Esercitazione 1: Soluzione navigazionale per la radiolocalizzazione satellitare.

Problema 1

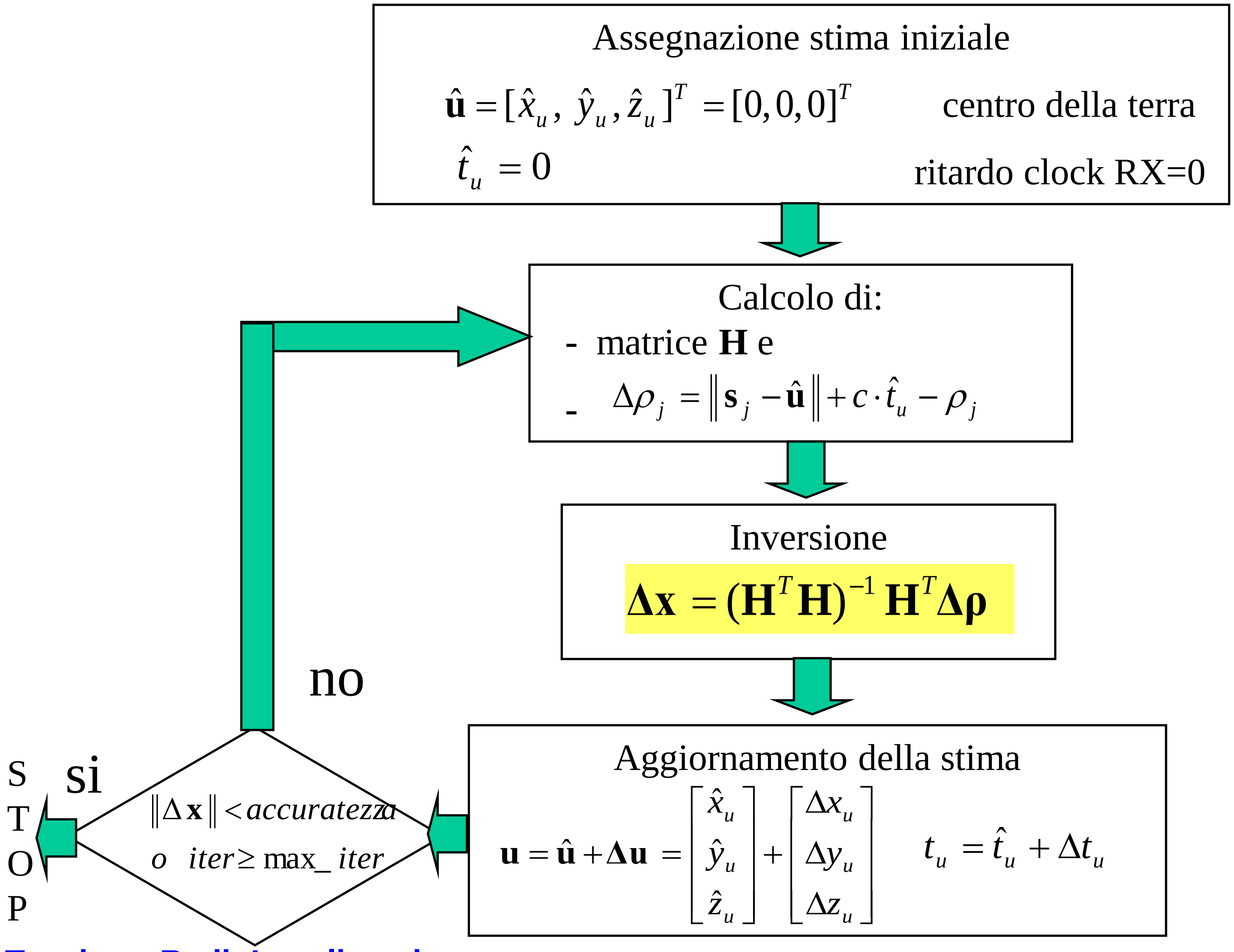
Si assuma di disporre di un ricevitore GPS, che si trova nelle vicinanze della posizione ECEF (x, y, z): x_u=-730000, y_u=-5440000, z_u=3230000 che ha misurato gli pseudo-range ρ_1= 89491,971 m, ρ_2=133930,500 m, ρ_3=283098,754 m ρ_4= 205961,742 m rispettivamente dai seguenti satelliti:

Satellite ID	X	Y	Z
1	15524471.175	-16649826.222	13512272.387
2	-2304058.534	-23287906.465	11917038.105
3	16680243.357	-3069625.561	20378551.047
4	-14799931.395	-21425358.240	6069947.224

Ricordando che la velocità della luce nel vuoto è pari a c=299792458 m/s e che gli pseudo-range sono misurati modulo c(m/s) x 1(ms)= 299792,458 m, si determini la posizione esatta dell'utente.

