
Accuratezza della Radiolocalizzazione satellitare

Accuratezza dei GNSS

- **UERE (User Equivalent Range Error):** è una misura dell'errore nelle misure di distanza da ogni satellite, da parte del ricevitore.
- **UERE = URE + UEE**
 - URE (User Range Error) è la porzione dell'UERE allocata a Space segment e Control segment.
 - UEE (User Equipment Error) è la porzione dell'UERE allocata all'utente.
 - **Perciò, l'accuratezza di misura del ricevitore deve essere nota per poter porre condizioni sull'URE.**
 - L'accuratezza di posizionamento dinamico deve anche tenere in conto l'effetto del moto del veicolo.

Error budget (PPS)

Segmento originatore	Sorgente di errore	errore ad 1σ per il GPS (m)
<i>Space</i>	stabilità del clock	3.0
	predicibilità delle perturbazioni del satellite	1.0
	altro (radiazioni termiche, ecc...)	0.5
<i>Control</i>	errore di predizione delle effemeridi	4.2
	altro (prestazioni dei vettori)	0.9
<i>User</i>	ritardo ionosferico	2.3
	ritardo troposferico	2.0
	rumore del ricevitore e risoluzione	1.5
	multipath	1.2
	altro (disturbi intercanale)	0.5
<i>System UERE</i>	RMS totale	6.6

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_N$$

$$E\{\varepsilon_1\} = 0 \quad E\{\varepsilon_1^2\} = \sigma_1^2$$

$$E\{\varepsilon_2\} = 0 \quad E\{\varepsilon_2^2\} = \sigma_2^2$$

~~$$E\{\varepsilon\} = E\{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_N\} = E\{\varepsilon_1\} + E\{\varepsilon_2\} + \dots + E\{\varepsilon_N\}$$~~

~~$$E\{\varepsilon^2\} = E\{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_N)^2\} =$$

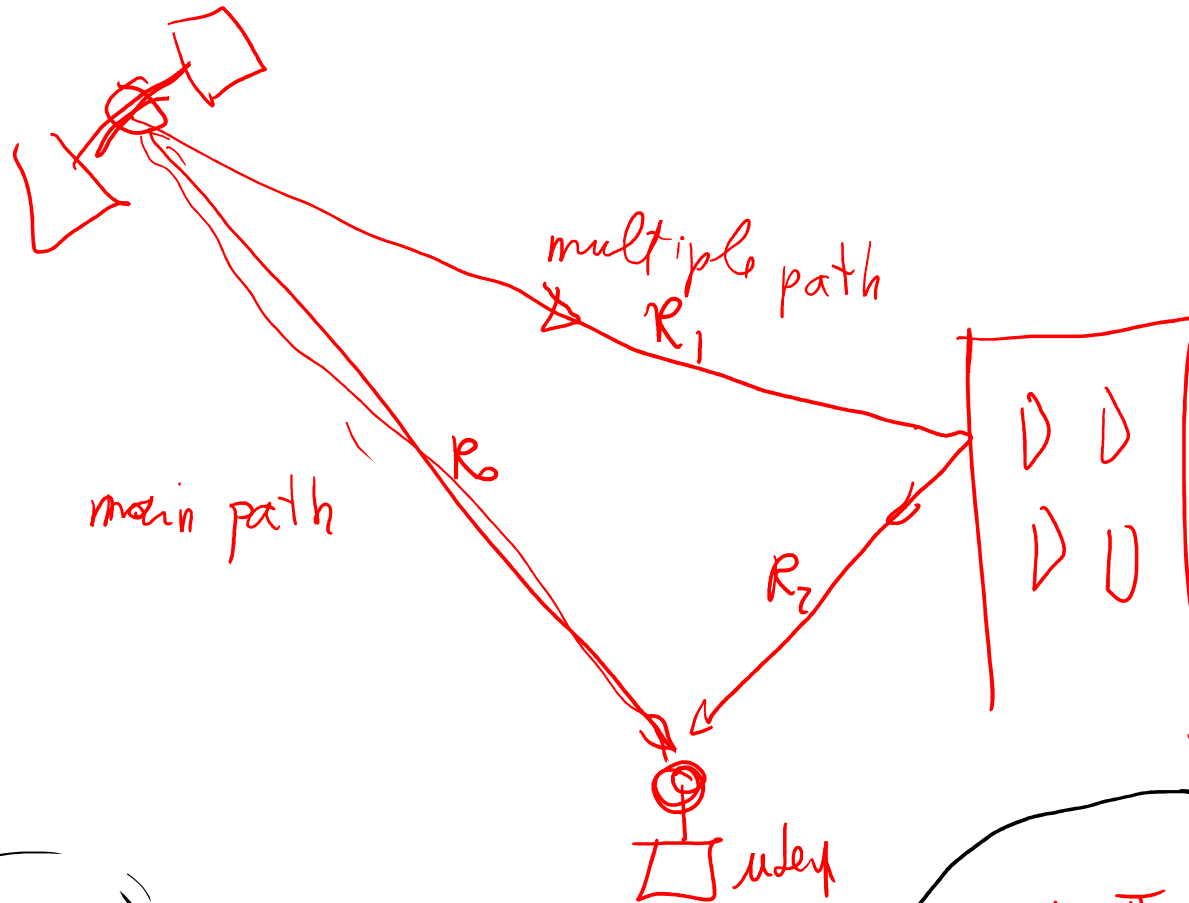
$$= E\{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_N^2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\varepsilon_3 + \dots + 2\varepsilon_1\varepsilon_N + \dots\}$$

$$= \boxed{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_N^2} + \underbrace{2E\{\varepsilon_1\varepsilon_2\}}_{= 0} + \dots + \dots$$~~

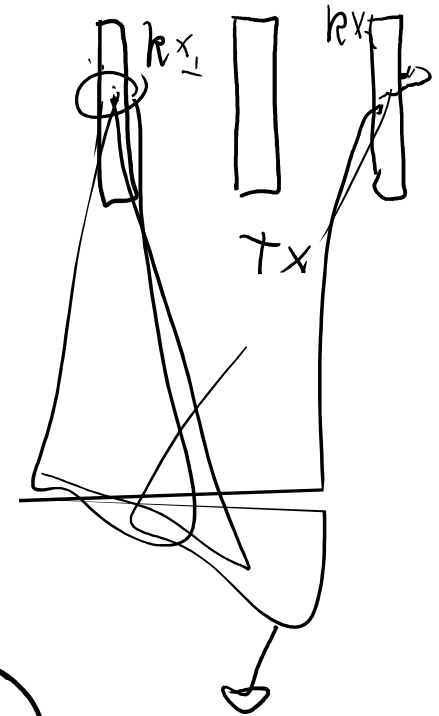
Error budget (SPS)

