

MODELLI MATEMATICI della BIOLOGIA

(6 cfu = 6 CREDITI FORMATIVI UNIVERSITARI)

Durata del corso: 45 ore circa

Inizio: 10 ottobre 2017 **Fine:** 21 dicembre 2017

Lezioni: Martedì e Giovedì ore 16-18

Dove: Aula A dip. di Botanica

Testi di riferimento: appunti, articoli e altro materiale del corso scaricabili dal sito elearning

INFORMAZIONI GENERALI

Il corso introduce alla modellizzazione (rappresentazione, descrizione) dei fenomeni biologici in termini matematici.

Il corso illustra inoltre i vantaggi che può comportare questo approccio in termini di conoscenza dei fenomeni e di previsione del loro svolgimento

Questi argomenti saranno trattati in lezioni ed esercitazioni.

Il programma del corso si trova al sito elearning

Per una comprensione migliore degli argomenti trattati nel corso, e' consigliabile avere a "portata di mano" libri/appunti del corso di Calcolo, Biostatistica e MMIB (anche se i principali strumenti matematici utilizzati verranno richiamati a lezione e sono riassunti negli appunti)

La verifica finale (esame) prevede un colloquio orale sugli argomenti trattati a lezione

Gli esami del corso potranno svolgersi

- nella maniera "tradizionale" (domande sul programma del corso)
- oppure
- preparando una presentazione ispirata ad uno/piu' articoli scientifici
- (**N.B.** Anche in questo caso tutti gli argomenti trattati nel corso devono essere noti)

Date esami:

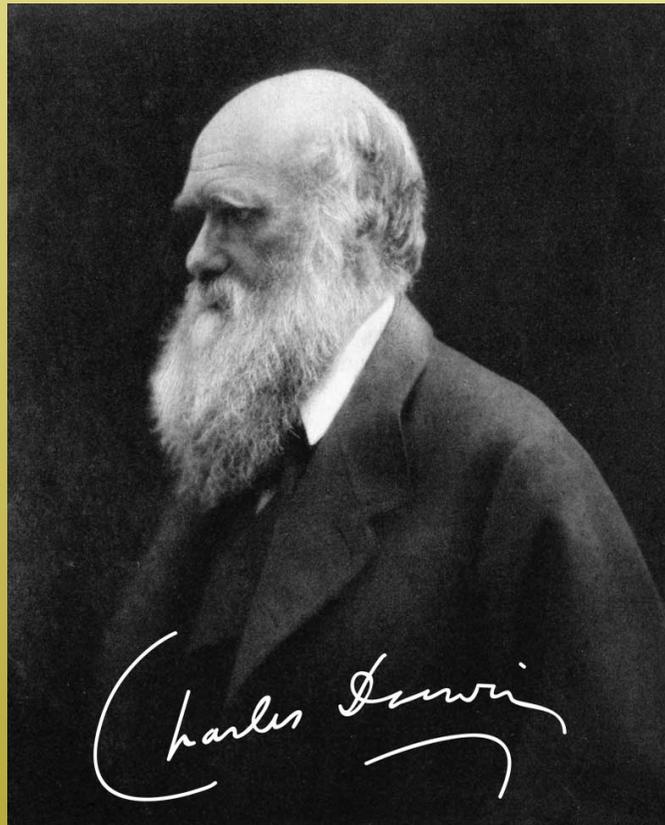
1 e 22 Febbraio 2018

14 Giugno e 11 Luglio 2018

26 Settembre 2018

Su richiesta, a questi appelli se ne potranno aggiungere altri

“...coloro che conoscono e comprendono i principi della matematica sembrano avere un senso senso per le cose biologiche”



(Charles Darwin, lettere)

QUALCHE DOMANDA PRELIMINARE:

- QUANDO HA AVUTO ORIGINE LA RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA DEL MONDO REALE?
- COME RAPPRESENTARE MATEMATICAMENTE I FENOMENI NATURALI?
QUALI VANTAGGI COMPORTA QUESTA ATTIVITA'?

Fin da tempi molto molto remoti l'uomo ha sentito l'esigenza di **descrivere** - in vari modi - il mondo circostante

DESCRIVERE dal latino "de-scribere" = rappresentare, delineare con disegno o raccontare a voce o con uno scritto



Descrivere il mondo
circostante mediante
immagini ...