Per una verifica dell'errore ottenuto nella determinazione della posizione dell'utente, si consideri che l'utente si trova ad una distanza di 6372836,199 m dal centro della terra (vincolo approssimativo della quota)

Algoritmo per il calcolo della posizione



Applicazione dell'algoritmo: inizializzazione

Inizializzazione della stima di posizione (dal testo dell'esercizio):

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{x}_u,\ \hat{y}_u, \hat{z}_u]^T = \begin{bmatrix} -730000 \\ -5440000 \\ 3230000 \end{bmatrix}$$

Inizializzazione della stima del ritardo dell'orologio del ricevitore (non avendo alcuna informazione dall'esercizio):

$$\hat{t}_u = 0$$

Scelta dell'accuratezza dell'algoritmo di stima

$$\Delta x = 1cm$$

L'algoritmo non deve introdurre una ulteriore fonte di errore nella posizione dell'utente

Applicazione dell'algoritmo: calcolo di H

Definizione matrice H:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & 1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xN} & a_{yN} & a_{zN} & 1 \end{bmatrix}$$

con

$$\frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = a_{xj}$$

$$\frac{y_j - \hat{y}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = a_{yj}$$

$$\frac{z_j - \hat{z}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = a_{zj}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale e calcolando i coseni direttori si ottiene per la prima matrice H la seguente espressione

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7301 & -0.5035 & 0.4619 & 1.0000 \\ -0.0791 & -0.8963 & 0.4363 & 1.0000 \\ 0.7091 & 0.0965 & 0.6985 & 1.0000 \\ -0.6549 & -0.7441 & 0.1322 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell'algoritmo: calcolo di $\Delta\rho_i$

Definizione vettore $\Delta\rho_i$:

$$\Delta\rho = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_1 \\ \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_N - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_N \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per il primo vettore $\Delta\rho_i$ la seguente espressione

$$\boldsymbol{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} -12212.055\ 86916715 \\ -8174.66034\ 7395402 \\ -14138.2161\ 2102410 \\ -7279.98013\ 2145371 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell'algoritmo: inversione

Il passo successivo è l'inversione del sistema:

$$\mathbf{\Delta u} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{\Delta\rho}$$

Nel nostro caso la matrice H è quadrata di dimensione 4, quindi non è necessario utilizzare la pseudo-inversa e l'inversione del sistema si può scrivere:

$$\mathbf{\Delta u} = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{\Delta\rho}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per la prima correzione della stima Δx la seguente espressione

$$\mathbf{\Delta u} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3186.49581\ 6735052 \\ -3791.93168\ 0863880 \\ 1193.28645\ 7970338 \\ -12345.9970\ 0902941 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell’algoritmo: aggiornamento della stima

Quindi è necessario aggiornare la stima ottenuta, secondo le espressioni:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \qquad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per la nuova stima u la seguente espressione:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -730000 \\ -5440000 \\ 3230000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3186.496 \\ -3791.932 \\ 1193.286 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -733186.496 \\ -5443791.932 \\ 3231193.286 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t_u} = \hat{\mathbf{t}}_\mathbf{u} + \Delta\mathbf{t_u} = 0 - (-4.118\text{e-}005) = 4.118\text{e-}005$$

Applicazione dell'algoritmo: test di uscita

Per verificare se l'entità della correzione effettuata è significativa è necessario calcolare la norma della correzione della stima:

$$\left\|\mathbf{\Delta u}\right\| = \sqrt{\mathbf{\Delta x_u^2} + \mathbf{\Delta y_u^2} + \mathbf{\Delta z_u^2} + \left(\mathbf{c} \cdot \mathbf{\Delta t_u}\right)^{\mathbf{2}}}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene:

$$\left\|\mathbf{\Delta u}\right\| = 13355.900\,\mathrm{m}$$

Poiché la norma della correzione è superiore all'accuratezza cercata dall'algoritmo è necessario effettuare una nuova iterazione.