Segmento originatore	Sorgente di errore	errore ad 1σ con SA	per il GPS (m) senza SA
<i>Space</i>	stabilità del clock	3.0	3.0
	predicibilità delle perturbazioni del satellite	1.0	1.0
	disponibilità selettiva	32.3	-
	altro (radiazioni termiche, ecc...)	0.5	0.5
<i>Control</i>	errore di predizione delle effemeridi	4.2	4.2
	altro (prestazioni dei vettori)	0.9	0.9
<i>User</i>	ritardo ionosferico	5.0	5.0
	ritardo troposferico	1.5	1.5
	rumore del ricevitore e risoluzione	1.5	1.5
	multipath	2.5	2.5
	altro (disturbi intercanale)	0.5	0.5
<i>System UERE</i>	RMS totale	33.3	8.0

$$R_1 + R_2 - R_0 = \delta$$

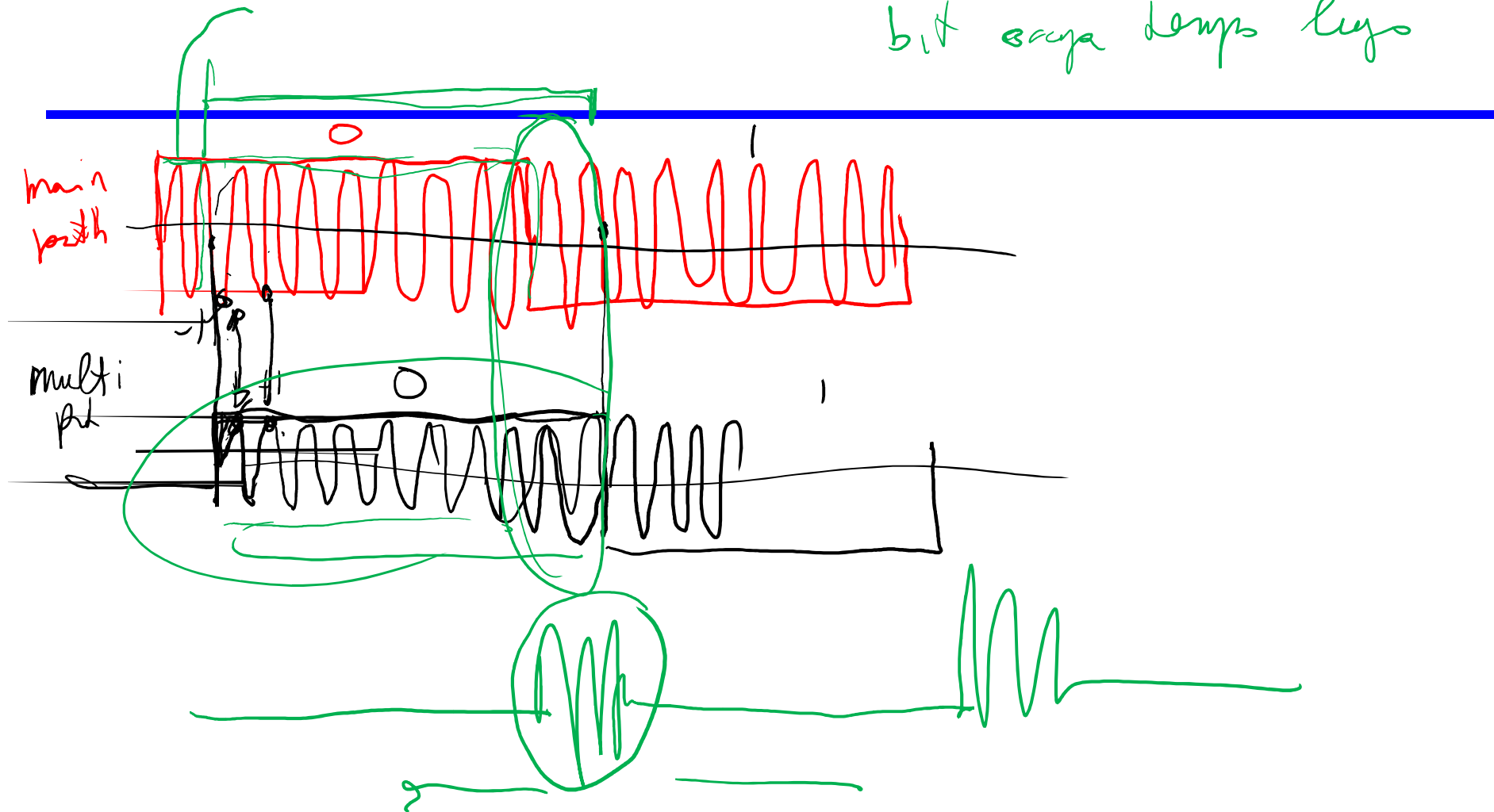


$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}$$



$$A_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_0} + A_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (R_1 + R_2)} = A_0 e^{j \frac{2\pi}{\lambda} R_0} \left[1 + e^{j \frac{2\pi}{\lambda} (R_1 + R_2 - R_0)} \right]$$