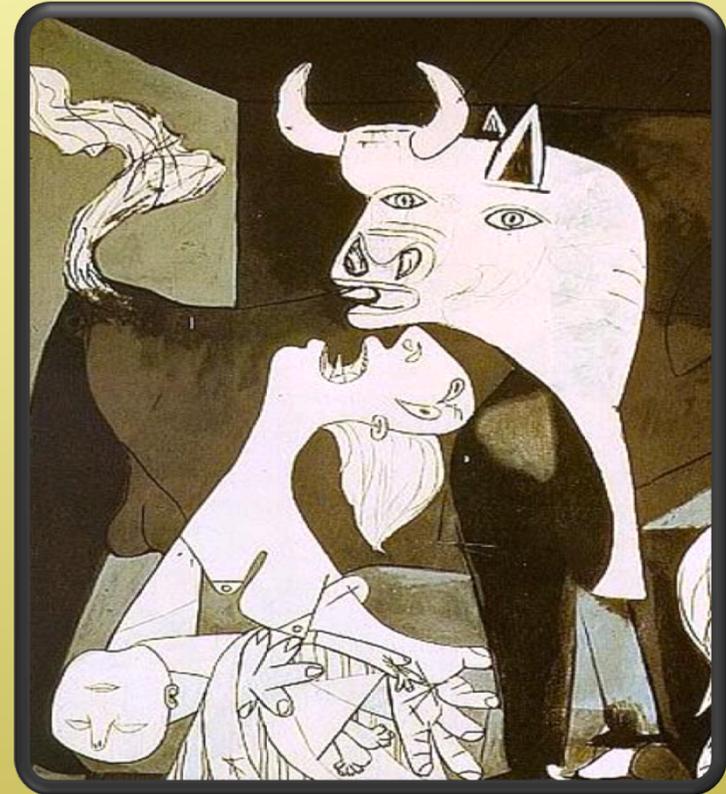
Grotte di Chauvet
(Francia meridionale)
Affreschi (datati al
radiocarbonio **32420**
anni)

L'artista rappresenta dei cavalli, ma vuole descrivere
anche **movimento, velocità**

La descrizione non riguarda esclusivamente un soggetto (cavalli)
ma fornisce anche **idee** che riguardano il soggetto rappresentato
(movimento, velocità)

Pablo Picasso
Guernica 1937

Picasso rappresenta un toro,
ma vuole descrivere le atrocità
della guerra, il dolore per le
perdite di vite umane



Gli artisti, con le immagini, rappresentano non solo
soggetti, ma descrivono anche concetti astratti e idee

Oltre che con l'immagine il mondo e' descritto
astrattamente anche da musica, poesia, fotografia,
letteratura, teatro ...



Maschere del teatro greco
con i tipi umani



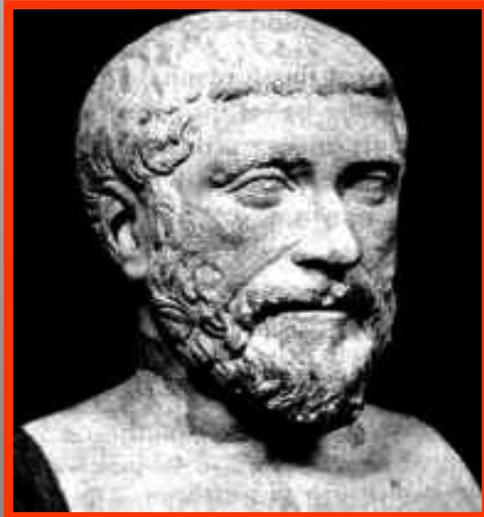
Robert Capa (1913-1954) Foto di guerra
in Sicilia

Come è nata l'idea che il mondo circostante possa essere descritto anche dalla matematica?

Come si fa a "descrivere" con la matematica ?

"Solo" 2500 anni fa i Greci, per primi in occidente, utilizzano **la matematica** per rappresentare astrattamente il mondo

Pitagora di Samo
(580-500a.C.)



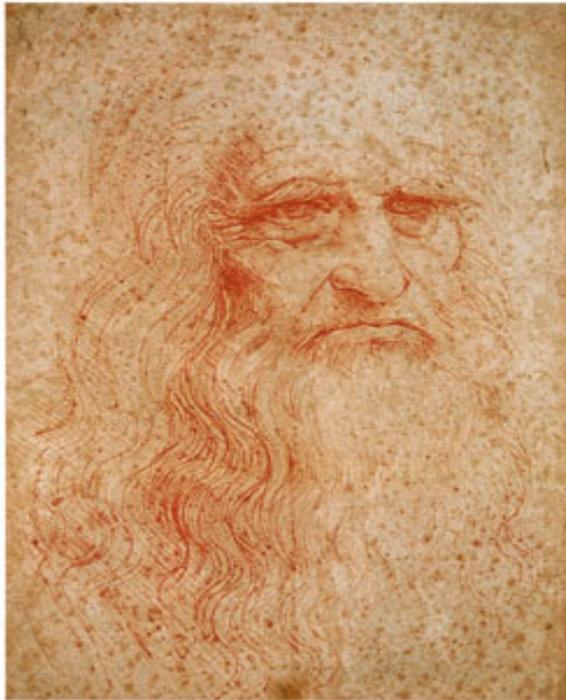
La Matematica viene utilizzata per spiegare "le cose" naturali : i numeri (interi) sono i "simboli astratti" del reale

