
Gestione della soglia di Rivelazione

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 ($a=0$) ho un Falso Allarme se

$$z = |\tilde{z}| = |d_f(t)| > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p_z(z | H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = Prob\{z > T | H_0\} = \int_T^{\infty} p_z(z | H_0) dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

Scelta della soglia fissa

$$P_{fa} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$



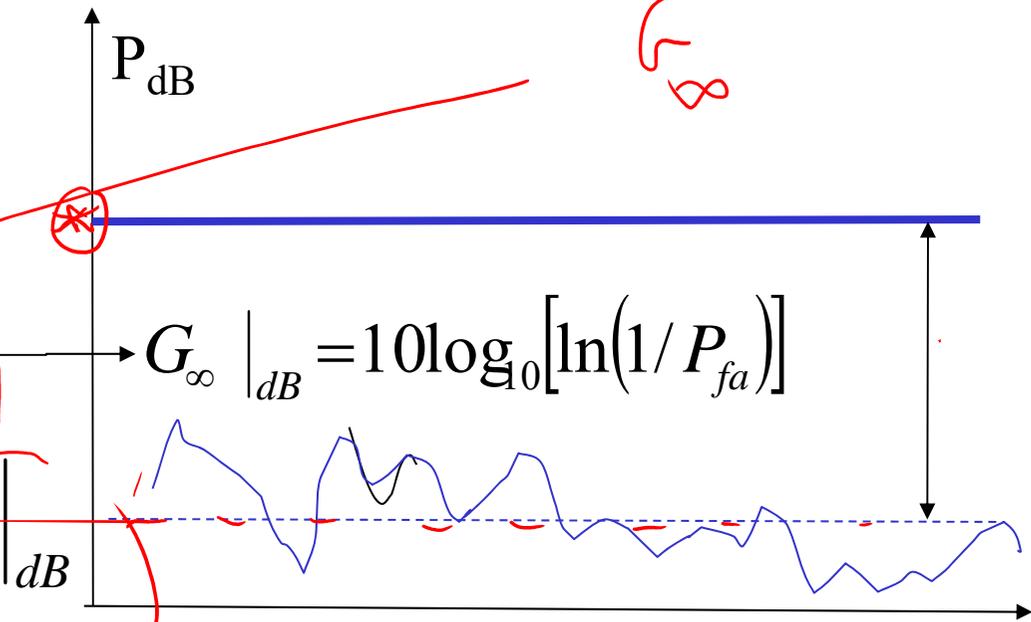
$$\frac{T^2}{\sigma_d^2} = -\ln P_{fa}$$