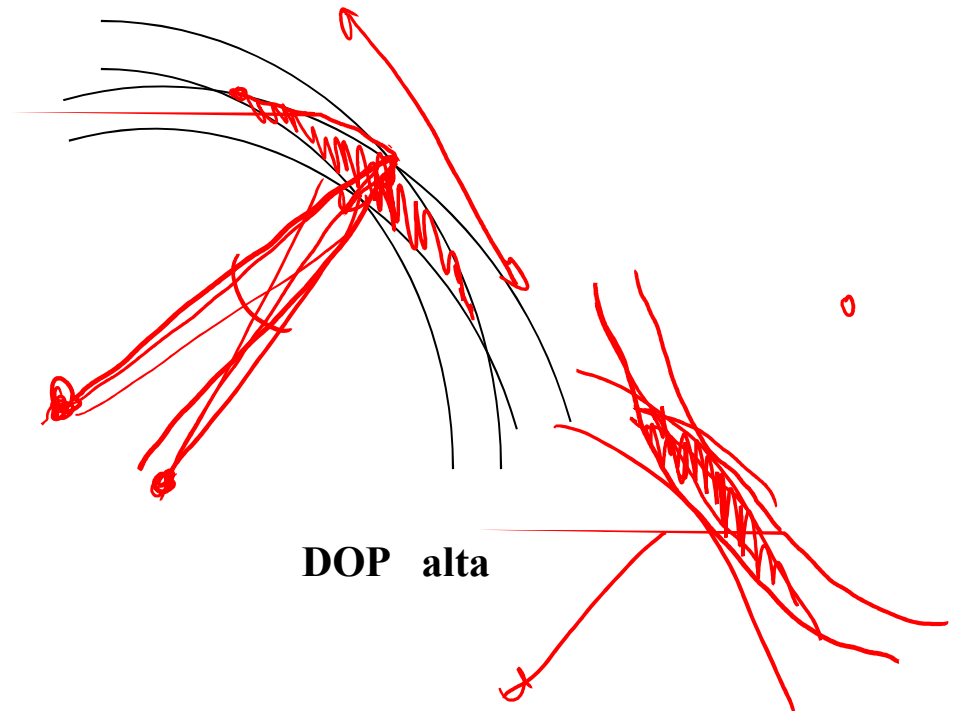
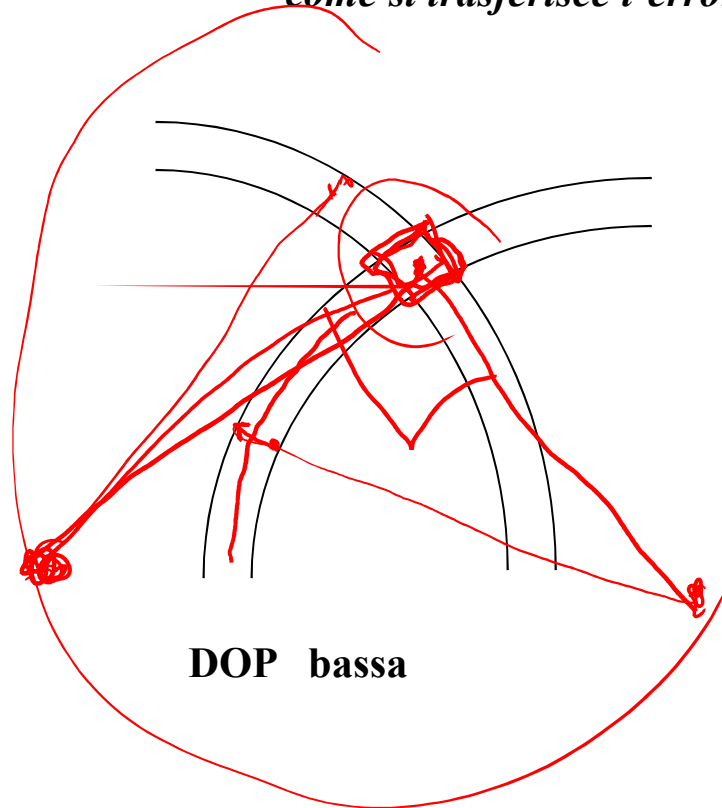
bit error tempo lungo



GDOP - Geometric Dilution of Precision (D)

- effetto della geometria dei satelliti sulla accuratezza:

- come si trasferisce l'errore sugli pseudorange in errore di posizione



Espressione dell'accuratezza dei GNSS

$$\text{ERRORE DI POSIZIONE} = \underline{\text{PDOP}} \times \underline{\text{UERE}}$$

- Dipende dalla Geometria

Dila

-Dipende dagli errori su
posizione del satellite,
propagazione, e strumentazione

Equazioni degli pseudorange (I)

- Assumendo la sola presenza di errore dell'orologio del ricevitore, si possono scrivere le seguenti equazioni per gli pseudorange:

$$\begin{aligned}
 r_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} = \rho_1 - c \cdot t_u \\
 r_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} = \rho_2 - c \cdot t_u \\
 &\vdots \\
 r_N &= \sqrt{(x_N - x_u)^2 + (y_N - y_u)^2 + (z_N - z_u)^2} = \rho_N - c \cdot t_u
 \end{aligned}$$

- Per $N \geq 4$ satelliti in vista il sistema di N equazioni nonlineari in 4 incognite può avere soluzione

- Per trovare la soluzione, si parte da

- una stima iniziale della posizione dell'utente $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u]^T$
- una stima iniziale del ritardo dell'orologio del RX \hat{t}_u

e si linearizza il sistema nel loro intorno:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \quad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u$$

Equazioni degli pseudorange (II)

- la singola equazione $\sqrt{(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2 + (z_j - z_u)^2} + c \cdot t_u = \rho_j$

può essere linearizzata intorno alle stime iniziali come

$$\sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2} + \begin{bmatrix} \frac{\partial r_j}{\partial x_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial y_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial z_u} \end{bmatrix}_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} + c \cdot \hat{t}_u + c \cdot \Delta t_u = \rho_j$$

- dunque

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_j}{\partial x_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial y_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial z_u} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2}$$

- ed infine

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial r_j}{\partial x_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial y_u} \\ \frac{\partial r_j}{\partial z_u} \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|$$

Equazioni degli pseudorange (III)

- per le derivate si procede come segue:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial r_j}{\partial x_u} \right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} &= \frac{\partial}{\partial x_u} \sqrt{(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2 + (z_j - z_u)^2} \Big|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} = \\ &= - \frac{2(x_j - \hat{x}_u)}{2\sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2}} = - \frac{x_j - \hat{x}_u}{\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|} \end{aligned}$$

• dunque

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial r_j}{\partial x_u} \right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} &= - \frac{x_j - \hat{x}_u}{\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|} = -a_{xj} \\ \left. \frac{\partial r_j}{\partial y_u} \right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} &= - \frac{y_j - \hat{y}_u}{\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|} = -a_{yj} \\ \left. \frac{\partial r_j}{\partial z_u} \right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} &= - \frac{z_j - \hat{z}_u}{\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|} = -a_{zj} \end{aligned}$$

- dove a_{xj} , a_{yj} , a_{zj} sono i coseni direttori del vettore che dalla posizione RX approssimata punta lo SV

Equazioni degli pseudorange (IV)

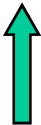
- la singola equazione linearizzata può risciversi:

$$\begin{bmatrix} -a_{xj} & -a_{yj} & -a_{zj} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\|$$

- ed infine

$$\begin{bmatrix} a_{xj} & a_{yj} & a_{zj} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_j$$


 $\Delta \mathbf{x}$


 $\Delta \rho_j$

Equazioni degli pseudorange (V)

- definendo la matrice dei coseni direttori \mathbf{H} ($N \times 4$) :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & 1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xN} & a_{yN} & a_{zN} & 1 \end{bmatrix}$$

- ed il vettore

$$\Delta \rho = \begin{bmatrix} \Delta \rho_1 \\ \Delta \rho_2 \\ \vdots \\ \Delta \rho_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_1 \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_N - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_N \end{bmatrix}$$

- si ha

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta \rho$$

$$(\mathbf{N} \times 4) \quad (4 \times 1) \quad (\mathbf{N} \times 1)$$

Soluzione equazioni degli pseudorange

- Per $N=4$, la matrice \mathbf{H} è quadrata (4×4) e può essere invertita

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \Delta \boldsymbol{\rho}$$

- per $N > 4$, la matrice non è quadrata e ci sono più equazioni che incognite.
- Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per \mathbf{H}^T , si ha