Applicazione dell'algoritmo: seconda iterazione

Applicando una seconda volta i passi dell'algoritmo si ottengono i seguenti valori:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7303 & -0.5034 & 0.4618 & 1 \\ -0.0789 & -0.8963 & 0.4363 & 1 \\ 0.7092 & 0.0967 & 0.6983 & 1 \\ -0.6549 & -0.7441 & 0.1322 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} 0.5826 \\ 0.2149 \\ 0.4632 \\ 0.0068 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4963 \\ -0.0675 \\ -0.2894 \\ 0.3198 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -733185.999 \\ -5443791.999 \\ 3231192.997 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t_u} = \hat{\mathbf{t}}_\mathbf{u} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{t_u} = 4.1180e-005$$

Calcolando la norma della stima si ottiene:

$$\|\boldsymbol{\Delta}\mathbf{u}\| = 0.6610\,\mathrm{m}$$

La norma della correzione è superiore all'accuratezza cercata dall'algoritmo è necessario effettuare una nuova iterazione.

Applicazione dell'algoritmo: terza iterazione

Applicando una seconda volta i passi dell'algoritmo si ottengono i seguenti valori:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0.7303 & -0.5034 & 0.4618 & 1 \\ -0.0789 & -0.8963 & 0.4363 & 1 \\ 0.7092 & 0.0967 & 0.6983 & 1 \\ -0.6549 & -0.7441 & 0.1322 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} 7.2905e-009 \\ 2.1828e-009 \\ 7.5088e-009 \\ 3.7835e-009 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Delta u} = \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c\Delta t_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.3050e-009 \\ 4.8469e-009 \\ -1.0990e-008 \\ 1.1662e-008 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta u} = \begin{bmatrix} -733185.999 \\ -5443791.999 \\ 3231192.997 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{t_u} = \hat{\mathbf{t}}_\mathbf{u} + \boldsymbol{\Delta t}_\mathbf{u} = 4.1180e-005$$

Calcolando la norma della stima si ottiene:

$$\left\| \boldsymbol{\Delta u} \right\| = 17.2855\,\mathrm{nm}$$

La norma della correzione è notevolmente inferiore all'accuratezza cercata dall'algoritmo, è possibile interrompere l'algoritmo.

Verifica della soluzione trovata

Per verificare se la soluzione trovata è prossima a quella vera, si può verificare se essa rispetta il vincolo di quota. Utilizzando le coordinate ECEF, la distanza di un utente dal centro della terra è data dalla semplice espressione:

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{x_u^2} + \mathbf{y_u^2} + \mathbf{z_u^2}} = 6372836.199\ \mathrm{m}$$

Dal testo è possibile verificare il valore della quota a cui si trova l'utente:

$$\mathbf{h_a = 6372836.199\ m;}$$

La distanza tra la posizione stimata e quella reale è data da:

$$\mathbf{errore = h - h_a = -9.3132\ nm;}$$

La distanza tra la posizione stimata e quella reale è trascurabile: l'applicazione dell'algoritmo ha portato alla posizione esatta

Problema 2

Si consideri un sistema per la localizzazione nel piano (x,y), che si basi su due punti di riferimento A e B rispettivamente di coordinate (0, 10 Km) e (0, -10 Km) e che l'utente si trovi nelle vicinanze della posizione: x_u=9000m, y_u=5500. Si assuma inoltre che l'utente abbia misurato rispettivamente le seguenti distanze dai punti di riferimento ρ_1= 10794.812 m, ρ_2= 17772.907 m. Si assuma, inoltre, che il sistema sia in grado di lavorare in modo perfettamente sincrono.

Si calcoli la posizione dell'utente e se ne valuti l'errore di stima, considerando che l'utente si trova ad una distanza di 10778.40823127423 m dal centro del sistema di riferimento.