* $T^2 \Big|_{dB} = \sigma_d^2 \Big|_{dB} + G_\infty$

$$T = \sigma_d \cdot \sqrt{-\ln P_{fa}}$$



$$T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa})$$



$$G_\infty \Big|_{dB} = 10 \log_{10} [\ln(1/P_{fa})]$$

$$\sigma_d^2 \Big|_{dB}$$

Livello di potenza noto

Scelta della soglia – stima del disturbo

$$T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa})$$

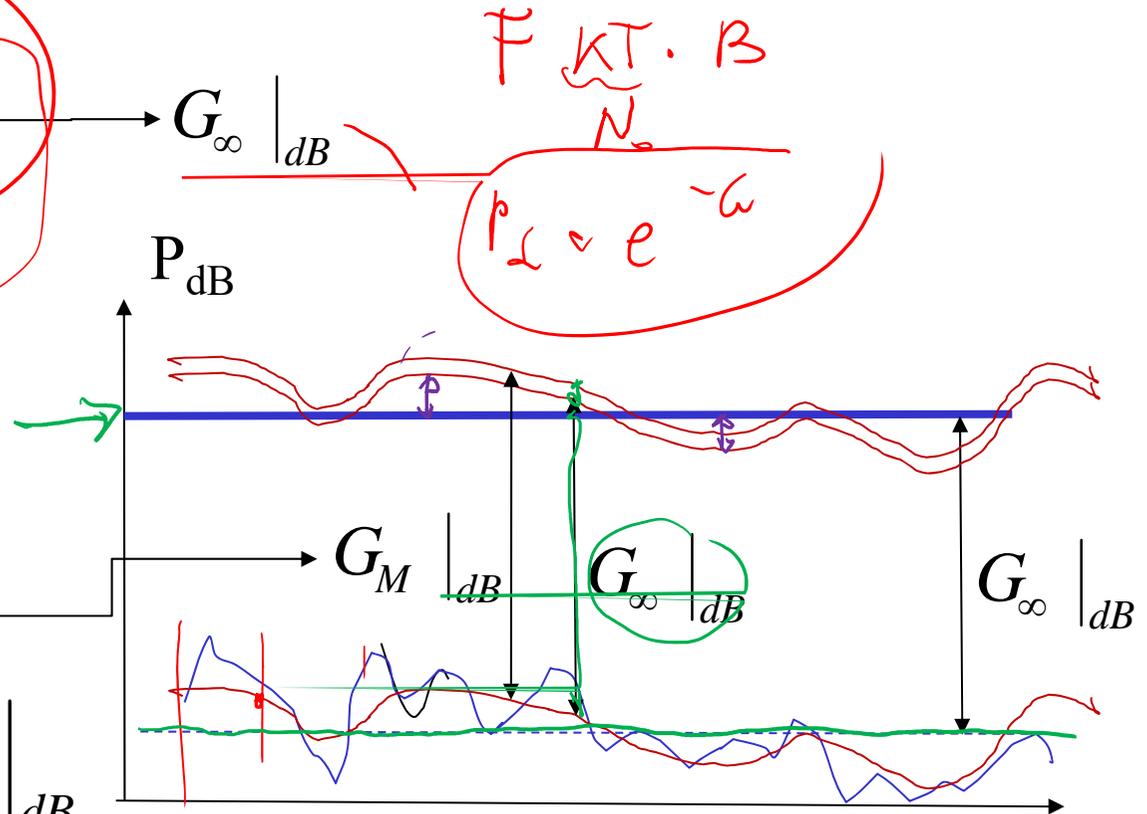
$$\sigma_d^2 |_{dB}$$

Livello di potenza noto

$$T^2 = \hat{\sigma}_d^2 \cdot G_M$$

$$\hat{\sigma}_d^2 |_{dB}$$

Livello di potenza stimato



$$P_d = e^{-G} \quad \ln P_d = -G$$

$$G = -\ln P_d$$

Incremento di P_{fa} per stima disturbo

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 + \Delta)}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 - \Delta)}{\sigma_d^2}} = \frac{1}{2} e^{-G \frac{\sigma_d^2 + \Delta}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-G \frac{\sigma_d^2 - \Delta}{\sigma_d^2}} = \\
 &= e^{-G} \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + e^{\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} \right] = e^{-G} \frac{1}{2} \left[1 + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 + 1 + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right] = \\
 &= e^{-G} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right] > 1
 \end{aligned}$$

con prob. $\frac{1}{2}$
 con valore noto

$$P_{fa} = e^{-\frac{G \cdot \sigma_d^2}{\sigma_d^2}} = e^{-G}$$

$$\frac{1}{2} \sigma_d^2 = \sigma_d^2 + \Delta$$

$$\frac{1}{2} \sigma_d^2 = \sigma_d^2 - \Delta$$

P_{fa} per stima

$$P_{fa} = e^{-\frac{G \cdot \sigma_d^2}{\sigma_d^2}} = e^{-G}$$

P_{fa} media?

$$T^2 = (\sigma_d^2 + \Delta) \cdot G$$

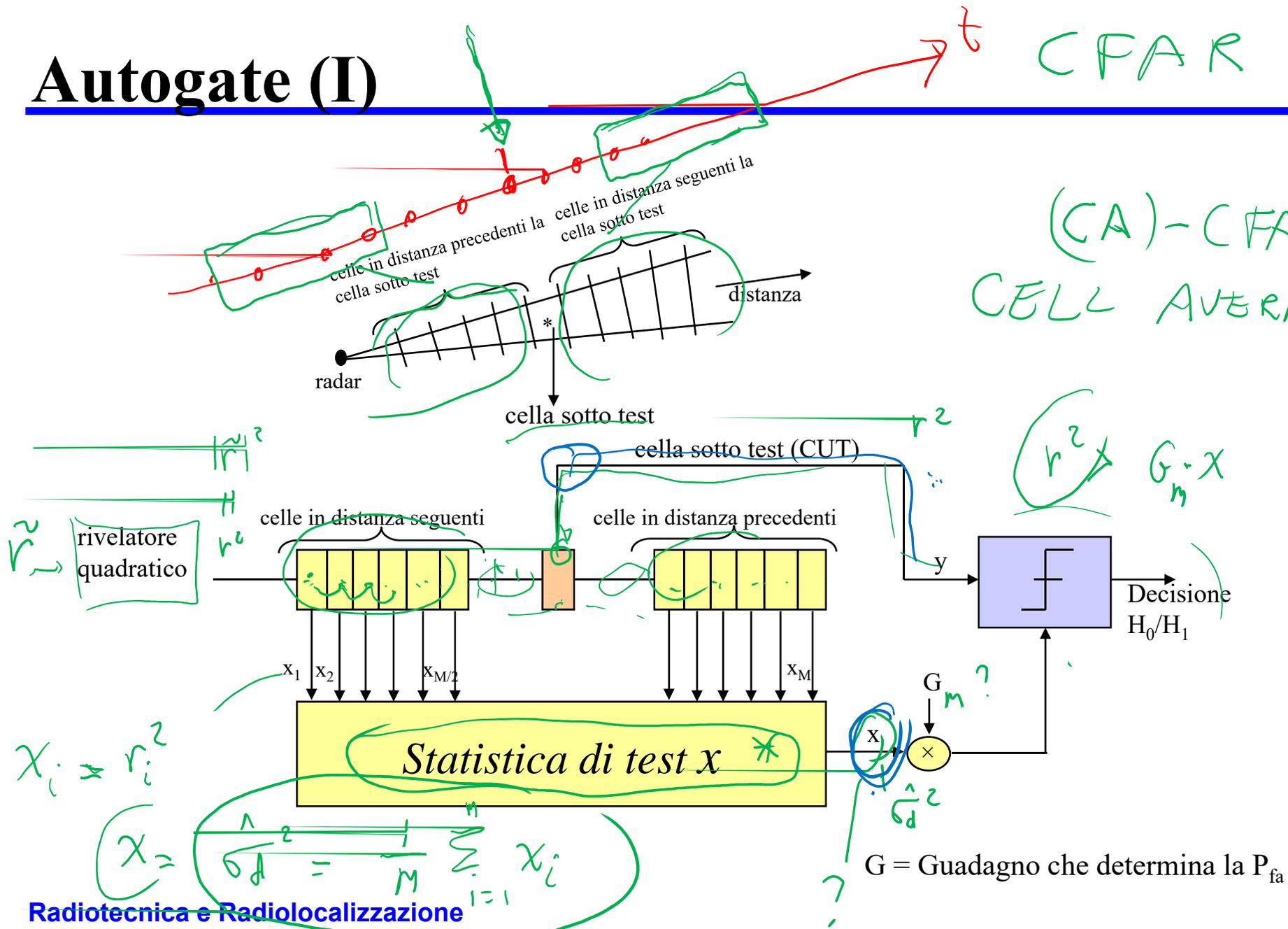
$P_{fa} = e^{-\frac{(\sigma_d^2 + \Delta) \cdot G}{\sigma_d^2}}$
 nel caso di stime per eccesso