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{x} = \mathbf{H}^T \Delta \boldsymbol{\rho}$$

- $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ è quadrata ed invertibile, dunque si può scrivere (pseudoinversa di \mathbf{H})

$$\Delta \mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \Delta \boldsymbol{\rho}$$

- Ne segue che la stima di posizione e ritardo del clock è

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \quad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u$$

GDOP - Geometric Dilution of Precision (II)

$$\underline{E\{\delta x\}} = \underline{E\left\{ \left(H^T H \right)^{-1} H^T \delta \rho \right\}} = \left(H^T H \right)^{-1} H^T \underline{E\{\delta \rho\}}$$

- ricordiamo che la posizione Δx (4x1) (rispetto a punto iniziale) è la soluzione del sistema

$$\mathbf{H} \cdot \Delta \mathbf{x} = \Delta \rho$$

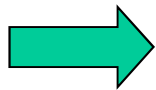
con differenza fra pseudorange misurati e predetti $\Delta \rho$ (Nx1)

e matrice dei coseni direttori \mathbf{H} (Nx4):

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & 1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xN} & a_{yN} & a_{zN} & 1 \end{bmatrix}$$

quindi

$$\Delta \mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \Delta \rho$$



se c'è un errore $\delta \rho$ sugli pseudorange, si ha $\Delta \rho + \delta \rho$ invece di $\Delta \rho$

$$\Delta \mathbf{x} + \delta \mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \left(\Delta \rho + \delta \rho \right)$$

l'errore sulla posizione è

$$\delta \mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \delta \rho$$

GDOP - Geometric Dilution of Precision (III)

$$\begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ c\delta t_u \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \delta_z \\ c\delta t_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_x^2 & \delta_x\delta_y & \delta_x\delta_z & \delta_x c\delta t_u \\ \delta_y\delta_x & \delta_y^2 & \delta_y\delta_z & \delta_y c\delta t_u \\ \delta_z\delta_x & \delta_z\delta_y & \delta_z^2 & \delta_z c\delta t_u \\ c\delta t_u\delta_x & c\delta t_u\delta_y & c\delta t_u\delta_z & c^2\delta t_u^2 \end{bmatrix}$$

- matrice di covarianza dell'errore di posizione $\delta \mathbf{x}$

$$\text{cov}(\delta \mathbf{x}) = E \{ \delta \mathbf{x} \delta \mathbf{x}^T \} = E \{ (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \delta \boldsymbol{\rho} \delta \boldsymbol{\rho}^T \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \}$$

$$\text{cov}(\delta \mathbf{x}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T E \{ \delta \boldsymbol{\rho} \delta \boldsymbol{\rho}^T \} \mathbf{H} (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}$$

$$E \{ \delta \boldsymbol{\rho}_i \delta \boldsymbol{\rho}_j \}$$

$$E \{ \delta \boldsymbol{\rho} \delta \boldsymbol{\rho}^T \} = \sigma_{UERE}^2 \mathbf{I}_N$$

- assumendo un errore indipendente ed identicamente distribuito sugli pseudorange:

$$\text{cov}(\delta \mathbf{x}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma_{UERE}^2$$

GDOP - Geometric Dilution of Precision (IV)

- matrice di covarianza dell'errore di posizione $\delta \mathbf{x}$

$$\text{cov}(\delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \sigma_{x_u}^2 & \sigma_{x_u y_u} & \sigma_{x_u z_u} & \sigma_{x_u ct_u} \\ \sigma_{x_u y_u} & \sigma_{y_u}^2 & \sigma_{y_u z_u} & \sigma_{y_u ct_u} \\ \sigma_{x_u z_u} & \sigma_{y_u z_u} & \sigma_{z_u}^2 & \sigma_{z_u ct_u} \\ \sigma_{x_u ct_u} & \sigma_{y_u ct_u} & \sigma_{z_u ct_u} & \sigma_{ct_u}^2 \end{bmatrix}$$

- la differenza è solo in un fattore di scala

$$\text{cov}(\delta \mathbf{x}) = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \sigma_{UERE}^2$$

$$(\mathbf{H} \mathbf{H}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix}$$

GDOP - Geometric Dilution of Precision (V)

- parametri

$$GDOP = \sqrt{D_{11} + D_{22} + D_{33} + D_{44}}$$

$$PDOP = \sqrt{D_{11} + D_{22} + D_{33}}$$

$$HDOP = \sqrt{D_{11} + D_{22}}$$

$$VDOP = \sqrt{D_{33}}$$

$$TDOP = \sqrt{D_{44}} / c$$

- definito in modo tale che

$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2 + \sigma_{z_u}^2 + \sigma_{ct_u}^2} = GDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

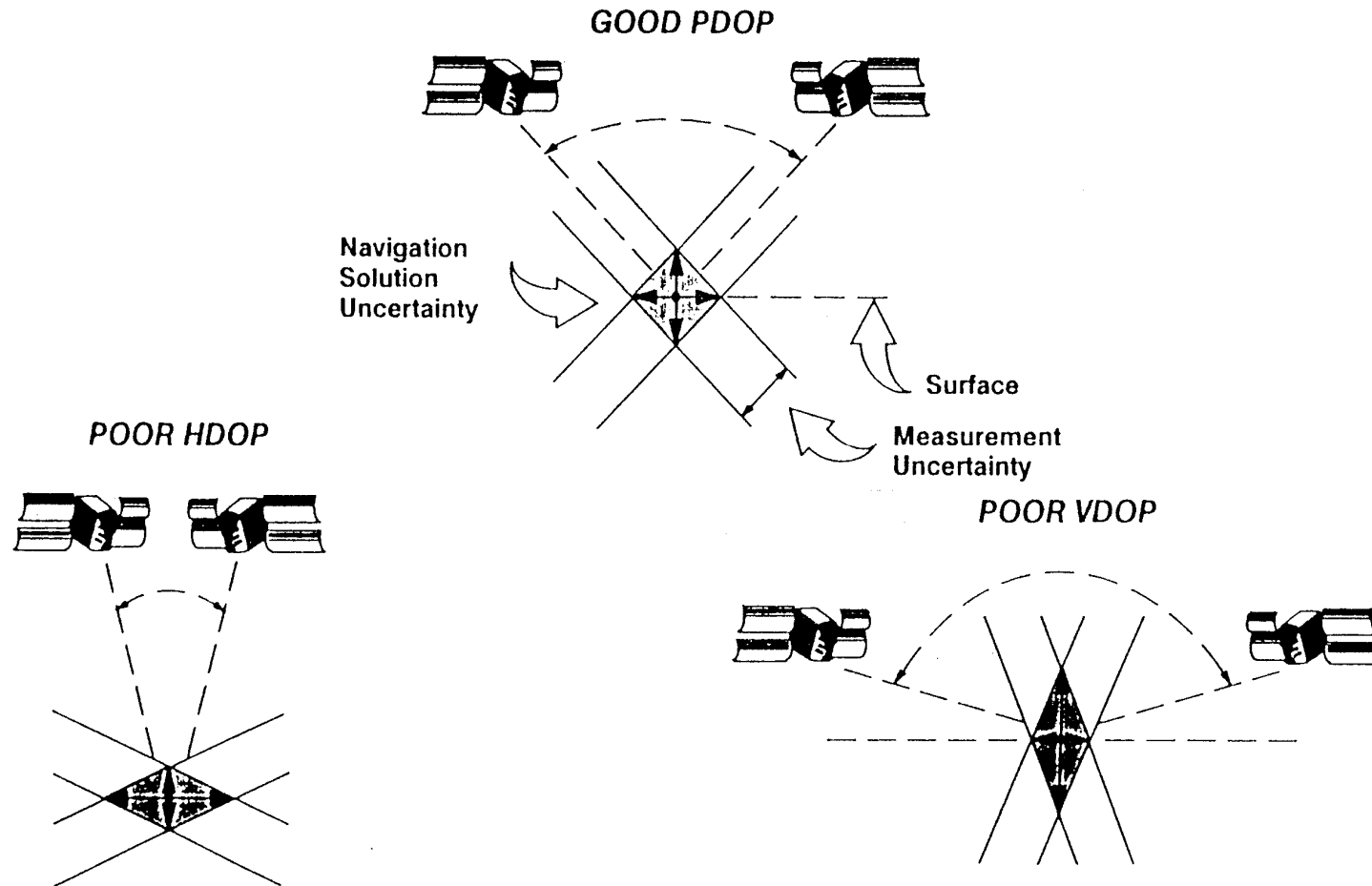
$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2 + \sigma_{z_u}^2} = PDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

