
La stima di distanza

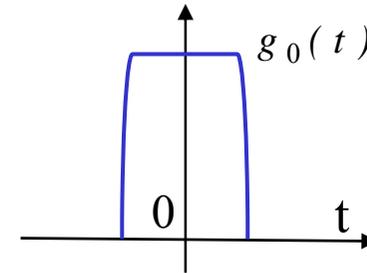
Accuratezza

Risoluzione ed accuratezza

- **Risoluzione** = rappresenta la distanza minima fra due oggetti di cui si riescono a distinguere i ritorni. La risoluzione è il parametro di interesse quando si è interessati alla rivelazione dei bersagli.
- **Accuratezza** = rappresenta la capacità di misurare con precisione la distanza di un oggetto. Il parametro rappresentativo è l'errore di stima della distanza. L'accuratezza è la qualità di interesse quando si è interessati alla misura di distanza e non alla rivelazione.

Segnali impulsivi per stima di distanza

- Si consideri di trasmettere la forma d'onda $g_0(t)$ con banda B_p
- Si assuma che il segnale trasmesso sia inviato indietro da un oggetto a distanza R (per riflessione, o ritrasmissione)
- Sia $x_0(t)$ il segnale di ritorno con:
 - ampiezza A_0 e
 - fase ϕ_0 incognita (dovuta alla propagazione)
 - ritardo $t_0 = 2R/c$ ($c =$ velocità della luce)

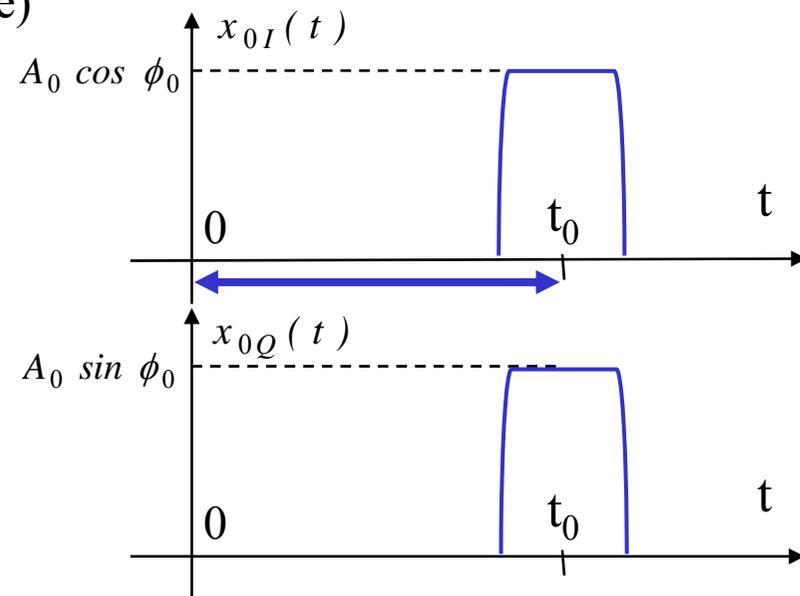


$$x_0(t) = A_0 e^{j\phi_0} g_0(t - t_0)$$

Esempio:

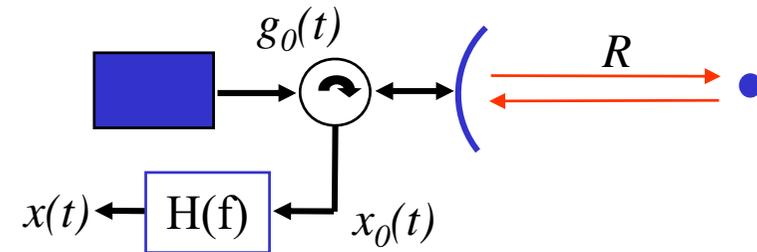
$$g_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \quad B_p = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sigma_p}$$