$$T^2 = (\sigma_d^2 - \Delta) \cdot G$$

Autogate (I)

CFAR

(CA)-CFAR
CELL AVERAGE



Autogate (II)

Probabilità di falso allarme:
$$P_{fa} = \int_0^{\infty} \left[\int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y / H_0) dy \right] p_x(x) dx$$

DDP della cella sotto test

DDP della statistica di test

Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[\int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y / H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

CA-CFAR (I)

$$x_i = r_i^2 = |\tilde{r}_i|^2$$

Statistica di test

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i = \frac{1}{M} x'$$

- Ipotesi: disturbo gaussiano

$$y = \alpha x$$

$$p_y(y) = \frac{1}{\alpha} p_x\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

$$x' = \sum_{i=1}^M x_i$$

$$p_y(y/H_0) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i}{\sigma^2}} \quad x_i \geq 0, i = 1 \dots M$$



M variabili aleatorie
indipendenti identicamente
distribuite

Per l'ipotesi di indipendenza statistica:
densità di probabilità = convoluzione delle singole
densità



$$p_{x'}(x') = p_{x_1}(x') * p_{x_2}(x') \dots * p_{x_M}(x')$$

Funzione caratteristica:

$$C_{x'}(u) = C_{x_1}(u) \cdot C_{x_2}(u) \cdot \dots \cdot C_{x_M}(u) = [C_{x_i}(u)]^M = \left[\frac{1/\sigma^2}{1/\sigma^2 - ju} \right]^M$$



$$p_{x'}(x') = \frac{1}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{x'}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}} \quad x' \geq 0$$

$$x = \frac{x'}{M} \Rightarrow p_x(x) = M p_{x'}(Mx)$$

antitrasformando

$$C_{x_1}(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{x_1}(x') e^{-j2\pi\mu x'} dx'$$

$$C_{x_1}(\mu) \cdot C_{x_2}(\mu) \cdot C_{x_3}(\mu) \cdot \dots \cdot C_{x_M}(\mu) =$$

$$= \frac{1}{(1 + j2\pi\sigma^2\mu)^M}$$

$$C_{x_1}(\mu) \approx \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_1}{\sigma^2}} e^{-j2\pi\mu x_1} dx_1 = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{1 + j2\pi\mu\sigma^2} = \frac{1}{1 + j2\pi\mu\sigma^2}$$