$$\sqrt{\sigma_{x_u}^2 + \sigma_{y_u}^2} = HDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

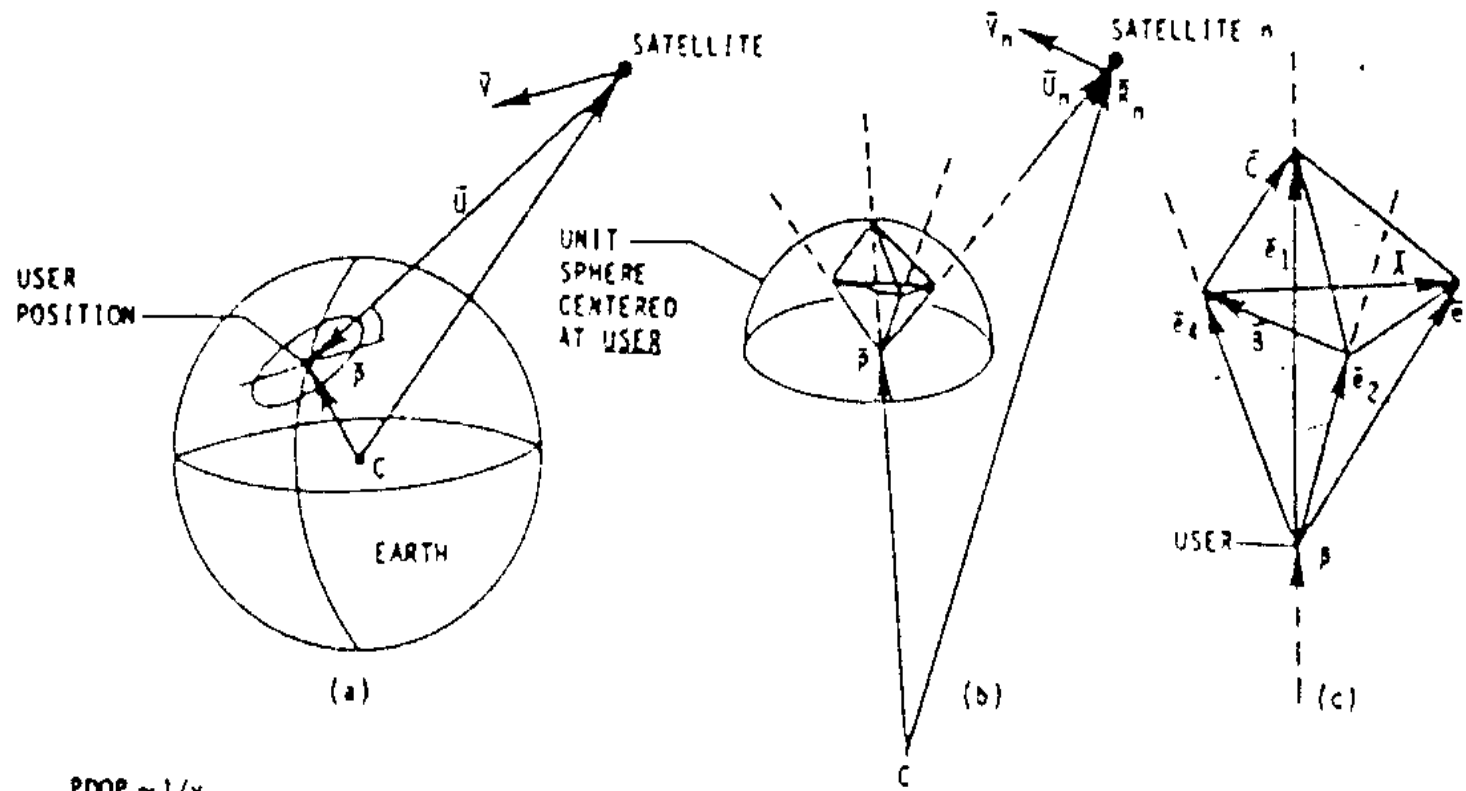
$$\sigma_{z_u} = VDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

$$\sigma_{t_u} = TDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

GDOP - Geometric Dilution of Precision (VI)



GDOP - Geometric Dilution of Precision (VII)



$PDOP \sim 1/v$

v = VOLUME OF THE TETRAHEDRON FORMED BY THE FOUR UNIT VECTORS TO EACH SATELLITE

Caratteristiche dell'accuratezza dei GNSS

- I GNSS hanno una distribuzione statistica dell'accuratezza poiché UERE e GDOP sono variabili continuamente.
 - UERE (User Equivalent Range Error) è la misura dell'errore nelle stime di distanza dai satelliti effettuate da ciascun ricevitore.
 - GDOP è la misura dell'amplificazione dell'errore dovuto alla configurazione geometrica dei satelliti visti dal ricevitore.