Per i pitagorici il numero **1** rappresenta il concetto di "inizio di tutte le cose", il numero **2** (il primo pari) descrive "la diversità "

il **3**, ottenuto dalla somma del primo dispari con il primo pari, rappresenta "la discendenza", la continuità nel tempo,

.....

Leonardo da Vinci (1452-1519)



Introduce l'idea che la Natura debba essere descritta tramite

leggi teoriche

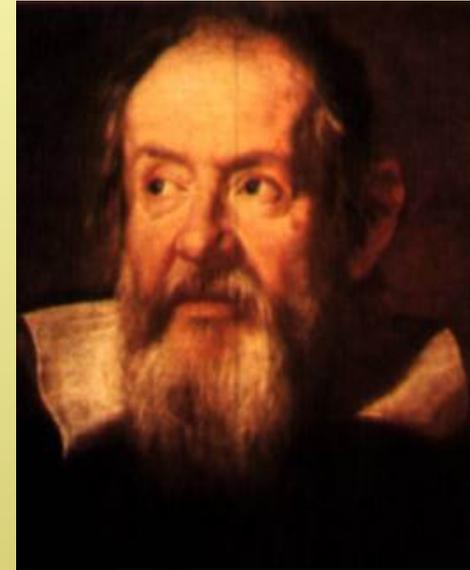
La sperimentazione e l'osservazione, da sole, portano ad una mescolanza di conoscenze particolari che non permettono di scoprire le ragioni necessarie dei fenomeni.

La teoria, **guida e luce dell'esperienza**, deve essere quella indicata dai Greci: **i fenomeni naturali vanno interpretati in chiave matematica**

“ Quelli che si innamorano della pratica senza scienza (teoria) sono come il nocchiero che entra in navilio senza timone e bussola, che mai ha la certezza di dove vada”

Leonardo da Vinci

Galileo Galilei (1564-1642)
nell'opera "Il Saggiatore"
stabilisce che è possibile
comprendere le leggi generali
astratte che governano tutti i
fenomeni naturali (soprattutto
astronomici e dinamici) e
afferma che il linguaggio più
adatto per formulare tali leggi è
quello della matematica



**"... il grande libro scientifico è scritto
con i caratteri della matematica"**

Galileo introduce "il metodo scientifico".

Che cosa e' "il metodo scientifico".

- Un fenomeno naturale deve essere **osservato** per rilevarne, tra i tanti, **gli aspetti principali** (osservazioni qualitative)
- Si devono **effettuare misure ripetute** sugli aspetti principali del fenomeno (osservazioni quantitative)
- **Le misure e le osservazioni qualitative devono essere affidabili** (altri osservatori, eseguendo con le stesse modalità osservazioni sugli stessi aspetti del fenomeno, devono ritrovare approssimativamente gli stessi risultati)
- **Le misure e le osservazioni devono essere interpretate** (esiste un legame tra le misure e le osservazioni? Si può spiegare perché le misure risultano quelle che si osservano? In altre parole, si può riconoscere **una "trama"** che spiega ciò che si osserva?)

LA "TRAMA"

In biologia

le osservazioni qualitative sono spiegate dalla **teoria dell'evoluzione biologica**, dalla chimica e dalla fisica

le osservazioni quantitative (le misure) sono spiegate soprattutto dai **modelli matematici dei fenomeni**

Ad esempio:

Prima degli anni '50 del secolo scorso, i ricercatori sapevano che la composizione chimica forniva importanti indizi sulla struttura del DNA.

I biochimici sapevano che il DNA era un **polimero di nucleotidi** e che ciascun nucleotide era composto da una molecola dello zucchero **desossiribosio**, da un **gruppo fosfato** e da una **base azotata**.

Nel 1950, il chimico di origine austriaca Erwin Chargaff, riscontrò alcune regolarità nella composizione del DNA, in particolare che, in tutte le specie, la quantità di adenina è uguale alla quantità di timina ($A = T$) e la quantità di guanina è uguale alla quantità di citosina ($G = C$); di conseguenza la quantità totale delle purine ($A + G$) è uguale a quella delle pirimidine ($T + C$).