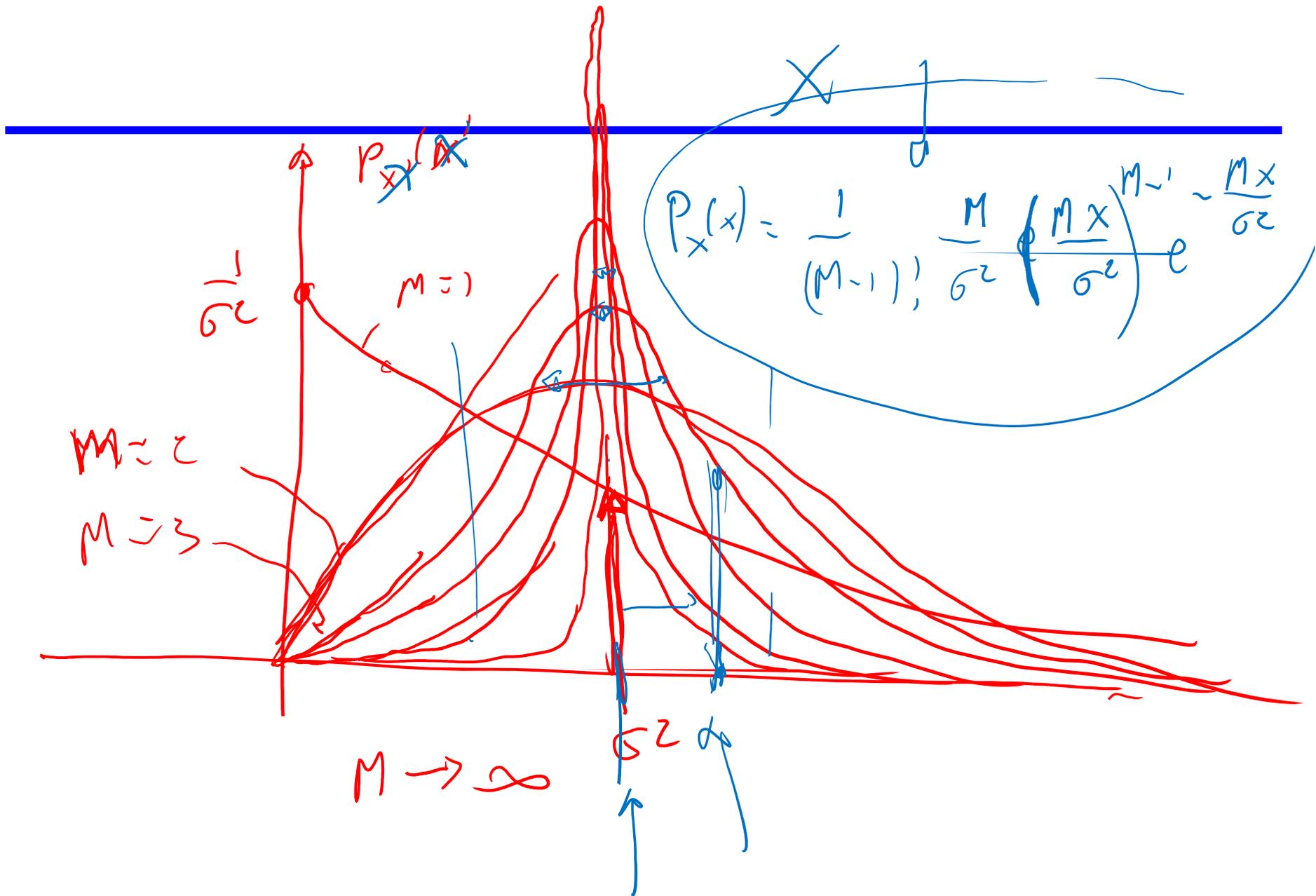
$$X' = \sum_{i=1}^M x_i = \sum_{i=1}^M |r_i|^2 = \sum_{i=1}^M (r_{iI}^2 + r_{iQ}^2)$$

Somma di $\sqrt{2M}$ ^{quadrati di} variabil. aleatorie gaussiane
 indip. con $\mu = 0$ e stessa varianza σ^2

$$P(x') = \frac{1}{(M-1)!} \frac{x'^{M-1}}{\sigma^2} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}} \quad x' > 0$$

PDF GAMMA

$$M=1 \quad \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}}$$



CA-CFAR (II)

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}} dx = \\
 &= \int_0^\infty \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M+G)} dx = \left(\frac{M}{M+G} \right)^M \int_0^\infty \frac{1}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{z}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{z}{\sigma^2}} dz = \boxed{\left(1 + \frac{G}{M} \right)^{-M}}
 \end{aligned}$$

$z = x(M+G)$

Integrale di una densità di probabilità



Fissato il tasso di falsi allarmi desiderato e fissato il valore di M resta fissato il valore da dare al guadagno G.



*From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento*

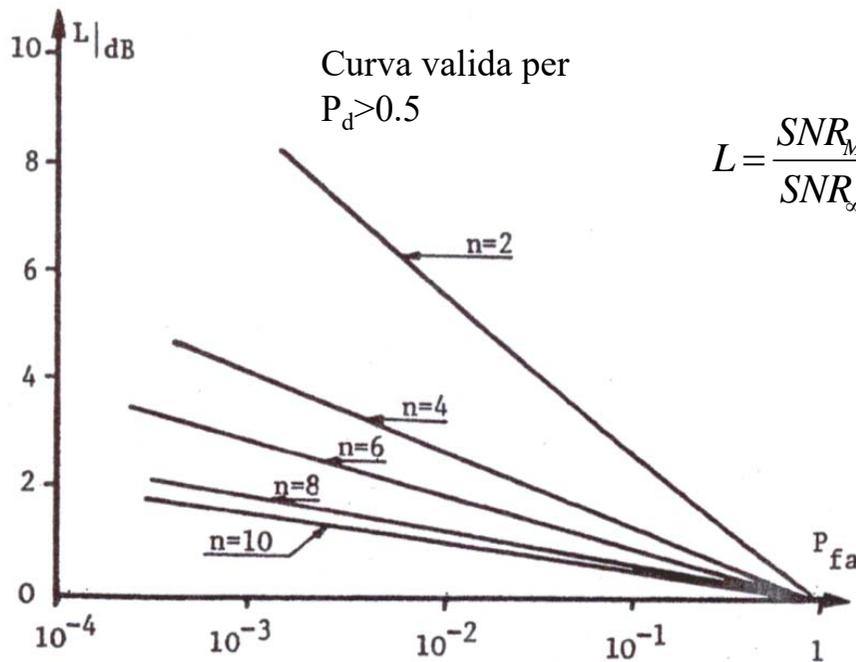
Probabilità di falso allarme dipende solo da G e da M ed è indipendente dal livello del disturbo \Rightarrow **CFAR: Constant False Alarm Rate** indipendente da variazioni spaziali o temporali del livello del disturbo (la soglia si adatta a variazioni spaziali e/o temporali di σ^2).