Accuratezza della stima di posizione (I)

- *Modalità di valutazione dell'accuratezza:*

- **Geometria fissa:** posizione relativa utente/satellite resta costante (matrice **H** fissa) (ad esempio nei 2 min di durata dell'approccio alla pista per un aereo a 120 nodi)
- **Geometria variabile:** accuratezze su una area geografica o su intervalli di tempo più ampi (matrice **H** variabile nel tempo e necessità di combinare le distribuzioni di DOP e UERE diversi per fornire una accuratezza media)

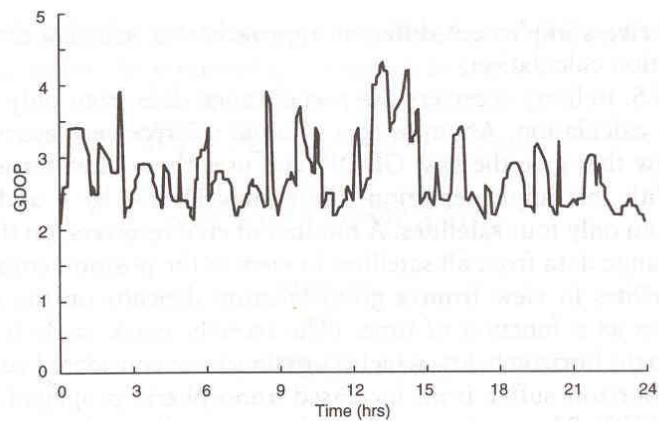
- *caso 1D:* (esempio con accuratezza verticale: $dz = VDOP \cdot UERE$)

- **Geometria fissa:** posizione lungo z è variabile gaussiana a valor medio nullo e deviazione standard $\sigma_{dz} = VDOP \cdot \sigma_{UERE}$
 - essendo ddp gaussiana: 68% delle misure cadono in ± 1 STD dalla media
 - 95% “ ± 2 STD “

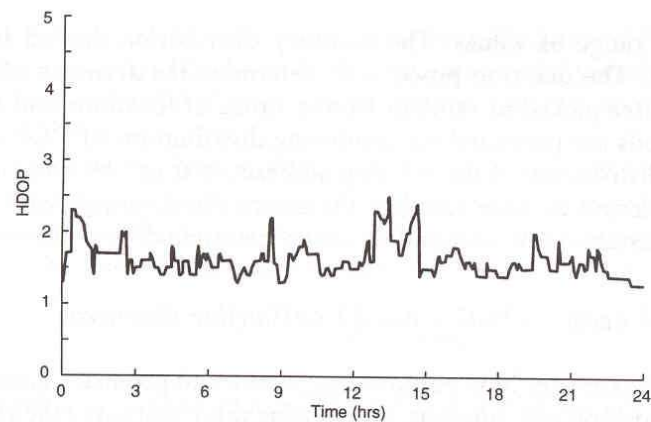
quindi al 95% l'accuratezza di misura verticale è migliore di $2\sigma_{dz} = 2 VDOP \cdot \sigma_{UERE}$

per $VDOP=2.0$ per un dato utente, con una data configurazione di satelliti e avendo un $\sigma_{UERE} = 8.0$ m per SPS senza SA, con probabilità del 95% l'errore verticale inferiore a 32 m.

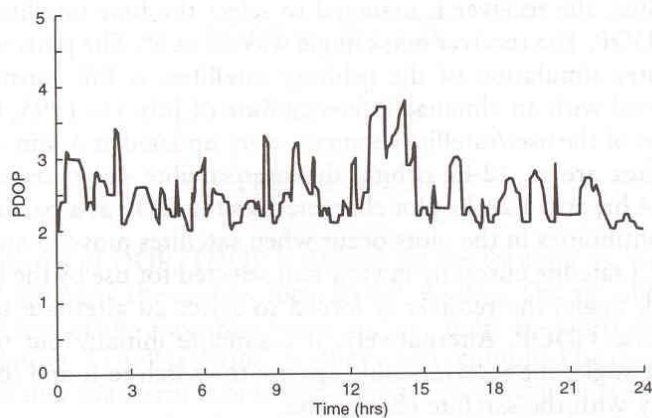
Esempio di DOP



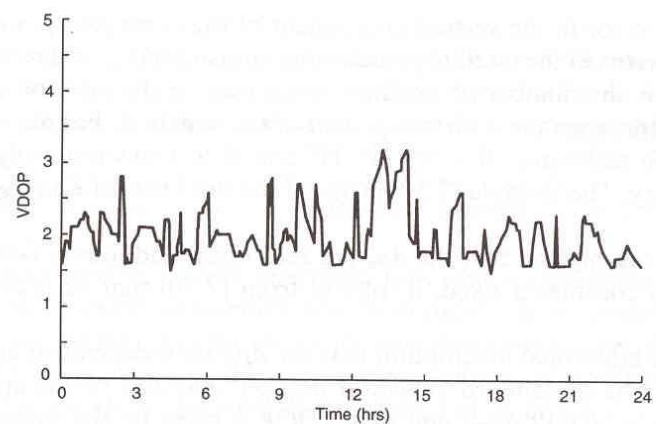
(a)



(c)



(b)



(d)

Accuratezza della stima di posizione (II)

- Geometria variabile:

- consideriamo UERE a distribuzione gaussiana con valor medio nullo e deviazione standard σ_{UERE}
- consideriamo anche VDOP una variabile aleatoria (poiché varia con tempo e spazio)

1) possiamo ancora scrivere $\sigma_{dz} = VDOP_{rms} \cdot \sigma_{UERE}$

avendo rimpiazzato VDOP con il suo valore rms (il valore medio resta zero per UERE)

$$VDOP_{rms} = \sqrt{\sum_x x^2 p_{VDOP}(x)}$$

2) assumendo una distribuzione discreta per VDOP: $p_{VDOP}(x)$

$$p_{dz}(h) = \sum_x p_{VDOP}(x) p_{dz/x}(h)$$

dove

$$p_{dz/x}(h) = \frac{1}{x} p_{UERE}\left(\frac{h}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{UERE} x} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_{UERE}^2 x^2}\right)$$

Accuratezza della stima di posizione (III)