Senza questa osservazione, quantitativa, non sarebbe stato possibile ricavare la struttura del DNA.

I modelli matematici dei fenomeni naturali

Le forme viventi cambiano nel tempo e cambiano, di conseguenza, anche le misure relative agli aspetti importanti delle forme viventi (cambia la forma degli organismi, il loro numero, cambiano le loro caratteristiche).

Visto che le misure sono espresse da numeri, un modello matematico tenta di descrivere come i valori numerici osservati sono stati ottenuti (quindi quali motivi hanno generato quelle misure, quella trama).

E, soprattutto, dalla descrizione riesce ad ottenere **previsioni** sui valori che osserveranno in futuro (quindi sulla evoluzione del fenomeno).

Perché è importante essere in grado di fare previsioni?

**Perché se si conosce a priori l'evoluzione del fenomeno,
lo si può controllare**

ATTENZIONE: La formulazione di un modello matematico della realtà non può riguardare tutti i dettagli del fenomeno (il modello sarebbe troppo complicato), ma si occupa degli **aspetti cruciali, caratterizzanti del fenomeno.**

I modelli matematici dell'evoluzione sono di 2 tipi:

(a) modelli deterministici : il fenomeno in studio e' regolato da processi del tipo "causa-effetto" e non intervengono fenomeni imprevisti

(strumenti matematici: sistemi dinamici, funzioni, equazioni differenziali, ecc.)

(b) modelli probabilistici (o stocastici):

i processi che regolano il fenomeno sono imprevisti , cioe' si possono realizzare in modi diversi

(strumenti matematici: statistica, teoria della probabilita')

Uno stesso fenomeno di evoluzione puo' essere descritto da modelli diversi

ESEMPIO.

La crescita di una coltura di batteri (E. Coli)

(a) In laboratorio (condizioni ambientali costanti e ottimali). Le osservazioni mostrano che le cellule si riproducono, in un tempo medio di 20 minuti, per scissione binaria



Il processo puo' essere ritenuto deterministico

Una delle informazioni che si possono ottenere riguarda il numero delle cellule che compongono la colonia ad ogni istante (un aspetto particolare del fenomeno). Questo aspetto si puo' modellizzare matematicamente in modo semplice

Modello matematico :

t =tempo di duplicazione proprio di una cellula (per E. Coli $t=1$ corrisponde in media a 20 minuti, $t=2$ a 40 minuti ecc.)

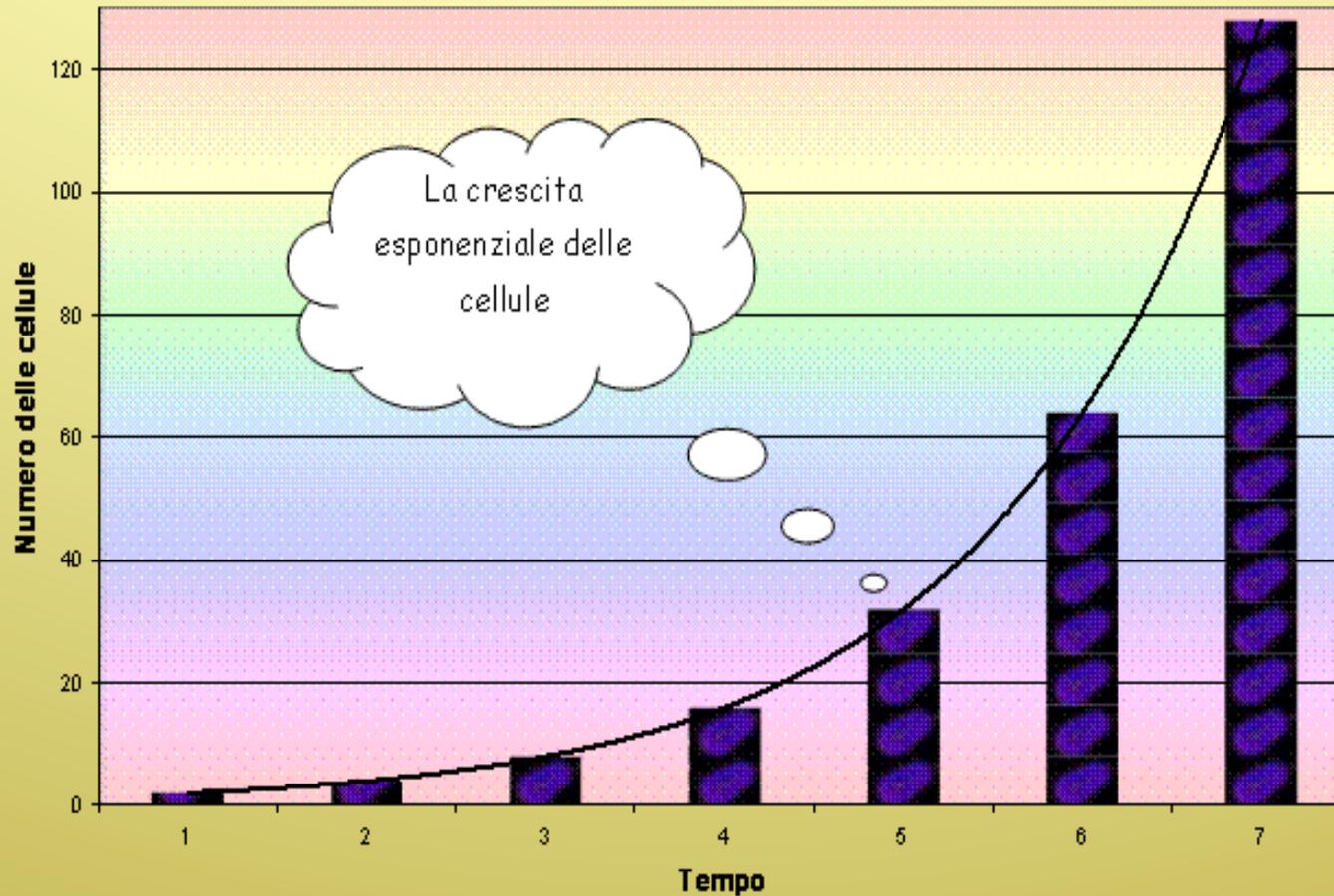
Se $N(t)$ rappresenta il numero di cellule al tempo t , se $N(0)=1$ (inizialmente si ha una sola cellula), se la mortalità è trascurabile e se tutte le cellule duplicano insieme si può scrivere