$$x_0(t) = A_0 e^{j\phi_0} e^{-\frac{(t-t_0)^2}{2\sigma_p^2}}$$



Filtro di ricezione

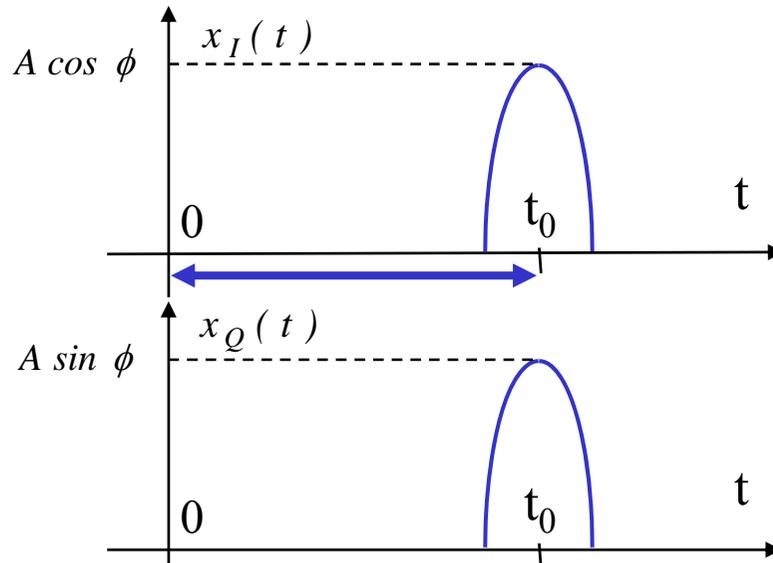
- il ricevitore può schematizzarsi come un filtro con funzione di trasferimento $H(f)$ (risposta impulsiva $h(t)$)
- in uscita dal ricevitore si ha idealmente il segnale $x(t) = x_0(t) * h(t)$



$$x(t) = x_0(t) * h(t) = A e^{j\phi} g(t - t_0)$$

con

$$g(t) = g_0(t) * h(t)$$



- il filtro è caratterizzato dalla forma di $H(f)$ e dalla sua larghezza di banda a 3 dB, B_f :
 - se $B_f < B_p$, solo una piccola parte del segnale di ritorno arriva al ricevitore. Si perde potenza trasmessa e risoluzione (mai in pratica).
 - se $B_f = B_p$, e la forma di $h(t)$ è la stessa di $g^*(-t)$, siamo nel caso di un filtro adattato.
 - se $B_f > B_p$, il segnale di ritorno non viene alterato dalla presenza del filtro.

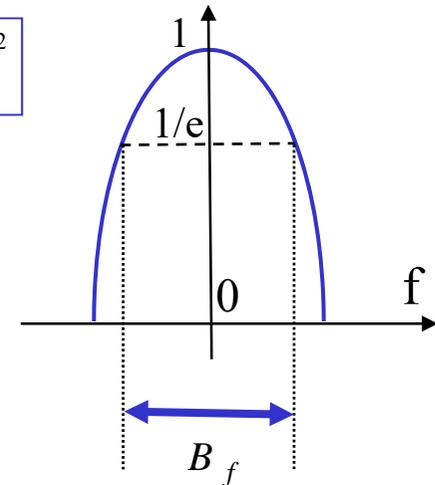
Segnali impulsivi e filtro di ricezione

Esempio:

- si usi un filtro con funzione di trasferimento
- banda a 3 dB (circa 1/e)

$$H(f) = e^{-2\pi^2 \sigma_f^2 f^2}$$

$$B_f = \frac{\sqrt{2}}{\pi \sigma_f}$$



- risposta impulsiva $h(t)$ $h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}}$