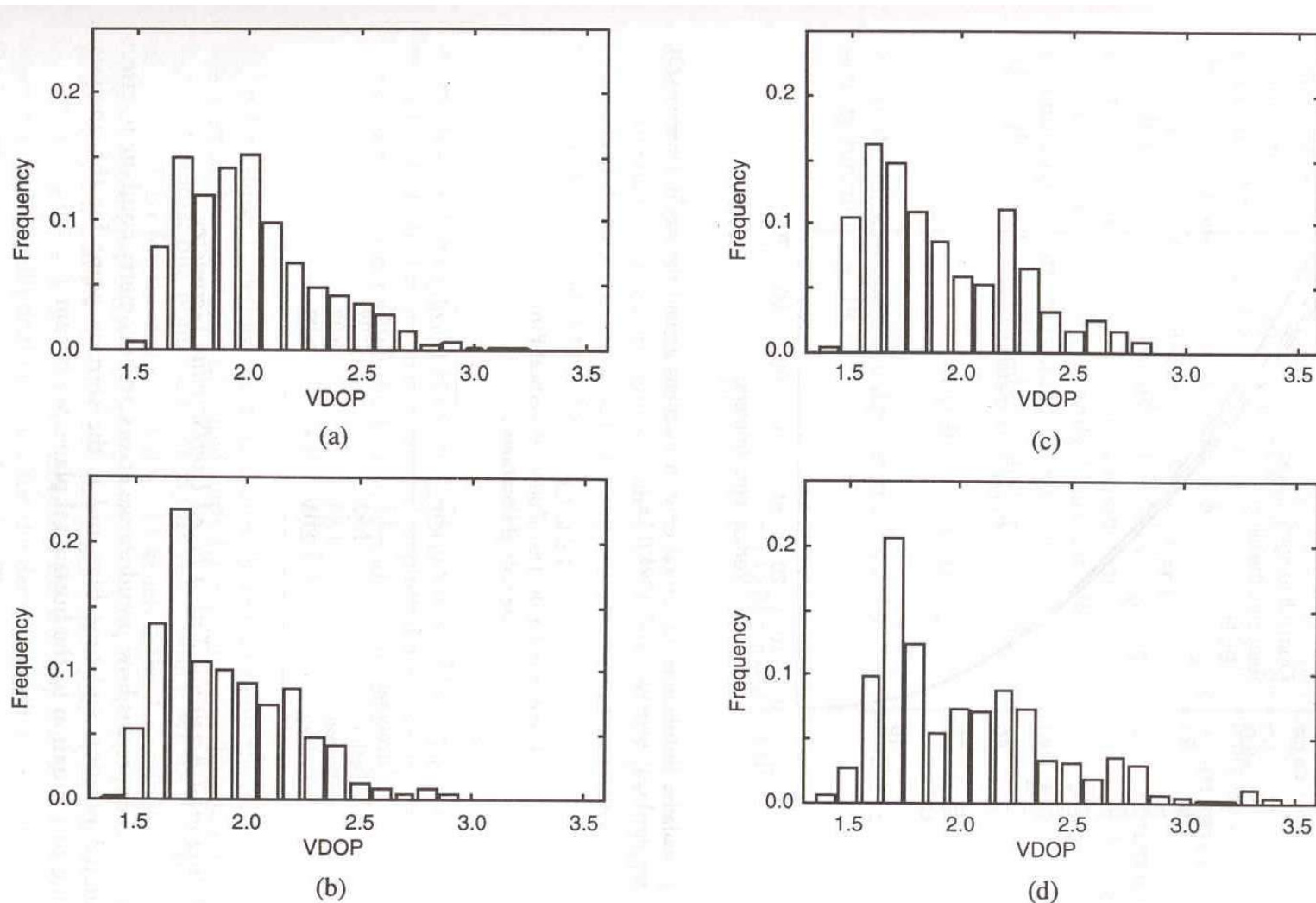
•si ha

$$\Pr ob\{|h| < z\} = \int_{-z}^z p_{dz}(h) dh = \sum_x p_{VDOP}(x) \int_{-z}^z p_{dz/x}(h) dh$$

$$\begin{aligned} \int_{-z}^z p_{dz/x}(h) dh &= \int_{-z}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{UERE} x} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_{UERE}^2 x^2}\right) dh = \dots \left(t = \frac{h}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x} \right) \dots \\ &= \int_{-\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}}^{\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-t^2) dt = \frac{1}{2} \text{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}\right) + \frac{1}{2} \text{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}\right) = \text{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}\right) \end{aligned}$$

$$\Pr ob\{|h| < z\} = \sum_x p_{VDOP}(x) \text{Erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}\sigma_{UERE} x}\right)$$

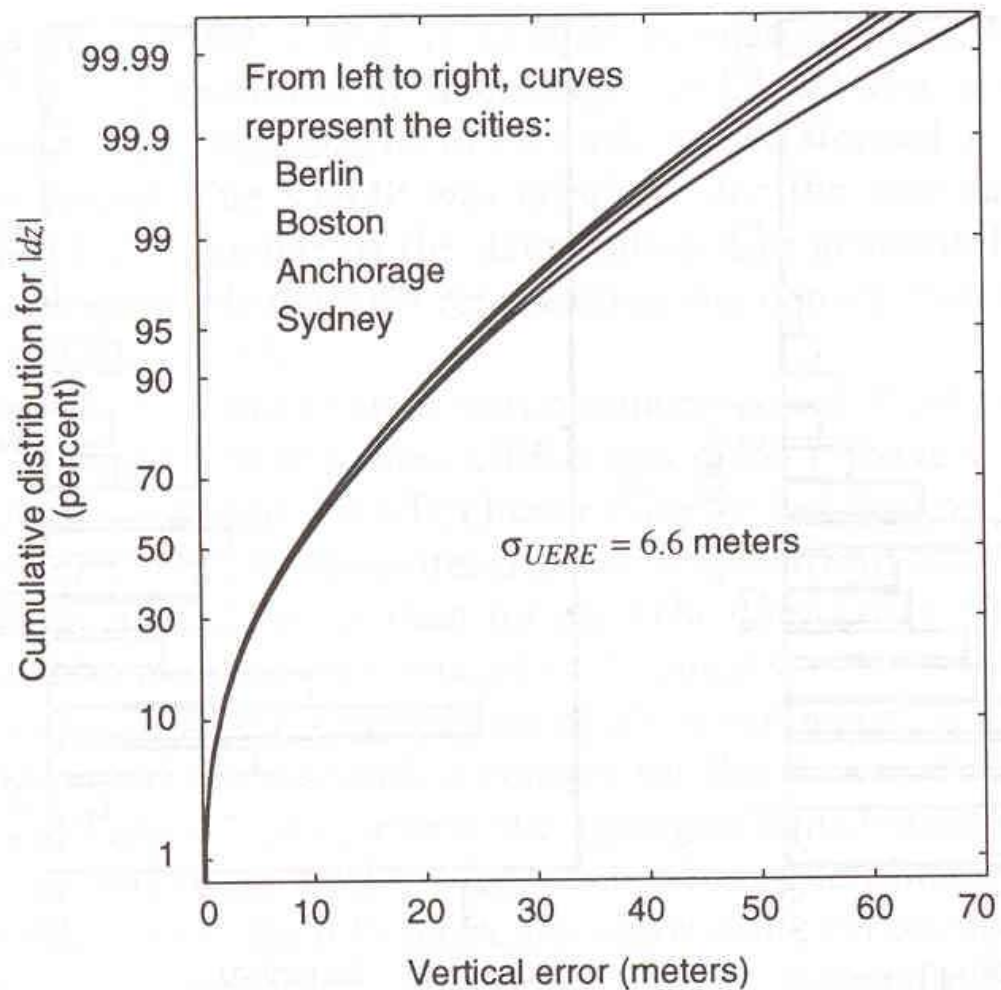
Densità di probabilità del DOP



VDOP a: (a) Anchorage, (b) Berlino, (c) Boston, (d) Sydney

[RadioTecnica e RadioLocalizzazione](#)