CA-CFAR (III)

- Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[\int_{Gx}^{\infty} p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

- soglia fluttuante → perdite in sensibilità (tutto va come se ci fosse una soglia fissa più un rumore additivo dovuto alla fluttuazione della stima)



$$L = \frac{SNR_M}{SNR_{\infty}}$$

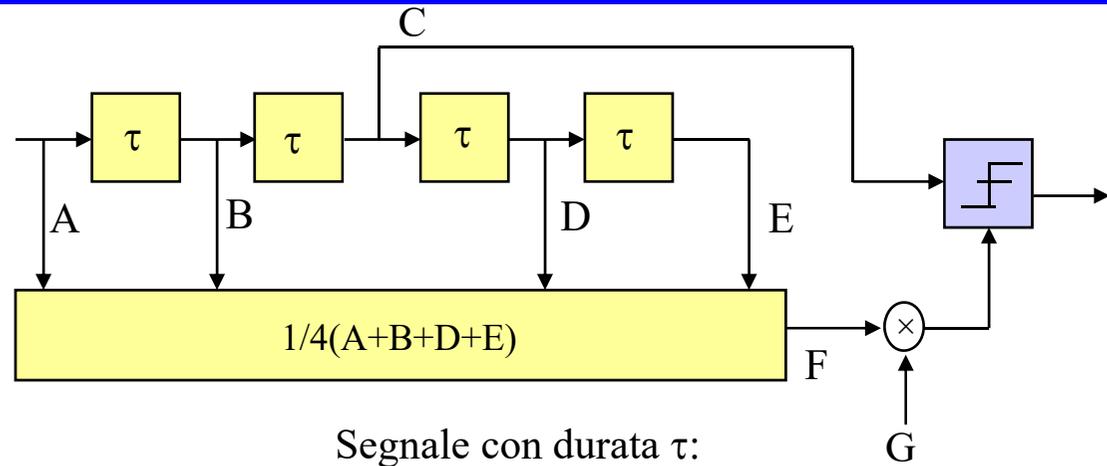
Perdite in sensibilità: rapporto tra SNR richiesto in presenza di soglia stimata adattivamente da M campioni (SNR_M) e SNR richiesto in presenza di soglia fissa (SNR_{∞}).

Fissato il livello di falso allarme le perdite sono tanto minori quanto maggiore è M (M=∞ equivale a disturbo noto).

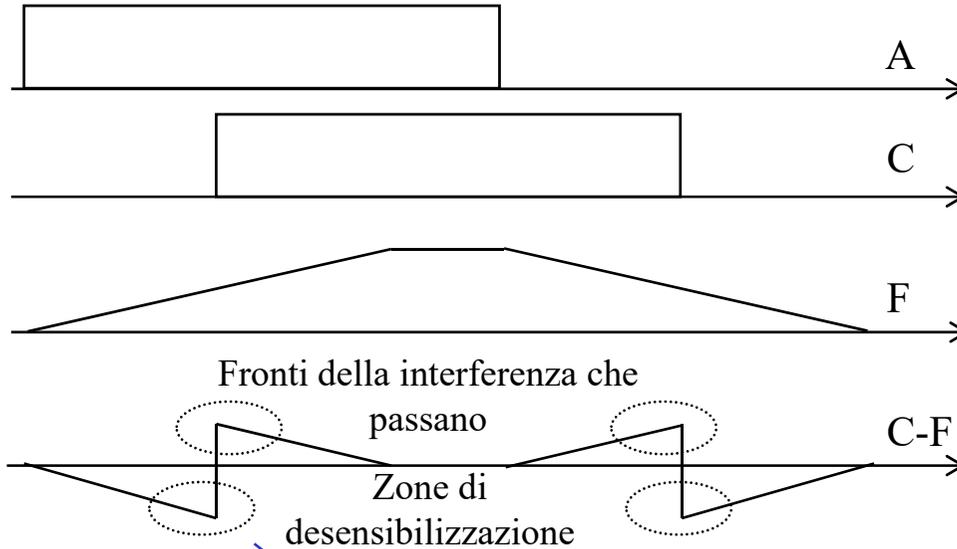
CA-CFAR (V)

Problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento

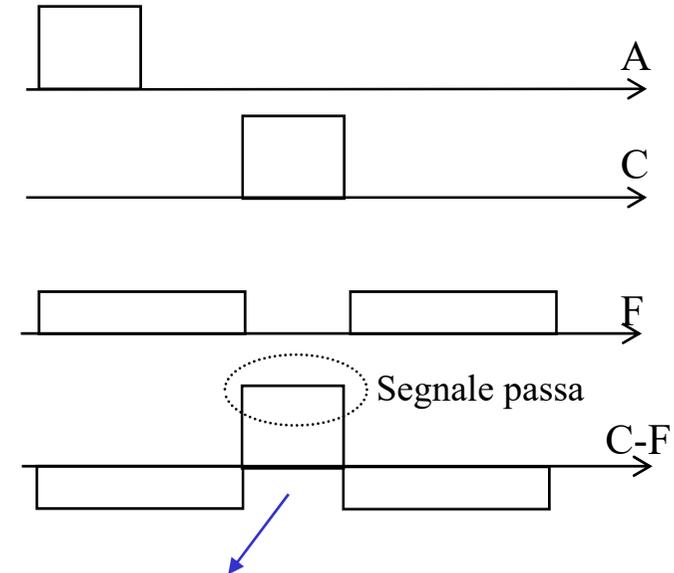
From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento



Interferenza con durata 5τ :



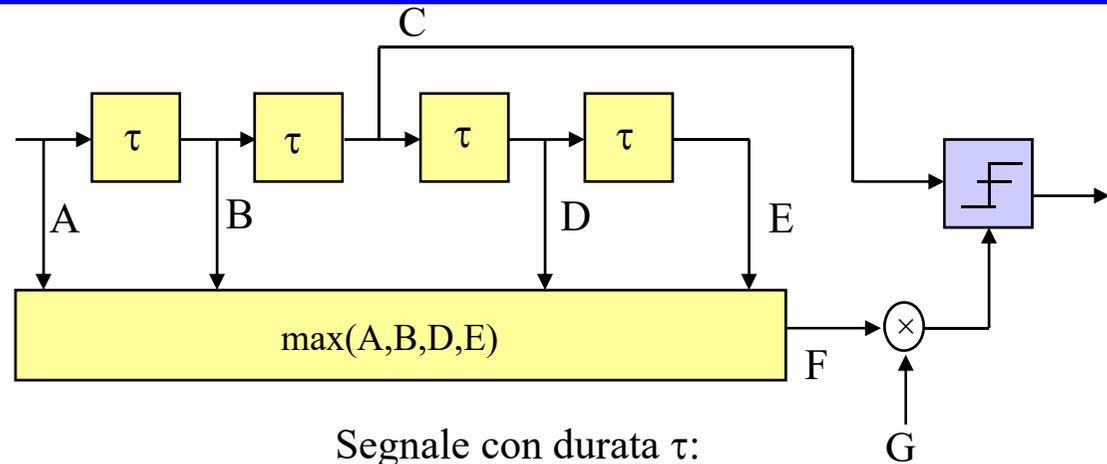
Segnale con durata τ :



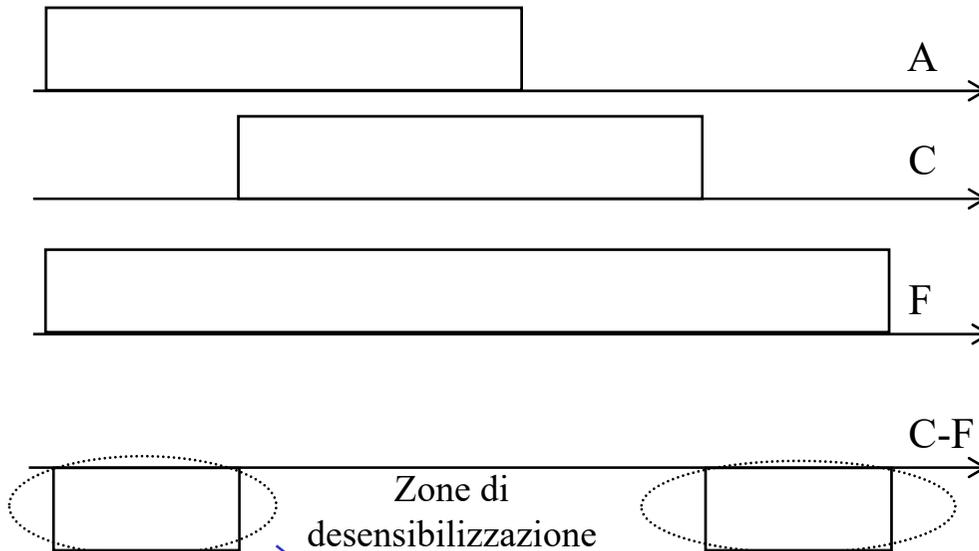
Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