- in uscita dal ricevitore si ha idealmente il segnale $x(t) = x_0(t) * h(t)$

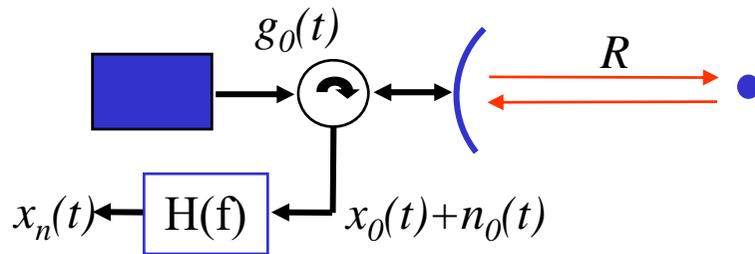
$$x(t) = x_0(t) * h(t) = A e^{j\phi} g(t - t_0)$$

$$G(f) = G_0(f) \cdot H(f) = \sqrt{2\pi \sigma_p^2} e^{-2\pi \sigma_p^2 f^2} e^{-2\pi \sigma_f^2 f^2} = \sqrt{2\pi \sigma_p^2} e^{-2\pi(\sigma_p^2 + \sigma_f^2) f^2}$$



$$g(t) = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)}}$$

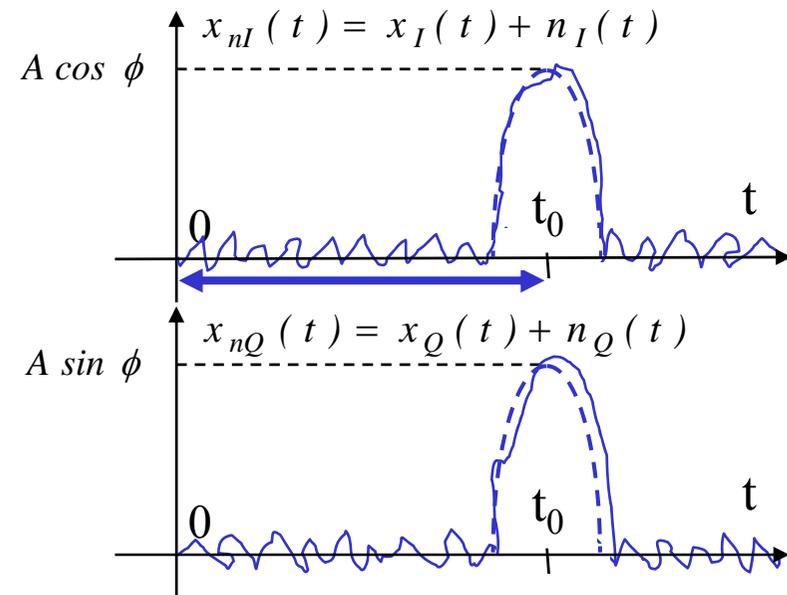
Rumore termico



$$x_n(t) = x(t) + n(t)$$

$$x_n(t) = A e^{j\phi} g(t - t_0) + n(t)$$

- In antenna e nei primi stadi di amplificazione si genera la componente dominante di rumore termico
- quindi, in pratica, si usa una misura del segnale $x_n(t)$, affetta da rumore termico
- il rumore termico ha valore medio nullo sulle componenti I e Q
- Il rumore termico $n_0(t)$ in ingresso al ricevitore ha spettro di densità di potenza costante e pari ad N_0
- il rumore termico $n(t)$ in uscita al ricevitore ha spettro di densità di potenza $S_n(f) = N_0 |H(f)|^2$ e potenza totale $\sigma_n^2 = N_0 B_n$, con $B_n =$ banda di rumore

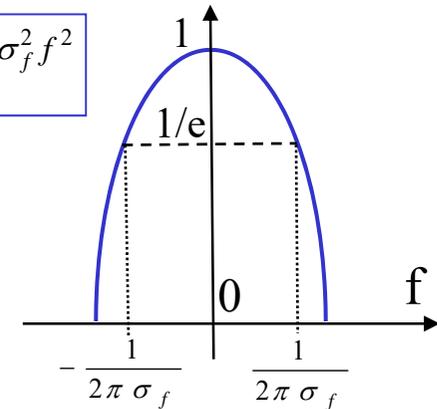


Caratteristiche del rumore termico

Esempio:

- si usi un filtro con funzione di trasferimento
- Potenza di rumore termico:

$$|H(f)|^2 = e^{-4\pi^2\sigma_f^2 f^2}$$



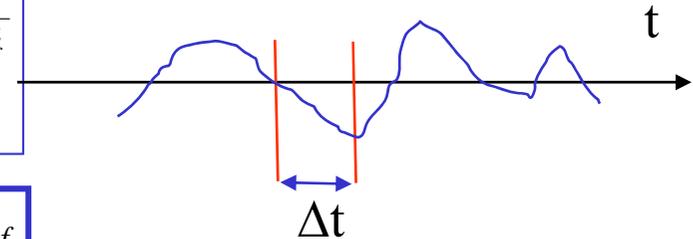
$$\sigma_n^2 = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2\sigma_f^2 f^2} df = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi}\sigma_f} = N_0 B_n$$

- banda equivalente di rumore termico

$$B_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sigma_f}$$

- Autocorrelazione del rumore termico

$$R_{nn}(t) = \mathfrak{T}^{-1}\{S_n(f)\} = N_0 \mathfrak{T}^{-1}\{|H(f)|^2\} = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi}\sigma_f} e^{-\frac{t^2}{4\sigma_f^2}}$$



Tempo di decorrelazione (1/e)

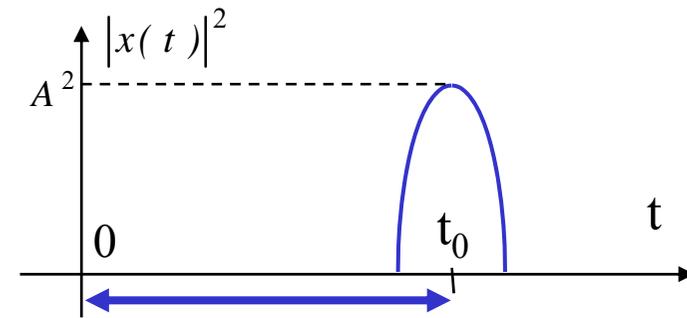
$$\Delta t = 2\sigma_f$$

Misura del tempo di arrivo

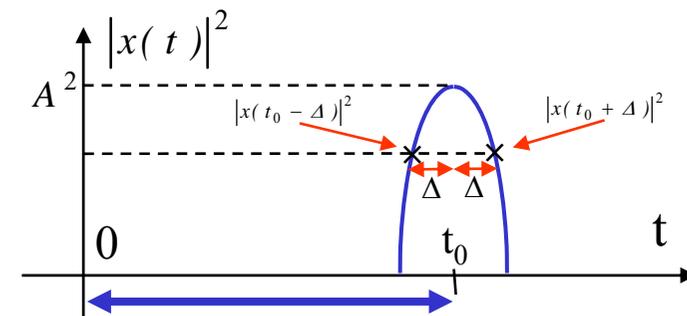
- In assenza di rumore, la misura del tempo di arrivo si può ottenere misurando l'istante di tempo in cui la potenza istantanea del segnale di ritorno presenta il massimo
- il massimo si ottiene quando si annulla la derivata
- usando una forma d'onda simmetrica, si può ottenere una stima annullando una differenza finita:

$$t_0 \text{ tale che } \frac{|x(t_0 + \Delta)|^2 - |x(t_0 - \Delta)|^2}{2\Delta} = 0$$

- Si noti che, facendo tendere Δ a zero, questa è esattamente la derivata. Dunque la espressione di sopra contiene anche la derivata come caso limite.



