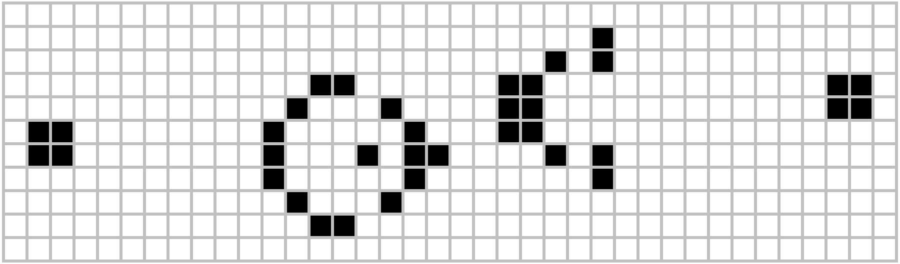
In figura 5 celle sono vive.

A tempi fissati (generazioni) la posizione di ogni cella viene aggiornata con alcune semplici regole deterministiche.

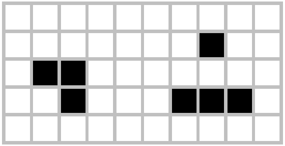
Esempio delle regole:

Ogni cella è circondata da 8 celle,
(a) una cella viva che ha meno di due celle vive vicino, muore per isolamento
(b) una cella viva con due o tre celle vive accanto sopravvive alla generazione seguente
(c) una cella viva con tre o più celle vive accanto muore per effetto della densità
(d) se ha cella vuota ha tre celle vive accanto, diventa viva per effetto della riproduzione

Anche solo provando, ci si rende conto del fatto che esistono configurazioni iniziali di ''equilibrio'' (nulla cambia). Ad esempio se consideriamo le due configurazioni alla estrema destra e alla estrema sinistra (blocchi 4x4), queste sono di equilibrio (regola (d))

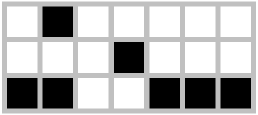


Nello schema detto "duro a morire" (diehard)



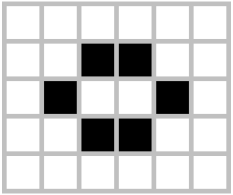
occorrono 130 generazioni prima dell'estizione totale.

Nello schema detto ”ghianda”



in 5206 generazioni nascono oscillatori periodici.

Nel gioco si riconoscono altri aspetti tipici dei comportamenti caotici. Ad esempio se nello schema di equilibrio "alveare"



riempiamo una delle due celle vuote all'interno, in 16 generazioni si formano 4 alveari disposti simmetricamente. Se invece si riempie una delle celle vuote al di sopra o al di sotto delle celle estreme piene, si ha un comportamento complicato e dopo più di 1000 generazioni osserviamo un nucleo centrale formato da numerosi alveari e da altre configurazioni che si allontanano in varie direzioni (forte dipendenza dalle condizioni iniziali)

Per concludere ci si potrebbe chiedere se *sia possibile realizzare una configurazione che si auto-replica al passare delle generazioni* (produce infinite copie di se stessa).

La prima configurazione auto-replicante è stata ottenuta nel 2013, dopo 43 anni di tentativi ed è detta **propagatore lineare**. Questa configurazione è composta di 290 096 celle piene poste in un mondo enorme di 14 826 990x14 826 908 celle.

Questo risultato suggerisce interessanti riflessioni sull'origine della vita nella realtà: è infatti opinione diffusa che la vita abbia avuto origine da alcune molecole in grado di auto replicarsi. Molecole di questo tipo devono essere state estremamente più complesse delle molecole inorganiche.

Il propagatore lineare suggerisce che per generare la vita è stato necessario un grande salto di complessità dalle molecole inorganiche ad altre in grado di compiere più sofisticate funzioni.

Il problema aperto è come questo salto sia stato possibile (ma, per ora, la risposta è al di là delle nostre possibilità).