GO-CFAR

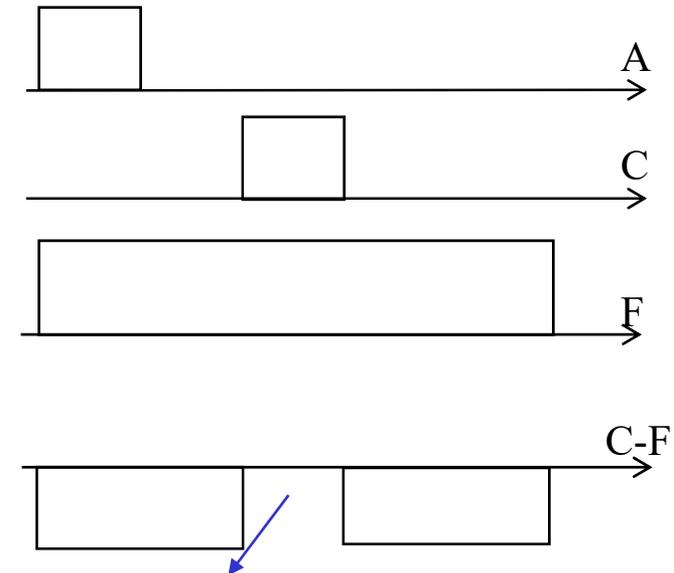
Greatest Of (GO) affronta il problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento



Interferenza con durata 5τ :



Segnale con durata τ :



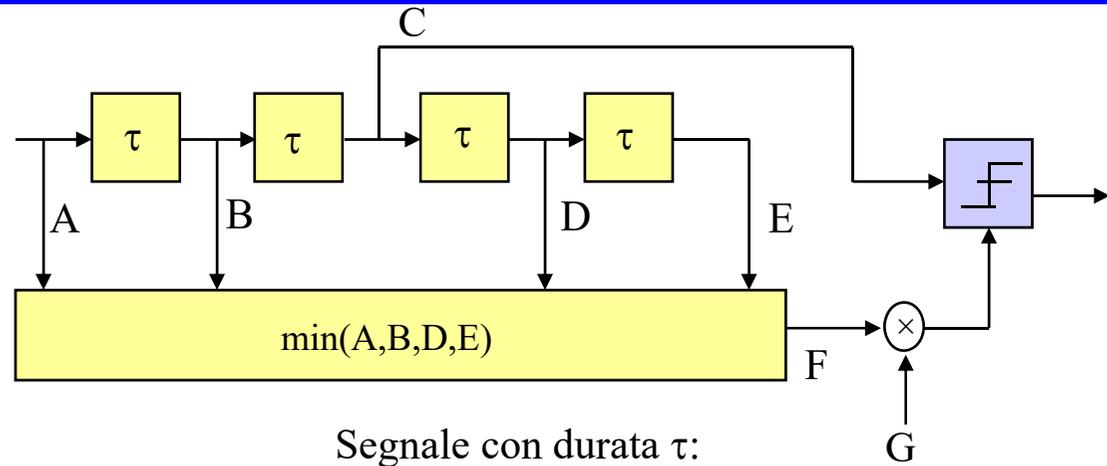
Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi

Radiotecnica e Radiolocalizzazione

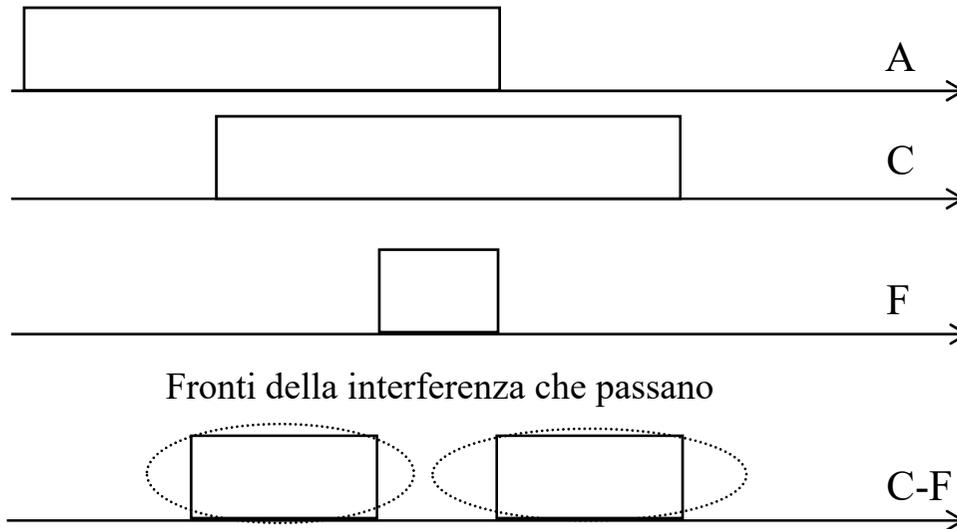
all'inizio della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