$$t_0 = \arg \max_t \{ |x(t)|^2 \}$$

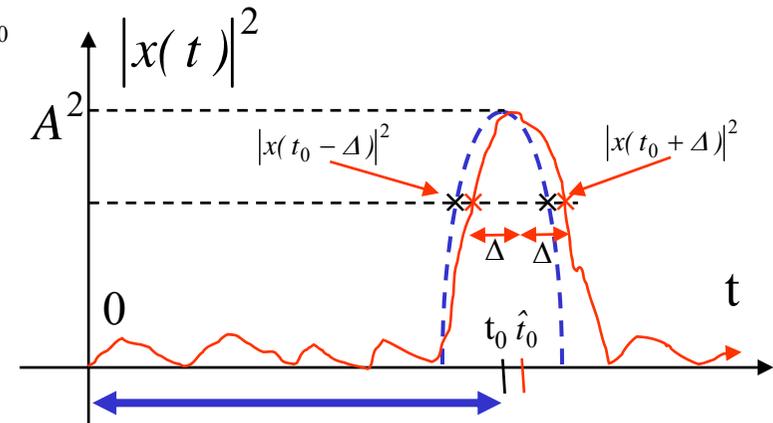


Stima del tempo di arrivo

- In presenza di rumore, la stima del tempo di arrivo \hat{t}_0 si può ottenere misurando l'istante di tempo in cui :

$$\frac{|x_n(\hat{t}_0 + \Delta)|^2 - |x_n(\hat{t}_0 - \Delta)|^2}{2\Delta} = 0$$

- Vogliamo ricavare l'errore di stima $\delta t = \hat{t}_0 - t_0$



- Assumendo errore di stima δt piccolo, e rumore $|n(t)|^2$ piccolo, si sviluppa al primo ordine:

$$|x_n(t)|^2 = |A_0 e^{j\phi_0} g(t-t_0) + n(t)|^2 = A_0^2 |g(t-t_0)|^2 + |n(t)|^2 + 2A_0 \operatorname{Re}\{e^{j\phi_0} g(t-t_0) n^*(t)\}$$

$$|x_n(\hat{t}_0 + \Delta)|^2 = A_0^2 |g(\delta t + \Delta)|^2 + |n(\hat{t}_0 + \Delta)|^2 + 2A_0 \operatorname{Re}\{e^{j\phi_0} g(\delta t + \Delta) n^*(\hat{t}_0 + \Delta)\} =$$

$$\cong A_0^2 |g(\Delta)|^2 + A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta} \delta t + 2A_0 \operatorname{Re}\{e^{j\phi_0} g(\Delta) n^*(\hat{t}_0 + \Delta)\} =$$

$$\cong A_0^2 |g(\Delta)|^2 + A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta} \delta t + 2A_0 |g(\Delta)| n_R'(t_0 + \Delta)$$

Radiotecnica e Radiolocalizzazione

Sviluppo al I° ordine :

Si trascura termine quadratico nel rumore $|n(t)|^2$ e termini misti in δt e $n(t)$.

Errore di stima del tempo di arrivo (I)

- sviluppando la differenza in presenza di rumore si ha:

$$\begin{aligned}
 & |x_n(\hat{t}_0 + \Delta)|^2 - |x_n(\hat{t}_0 - \Delta)|^2 = \\
 & \cong A_0^2 |g(\Delta)|^2 + A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta} \delta\hat{t} + 2 A_0 |g(\Delta)| n_R'(t_0 + \Delta) - A_0^2 |g(-\Delta)|^2 - A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=-\Delta} \delta\hat{t} - 2 A_0 |g(-\Delta)| n_R'(t_0 - \Delta) = \\
 & = A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta} \delta\hat{t} + 2 A_0 |g(\Delta)| n_R'(t_0 + \Delta) - A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=-\Delta} \delta\hat{t} - 2 A_0 |g(-\Delta)| n_R'(t_0 - \Delta) = \\
 & = 2 A_0^2 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta} \delta\hat{t} + 2 A_0 |g(\Delta)| [n_R'(t_0 + \Delta) - n_R'(t_0 - \Delta)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta\hat{t} = \frac{|g(\Delta)|}{A_0 \frac{\partial |g(t)|^2}{\partial t} \Big|_{t=\Delta}} [n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta)]} \\
 & \delta\hat{t} = \frac{|g(\Delta)|}{A_0 2 |g(\Delta)| \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \Big|_{t=\Delta}} [n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta)] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta\hat{t} = \frac{1}{2 A_0 \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \Big|_{t=\Delta}} [n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta)]}
 \end{aligned}$$

Errore di stima del tempo di arrivo (II)

- effettuando il valore atteso dei due membri della equazione:

Valore atteso dell'errore

$$\langle \delta t \rangle = \frac{1}{2A_0 \left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta}} [\langle n_R'(t_0 - \Delta) \rangle - \langle n_R'(t_0 + \Delta) \rangle] = 0$$

Stima non polarizzata

Varianza dell'errore

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} \langle [n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta)]^2 \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle [n_R'(t_0 - \Delta) - n_R'(t_0 + \Delta)]^2 \rangle &= \\ &= \langle n_R'^2(t_0 - \Delta) \rangle + \langle n_R'^2(t_0 + \Delta) \rangle - 2\langle n_R'(t_0 - \Delta)n_R'(t_0 + \Delta) \rangle = \\ &= 2\sigma_{n_R}^2 - 2R_{n_R}(2\Delta) = \sigma_n^2 - R_n(2\Delta) = \sigma_n^2[1 - \rho_n(2\Delta)] \end{aligned}$$

Coefficiente di correlazione

$$\rho_n(\tau) = \frac{R_n(\tau)}{\sigma_n^2}$$

Ricordando

$$\begin{aligned} R_{nn}(\tau) &= \langle [n_R(t) + jn_I(t)][n_R(t+\tau) - jn_I(t+\tau)] \rangle = \\ &= \langle n_R(t)n_R(t+\tau) \rangle + \langle n_I(t)n_I(t+\tau) \rangle + j\langle n_I(t)n_R(t+\tau) \rangle - j\langle n_R(t)n_I(t+\tau) \rangle = \\ &= R_{n_R n_R}(\tau) + R_{n_I n_I}(\tau) + 0 = 2R_{n_R n_R}(\tau) \end{aligned}$$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} \sigma_n^2 [1 - \rho_n(2\Delta)]$$

Errore di stima del tempo di arrivo (III)

- sviluppando la differenza in presenza di rumore si ha:

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1}{4A_0^2 \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} \sigma_n^2 [1 - \rho_n(2\Delta)] = \frac{1}{4 \frac{A_0^2}{\sigma_n^2} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} [1 - \rho_n(2\Delta)]$$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1 - \rho_n(2\Delta)}{4 \text{SNR} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2}$$

- l'errore di stima diminuisce:
 - all'aumentare del SNR
 - all'aumentare della derivata del segnale nel punto usato Δ
 - leggera dipendenza da Δ anche per il numeratore

Nota: per $\Delta=0$ sia numeratore che denominatore si annullano e tutto dipende dalla velocità con cui vanno a zero

Errore di stima del tempo di arrivo (IV)

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1 - \rho_n(2\Delta)}{4 \text{SNR} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2}$$

- H(f) a banda larga ($B_f \gg B_p$, $B_n \gg B_p$):
 - banda di rumore B_n grande \Rightarrow SNR piccolo
 - assumendo che $\Delta \leq 2/B_p \Rightarrow \Delta \gg 1/B_f \Rightarrow \rho_n(2\Delta) \approx 0$
 - $g(t)$ è quasi identico a $g_0(t)$ (quasi inalterato dal filtro)
 - il valore ottimo di Δ dipende solo dalla derivata del segnale
- H(f) = filtro adattato ($B_f = B_p$):
 - SNR massimo possibile (per definizione)
 - $\rho_n(\tau)$ circa si dimezza in $1/B_p \Rightarrow \Delta \gg 1/B_f \Rightarrow \approx 0$
 - $g(t)$ è pari all'autocorrelazione di $g_0(t)$
 - il valore ottimo di Δ dipende sia dalla derivata del segnale, sia dalla decorrelazione del rumore

Esempi di varianza di stima (I)

$$|H(f)|^2 = e^{-4\pi^2 \sigma_f^2 f^2} \quad B_n = \frac{1}{2\sqrt{\pi} \sigma_f} \quad R_{nn}(t) = N_0 B_n e^{-\frac{t^2}{4\sigma_f^2}}$$

$$g_0(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}} \quad g(t) = \frac{\sigma_p}{\sqrt{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)}} \quad \frac{\partial g(t)}{\partial t} = \frac{-\sigma_p t}{(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)^{3/2}} e^{-\frac{t^2}{2(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)}}$$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1 - \rho_n(2\Delta)}{4 \text{SNR} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4 \frac{A_0^2}{N_0 B_n} \frac{\sigma_p^2 \Delta^2}{(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)^3} e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}}}$$