Differenze rispetto al problema 1:

- *Il problema 2 è bidimensionale, mentre nel problema 1 si avevano 4 variabli indipendenti.*
- *Il sistema è perfettamente sincrono, ricevitore e trasmettitori sono sincronizzati*
- *Le misure delle distanze sono date in valore assoluto e non in modulo*

Applicazione dell'algoritmo: inizializzazione

Inizializzazione della stima di posizione (dal testo dell'esercizio):

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{x}_u,\ \hat{y}_u]^T = \begin{bmatrix} 9000 \\ 5500 \end{bmatrix}$$

Non è necessario inizializzare la stima del ritardo dell'orologio del ricevitore, perché si ipotizza di lavorare in un sistema perfettamente sincrono

Scelta dell'accuratezza dell'algoritmo di stima

$$\Delta x = 1cm$$

L'algoritmo non deve introdurre una ulteriore fonte di errore nella posizione dell'utente

Applicazione dell'algoritmo: calcolo di H

Definizione matrice H:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} \\ a_{x2} & a_{y2} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = a_{xj} \qquad \frac{y_j - \hat{y}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = a_{yj}$$

Calcoliamo i diversi elementi della matrice H:

$$a_{x1} = \frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = \frac{0 - 9000}{\sqrt{(0-9000)^2 + (10000-5500)^2}} = -0.89442719099992$$

$$a_{y1} = \frac{y_j - \hat{y}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = \frac{10000 - 5500}{\sqrt{(0-9000)^2 + (10000-5500)^2}} = 0.44721359549996$$

$$a_{x1} = \frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = \frac{0 - 9000}{\sqrt{(0-9000)^2 + (-10000-5500)^2}} = -0.50213551738650$$

$$a_{y1} = \frac{y_j - \hat{y}_u}{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|} = \frac{-10000 - 5500}{\sqrt{(0-9000)^2 + (-10000-5500)^2}} = -0.86478894661009$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} -0.894 & 0.447 \\ -0.502 & -0.865 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell'algoritmo: calcolo di $\Delta\rho_i$

Definizione vettore $\Delta\rho_i$:

$$\Delta\rho = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left\|\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{u}}\right\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_1 \\ \left\|\mathbf{s}_2 - \hat{\mathbf{u}}\right\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_2 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per il primo vettore $\Delta\rho_i$ la seguente espressione, considerando che nel nostro caso (sistema perfettamente sincrono) il ritardo del ricevitore è nullo:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \left\|\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{u}}\right\| - \rho_1 = \sqrt{(0-9000)^2 + (10000-5500)^2} - 10794.812 = -732.506 \\ \Delta\rho_2 &= \left\|\mathbf{s}_2 - \hat{\mathbf{u}}\right\| - \rho_2 = \sqrt{(0-9000)^2 + (-10000-5500)^2} - 17772.907 = 150.541\,\mathrm{m} \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta\rho = \begin{bmatrix} -732.506 \\ 150.541 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell'algoritmo: inversione

Nel nostro caso la matrice H è quadrata di dimensione 4, quindi non è necessario utilizzare la pseudo-inversa e l'inversione del sistema si può scrivere:

$$\mathbf{\Delta u} = \mathbf{H}^{-1}\mathbf{\Delta \rho}$$

Inversione della matrice H :

$$\boxed{\mathbf{H}^{-1} = \frac{1}{\det(H)}\begin{bmatrix} a_{y2} & -a_{y1} \\ -a_{x2} & a_{x1} \end{bmatrix} = \frac{1}{0.998}\begin{bmatrix} -0.865 & 0.447 \\ 0.502 & 0.894 \end{bmatrix}} \Rightarrow \mathbf{H}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.866 & -0.448 \\ 0.503 & -0.896 \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per la prima correzione della stima Δx la seguente espressione

$$\mathbf{\Delta u} = \begin{bmatrix} -0.866 & -0.448 \\ 0.503 & -0.896 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -732.506 \\ 150.541 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 567.244 \\ -503.446 \end{bmatrix}$$

Applicazione dell'algoritmo: aggiornamento della stima e test di uscita

Quindi è necessario aggiornare la stima ottenuta, secondo le espressioni:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \end{bmatrix}$$

Sostituendo i valori della stima iniziale si ottiene per la nuova stima u la seguente espressione:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9000 \\ 5500 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 567.244 \\ -503.446 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9567.244 \\ 4996.554 \end{bmatrix}$$

Il test di uscita dal ciclo consiste nel verificare che la norma della correzione della stima sia inferiore all'accuratezza cercata:

$$\|\Delta\mathbf{u}\| = \sqrt{\Delta\mathbf{x}_\mathbf{u}^2 + \Delta\mathbf{y}_\mathbf{u}^2} \leq \mathbf{Acc}$$

Sostituendo i valori si ottiene:

$$\|\Delta\mathbf{u}\| = \sqrt{567.244^2 + (-503.446)^2} = 758.435\,\mathrm{m}$$

La norma della correzione è superiore all'accuratezza cercata dall'algoritmo è necessario effettuare una nuova iterazione.