$$N(1)= 2,$$

$$N(2)= 4= 2^2$$

$$N(3)= 8= 2^3$$

.....



La crescita e' esponenziale e descritta dalla funzione $N(t) = 2^t$

($N(t) = N_0 \cdot 2^t$ se inizialmente N_0 cellule formano la colonia)

PREVISIONI

se non ci sono imprevisti o interventi esterni, la numerosita' aumentera' sempre piu'

Possiamo, in particolare, sapere quante cellule formeranno la colonia ad un certo istante. Ad esempio dopo 2 ore e 10 minuti ($t=6,5$) si osserveranno $N(6,5)=2^{6,5} \approx 90,51$ cellule.

Il fenomeno e' completamente sotto controllo.

Il modello e' corretto?

Basta ritornare alle osservazioni. Si contano le cellule che compongono una colonia (manualmente o con sistemi automatizzati) e si verifica se il numero previsto dal modello corrisponde, almeno approssimativamente, a quello osservato.

Se la risposta e' positiva, il modello si accetta come corretto.

(b) La crescita avviene in natura (condizioni esterne imprevedibili).
Una percentuale P_t di cellule non trascurabile e variabile da generazione a generazione potrebbe morire.

Lo stesso fenomeno può essere considerato **STOCASTICO**.

In questo caso il modello matematico si complica.

Modello matematico

Ipotesi: t =tempo di duplicazione proprio di una cellula (per E.

Coli $t=1$ corrisponde in media a 20 minuti, $t=2$ a 40 minuti ecc.)

Se $N(t)$ rappresenta il numero di cellule al tempo t , se $N(0) = N_0$,
si può scrivere

$$\begin{aligned} N(1) &= N_0 - P_0 N_0 = (1 - P_0) N_0 \\ N(2) &= N_1 - P_1 N_1 = (1 - P_0) N_0 - P_1 [(1 - P_0) N_0] = \\ &= (1 - P_0)(1 - P_1) N_0 \end{aligned}$$

$$N(3) = (1 - P_0)(1 - P_1)(1 - P_2) N_0$$

In generale

$$N(t) = (1 - P_0) (1 - P_1) (1 - P_2) \dots (1 - P_{t-1}) N_0$$

Le previsioni sulla numerosità risultano più difficili.

Si possono ottenere informazioni sulla numerosità "media" facendo altre ipotesi semplificative (ad esempio che

$P_i = 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) se la stagione è buona (non muore nessuna cellula)

e

$P_i = 100\%$ se la stagione è cattiva (muoiono tutte le cellule).

Bisogna quindi conoscere la frequenza delle stagioni buone/cattive

Esistono "modelli matematici di riferimento" che possono essere utilizzati in situazioni varie?

SI: il principale di questi modelli è quello malthusiano