Esempi di varianza di stima (II)

- H(f) a banda larga ($B_f \gg B_p$, $\sigma_f \ll \sigma_p$):

- banda di rumore B_n grande \Rightarrow SNR piccolo
- assumendo che $\Delta \leq 2/B_p \Rightarrow \Delta \gg 1/B_f \Rightarrow \rho_n(2\Delta) \approx 0$
- $g(t)$ è quasi identico a $g_0(t)$ (quasi inalterato dal filtro): $\sigma_p^2 + \sigma_f^2 \approx \sigma_p^2$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1 - \rho_n(2\Delta)}{4 \text{SNR} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4 \frac{A_0^2}{N_0 B_n} \frac{\sigma_p^2 \Delta^2}{(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)^3} e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}}} \approx \frac{\sigma_p^2}{4 \frac{A_0^2}{N_0 B_n} \frac{\Delta^2}{\sigma_p^2} e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}}}$$

- il valore ottimo di Δ dipende solo dalla derivata del segnale:
usando $z = \Delta^2 / \sigma_p^2$, a denominatore si ha $z e^{-z}$

$$\frac{\partial}{\partial z} [z e^{-z}] = e^{-z} - z e^{-z} = e^{-z} [1 - z] = 0$$

Valore ottimo $z=1$ cioè

$$\Delta = \sigma_p$$



$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{e \sigma_p^2}{4 \text{SNR}^{(f)}}$$

Esempi di varianza di stima (III)

- H(f) = filtro adattato ($B_f = B_p$, $\sigma_f = \sigma_p$):

- SNR massimo possibile (per definizione)
- $\rho_n(\tau)$ circa si dimezza in $1/B_p \Rightarrow \Delta \gg 1/B_f \Rightarrow \approx 0$
- $g(t)$ è pari all'autocorrelazione di $g_0(t)$ $\sigma_p^2 + \sigma_f^2 = 2\sigma_p^2$

$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{1 - \rho_n(2\Delta)}{4 \text{SNR} \left(\left. \frac{\partial |g(t)|}{\partial t} \right|_{t=\Delta} \right)^2} = \frac{1 - e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_f^2}}}{4 \frac{A_0^2}{N_0 B_n} \frac{\sigma_p^2 \Delta^2}{(\sigma_p^2 + \sigma_f^2)^3} e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2 + \sigma_f^2}}} = \frac{2\sigma_p^2 [1 - e^{-\frac{\Delta^2}{\sigma_p^2}}]}{\frac{A_0^2}{N_0 B_n} \frac{\Delta^2}{\sigma_p^2} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_p^2}}}$$

- il valore ottimo di Δ dipende sia dalla derivata del segnale, sia dalla decorrelazione del rumore

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1 - e^{-z}}{z e^{-\frac{z}{2}}} \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{z} \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}} \right) \right] = -\frac{1}{z^2} \left(e^{\frac{z}{2}} - e^{-\frac{z}{2}} \right) + \frac{1}{2z} \left(e^{\frac{z}{2}} + e^{-\frac{z}{2}} \right) = \frac{1}{2z^2} e^{-\frac{z}{2}} [-2e^z + 2 + ze^z + z] = 0$$