Applicazione dell'algoritmo: successive iterazioni

Iterazione 2:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9567.244 \\ 4996.554 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8.743 \\ -12.854 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9558.501 \\ 4983.700 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \right\| = 15.545\,\mathrm{m}$$

Iterazione 3:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9558.501 \\ 4983.700 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9.347\mathrm{e}-3 \\ 5.956\mathrm{e}-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9558.492 \\ 4983.706 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \right\| = 0.011\,\mathrm{m}$$

Iterazione 4:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9558.492 \\ 4983.706 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.165\mathrm{e}-8 \\ -0.305\mathrm{e}-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9558.492 \\ 4983.706 \end{bmatrix}$$

$$\left\| \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} \right\| = 3.465\,\mathrm{nm}$$

Verifica della soluzione trovata

Per verificare se la soluzione trovata è prossima a quella vera, si può verificare se essa rispetta il vincolo di quota. Utilizzando le coordinate del sistema di riferimento, la distanza di un utente dal centro di esso è data dalla semplice espressione:

$$\mathbf{h} = \sqrt{\mathbf{x_u^2} + \mathbf{y_u^2}} = \sqrt{9558.492^2 + 4983.706^2} = 10779.708\,\mathrm{m}$$

Dal testo è possibile verificare il valore della quota a cui si trova l'utente:

$$\mathbf{h_a} = 10778.408\,\mathbf{m};$$

La distanza tra la posizione stimata e quella reale è data da:

$$\mathbf{errore} = \mathbf{h} - \mathbf{h_a} = 10779.708 - 10778.408 = 1.300\,\mathbf{m};$$

L'entità dell'errore ottenuto fa pensare ad un errore di misura delle distanze tra i riferimenti e l'utente

…..soluzione alternativa!!

Senza ricorrere alla soluzione iterativa (non essendo esplicitamente richiesto nel testo) si può ricorrere alla soluzione di un sistema di equazioni in 2 incognite:

$$\begin{cases} \sqrt{(x)^2 + \left(y - 10^4\right)^2} = \rho_A \\ \sqrt{(x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2} = \rho_B \end{cases}$$

Elevando al quadrato da entrambi i lati si ottiene:

$$\begin{cases} (x)^2 + \left(y - 10^4\right)^2 = \rho_A^2 \\ (x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

Sottraendo le due equazioni si ottiene:

$$\begin{cases} \left(y - 10^4\right)^2 - \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_A^2 - \rho_B^2 \\ (x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

…..soluzione alternativa!!

Svolgendo i quadrati:

$$\begin{cases} y^2 - 2\cdot 10^4 y + 10^8 - y^2 - 2\cdot 10^4 y - 10^8 = \rho_A^2 - \rho_B^2 \\ (x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4\cdot 10^4 y = \rho_A^2 - \rho_B^2 \\ (x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2}{4\cdot 10^4} \\ (x)^2 + \left(y + 10^4\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2}{4\cdot 10^4} \\ (x)^2 + \left(\dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2 + 4\cdot 10^8}{4\cdot 10^4}\right)^2 = \rho_B^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2}{4\cdot 10^4} \\ x = \pm\sqrt{\rho_B^2 - \left(\dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2 + 4\cdot 10^8}{4\cdot 10^4}\right)^2} \end{cases}$$

…..soluzione alternativa!!

Dalla soluzione finale sostituendo i valori del problema si ottiene:

$$\begin{cases} y = \dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2}{4\cdot 10^4} \\ x = \pm\sqrt{\rho_B^2 - \left(\dfrac{\rho_B^2 - \rho_A^2 + 4\cdot 10^8}{4\cdot 10^4}\right)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4983.706\,\mathrm{m} \\ x = \pm 9558.492\,\mathrm{m} \end{cases}$$

Si sceglie la soluzione x=+9558.492 m perché nel testo del problema è specificato che l'utente si trova nelle vicinanze della posizione: x_u=9000m, y_u=5000, quindi per x>0.

Soluzione trovata dopo ultima iterazione algoritmo: $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9558.492 \\ 4983.706 \end{bmatrix}$

L'algoritmo iterativo e la soluzione esatta danno lo stesso risultato $\Rightarrow$

- *L'algoritmo iterativo aveva raggiunto la convergenza*
- *L'errore residuo nella soluzione è dovuto all'errore nelle misure*