SO-CFAR

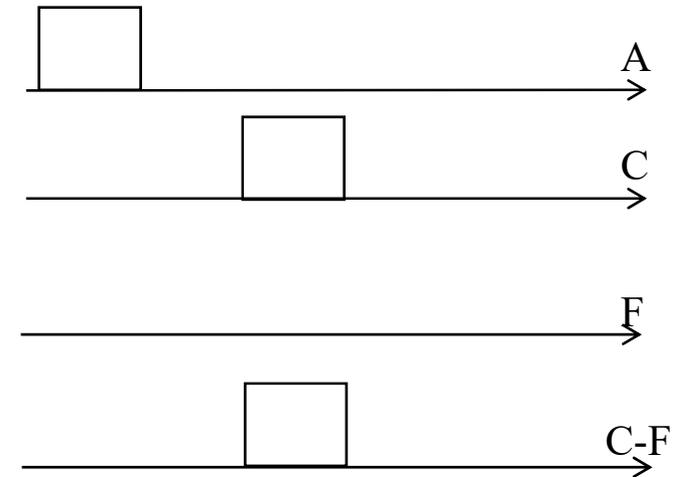
Smallest Of (SO) affronta il problema dei bersagli multipli



Interferenza con durata 5τ :



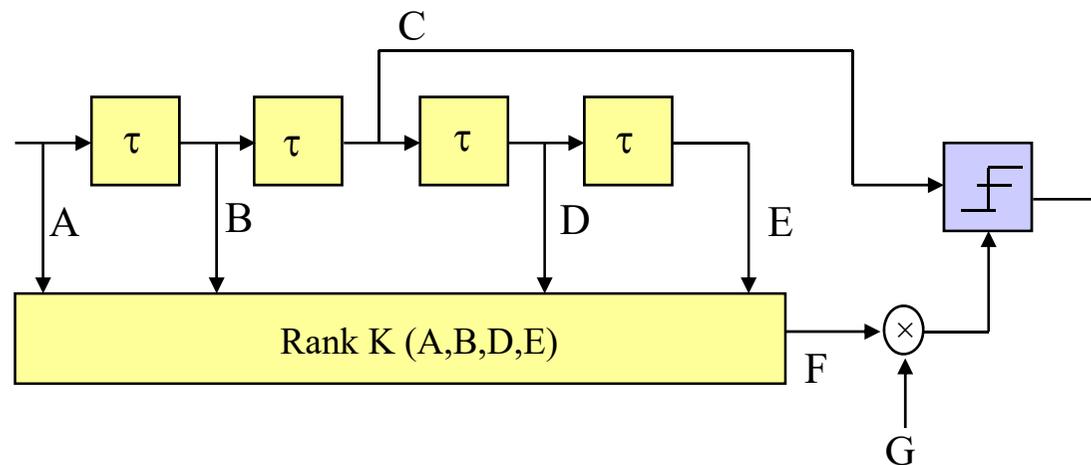
Segnale con durata τ :



OS-CFAR

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

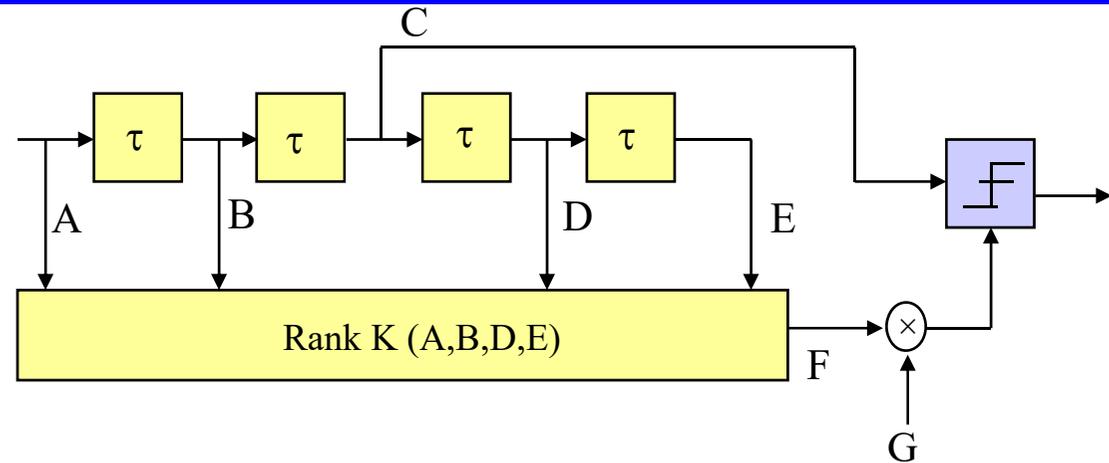
$K=M \rightarrow GO$

$K=1 \rightarrow SO$

OS-CFAR (I)

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e di utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

$K=M \rightarrow$ GO

$K=1 \rightarrow$ SO

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} [P(x)]^{K-1} [1-P(x)]^{M-K} p(x)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \quad P(x) = \int_0^x p(x') dx' = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma}(M-K)} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

OS-CFAR (II)

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_0^{\infty} \left[\int_{Gx}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+G)} dy = \\ &= K \binom{M}{K} \frac{(M-K+G)!(K-1)!}{(M+G)!} = \frac{(M-K+G)! M!}{(M+G)!(M-K)!} \end{aligned}$$