$$e^z [2 - z] = 2 + z$$

$$e^z = \frac{2 + z}{2 - z}$$

$$z = 0$$

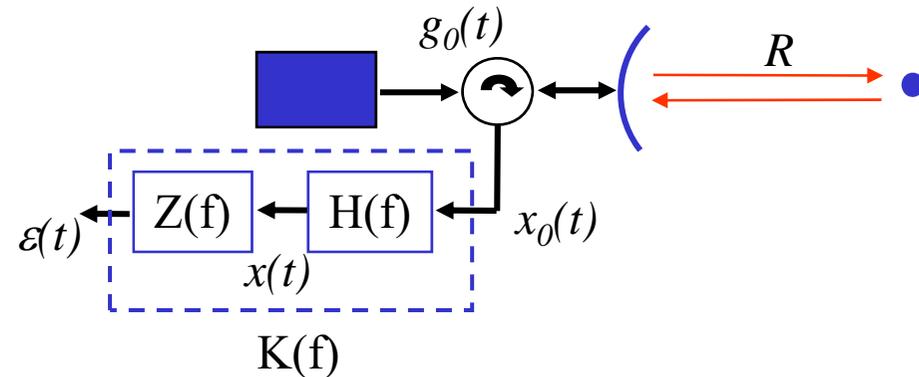
$$\langle \delta t^2 \rangle = \frac{2\sigma_p^2}{\text{SNR}^{(p)}}$$

Interpretazione/Implementazione (I)

- la stima di t_0 consiste nel trovare il valore di t tale che $\varepsilon(t)=0$

$$z(t) = \frac{1}{2\Delta} u_0(t + \Delta) - \frac{1}{2\Delta} u_0(t - \Delta)$$

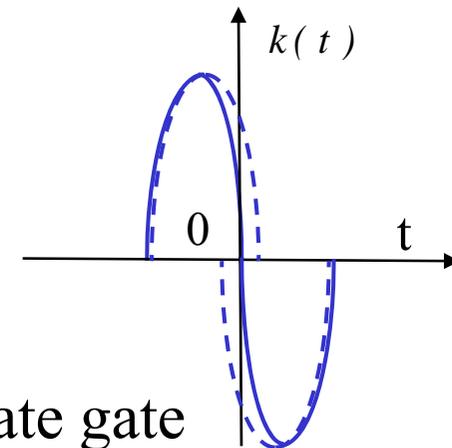
$$Z(f) = 2j \frac{\sin(2\pi f \Delta)}{2\Delta}$$



$$k(t) = z(t) * h(t) = \frac{1}{2\Delta} h(t + \Delta) - \frac{1}{2\Delta} h(t - \Delta)$$

$$K(f) = 2j \frac{\sin(2\pi f \Delta)}{2\Delta} H(f)$$

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}} \quad \rightarrow \quad h(t) = \frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{(t+\Delta)^2}{2\sigma_f^2}} - \frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{(t-\Delta)^2}{2\sigma_f^2}} = \\
 &= \frac{1}{2\Delta\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_f^2}} \left[e^{\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}} - e^{-\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}} \right] e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}} = \\
 &= -\frac{1}{\Delta} \sinh\left(\frac{\Delta t}{\sigma_f^2}\right) e^{-\frac{\Delta^2}{2\sigma_f^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_f^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_f^2}}
 \end{aligned}$$



Early-Late gate

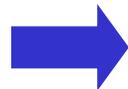
Interpretazione/Implementazione (II)

- condizione ottima per filtro adattato:

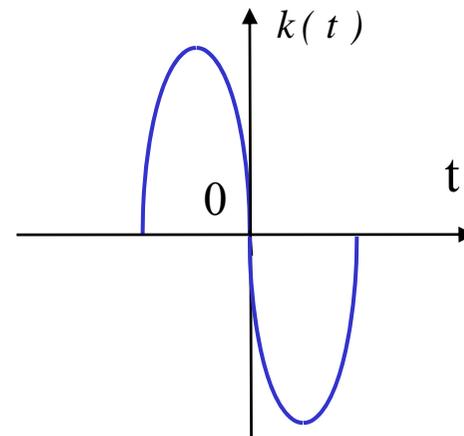
- per $\Delta \rightarrow 0$ $\lim_{\Delta \rightarrow 0} K(f) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} 2j \frac{\sin(2\pi f \Delta)}{2\Delta} H(f) = j 2\pi f H(f)$

$$k(t) = \frac{\partial}{\partial t} h(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}$$



$$k(t) = \frac{-t}{\sigma_p^2 \sqrt{2\pi\sigma_p^2}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma_p^2}}$$



Early-Late gate