Distribuzione cumulativa di errore verticale



Accuratezza della stima di posizione (IV)

• **caso 2D:** (esempio con accuratezza orizzontale: $d\mathbf{R}=[dx, dy]^T = (\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1} \cdot \text{UERE}$)

• **Geometria fissa:** errore nel piano $d\mathbf{R}=[dx, dy]^T$ è variabile gaussiana bidimensionale a valor medio nullo e matrice di covarianza

$$\mathbf{C} = \text{cov}(d\mathbf{R}) = [(\mathbf{H}^T\mathbf{H})^{-1}]_{2 \times 2} \sigma_{\text{UERE}}^2$$

$$p_{d\mathbf{R}}(d\mathbf{R}) = \frac{1}{2\pi \sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left(-\frac{1}{2} d\mathbf{R}^T \mathbf{C}^{-1} d\mathbf{R}\right)$$

- contorni a densità costante si ottengono fissando il valore dell'esponente pari ad una costante m

$$d\mathbf{R}^T \mathbf{C}^{-1} d\mathbf{R} = m^2$$

- la probabilità che l'errore sia contenuto nell'ellisse definito dal valore m è pari a

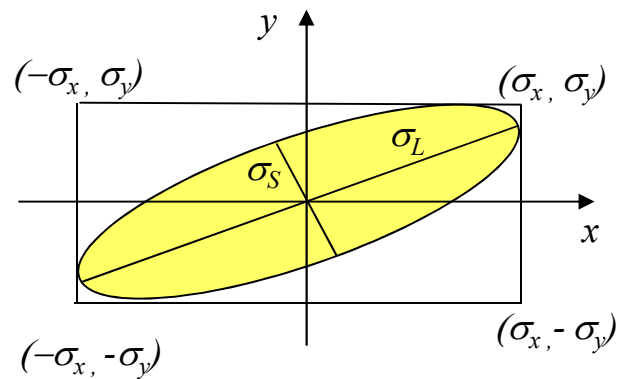
$$1 - \exp(-m^2 / 2)$$

$m=1$ (ellisse ad 1σ) : 0.39

$m=2$ (ellisse a 2σ) : 0.86

Accuratezza della stima di posizione (V)

- ellisse di errore ad 1σ errore nel piano $d\mathbf{R}=[dx, dy]^T$ è variabile gaussiana bidimensionale a valor medio nullo e matrice di covarianza



- asse maggiore σ_L
- asse minore σ_S

distance root mean square

$$drms = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = HDOP \cdot \sigma_{UERE}$$

- la probabilità che l'errore sia contenuto in un cerchio di raggio $drms$ dipende da σ_S/σ_L

$\sigma_S/\sigma_L \approx 1$	0.63
$\sigma_S/\sigma_L \approx 0$	0.69
- la probabilità che l'errore sia contenuto in un cerchio di raggio $2 drms$ dipende da σ_S/σ_L

$\sigma_S/\sigma_L \approx 1$	0.95
$\sigma_S/\sigma_L \approx 0$	0.98

Accuratezza della stima di posizione (VI)

- **Circular Error Probability (CEP):** raggio del cerchio che contiene il 50% della distribuzione dell'errore (la probabilità che l'errore sia minore del CEP è 0.5)

$CEP = CEP_{50} \approx 0.75 HDOP \cdot \sigma_{UERE}$	<i>prob</i> 0.43 – 0.54
$CEP_{80} \approx 1.28 HDOP \cdot \sigma_{UERE}$	<i>prob</i> 0.80 – 0.81
$CEP_{90} \approx 1.60 HDOP \cdot \sigma_{UERE}$	<i>prob</i> 0.89 – 0.92
$CEP_{95} \approx 2.00 HDOP \cdot \sigma_{UERE}$	<i>prob</i> 0.95 – 0.98

Accuratezza della stima di posizione (VII)

- **Geometria variabile:** sia p_G la densità di probabilità della geometria G

$$p_{d\mathbf{R}}(x, y) = \int p_G p_{d\mathbf{R}/G}(x, y) dG$$

- considerati valori discreti delle possibili geometrie (da simulazioni) caratterizzati da

$$\mathbf{C}_i = \text{cov}(d\mathbf{R}_i) = \left[(\mathbf{H}_i^T \mathbf{H}_i)^{-1} \right]_{2 \times 2} \sigma_{UERE}^2$$

si ha

$$p_{d\mathbf{R}}(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{N} p_{d\mathbf{R}/\mathbf{C}_i}(x, y)$$

Accuratezza della stima di posizione (VIII)

$$\begin{aligned}\text{cov}(d\mathbf{R}) &= \int \int \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} p_{d\mathbf{R}}(x, y) dx dy = \int \int \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_{d\mathbf{R}/C_i}(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \int \int \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} p_{d\mathbf{R}/C_i}(x, y) dx dy = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{C}_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}drms &= \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2)_i} = \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{1}{N} HDOP_i^2 \sigma_{UERE}} = HDOP_{rms} \cdot \sigma_{UERE}\end{aligned}$$

Riassunto dei parametri di accuratezza

- CEP(Circular Error Probable)
 - Raggio del cerchio che racchiude il 50% della probabilità di stima di posizione
- SEP(Spherical Error Probable)
 - Equivalente 3D del CEP
- 2D RMS(Two-Distance Root-Mean-Squared)
 - Valore di 2-deviazioni standard (95%) di errore
- RMS(Root-Mean-Square)
 - Valore di una deviazione standard (68%) di errore

Accuratezza teorica equivalente

From \ To	RMS (vertical)	CEP	RMS (horizontal)	R95 (horizontal 95 percent)	2D RMS	RMS (3-D)	SEP
RMS (vertical)	1	0.44	0.53	0.91	1.1	1.1	0.88
CEP	2.27	1	1.2	2.1	2.4	2.5	2.0
RMS (horizontal)	1.87	0.83	1	1.7	2	2.1	1.7
R95(horizontal 95 percent)	1.10	0.48	0.59	1	1.2	1.2	0.96
2DRMS	0.91	0.42	0.5	0.83	1	1.1	0.85
RMS (3-D)	0.91	0.4	0.48	0.83	0.91	1	0.79
SEP	1.14	0.5	0.59	1.04	1.18	1.27	1

Ex) 100m(2DRMS) accuracy \Rightarrow 42m(CEP)