Gestione della soglia di Rivelazione

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 (a=0) ho un Falso Allarme se

$$z = \left|\tilde{z}\right| = \left|d_f(t)\right| > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z}\,|\,H_0) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|\tilde{z}\right|^2\right\} \Rightarrow p_z(z|\,H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

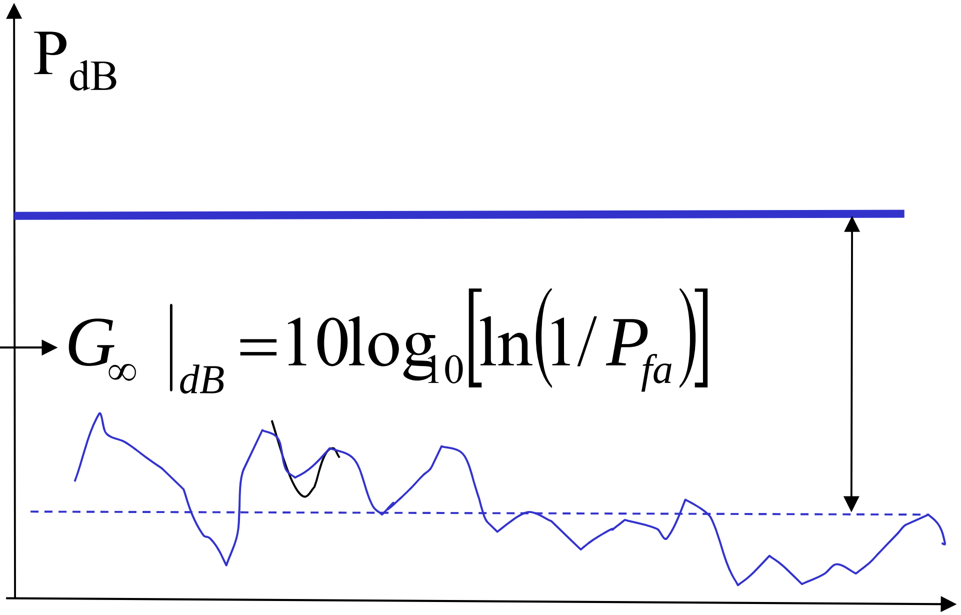
$$\boxed{P_{fa} = \Pr ob\{z > T\,|\,H_0\} = \int_T^{\infty} p_z(z|\,H_0)\,dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}}$$

Scelta della soglia fissa

$$P_{fa} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}} \longrightarrow \frac{T^2}{\sigma_d^2} = -\ln P_{fa}$$

$$\boxed{T = \sigma_d \cdot \sqrt{-\ln P_{fa}}}$$

$$\boxed{T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa})}$$



$$\rightarrow G_\infty \big|_{dB} = 10\log_{10}[\ln(1/P_{fa})]$$

$$\rightarrow \sigma_d^2\big|_{dB}$$

Livello di potenza noto

Scelta della soglia – stima del disturbo

$$\boxed{T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln\left(1/P_{fa}\right)} \rightarrow G_\infty\big|_{dB}$$

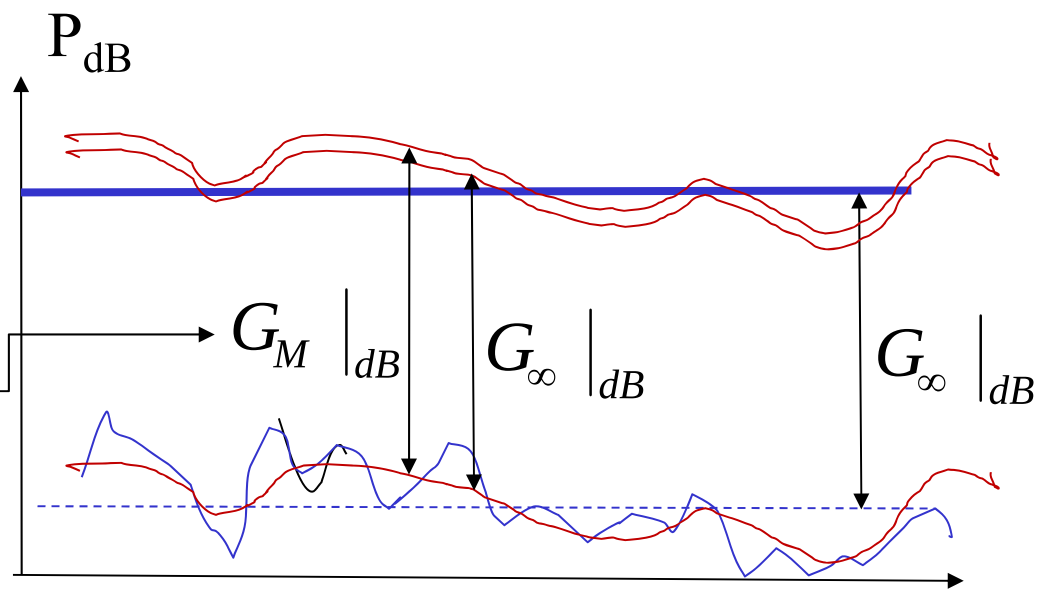
$$\sigma_d^2\Big|_{dB}$$

Livello di potenza noto

$$\boxed{T^2 = \hat{\sigma}_d^2 \cdot G_M} \rightarrow G_M\big|_{dB}$$

$$\hat{\sigma}_d^2\Big|_{dB}$$

Livello di potenza stimato



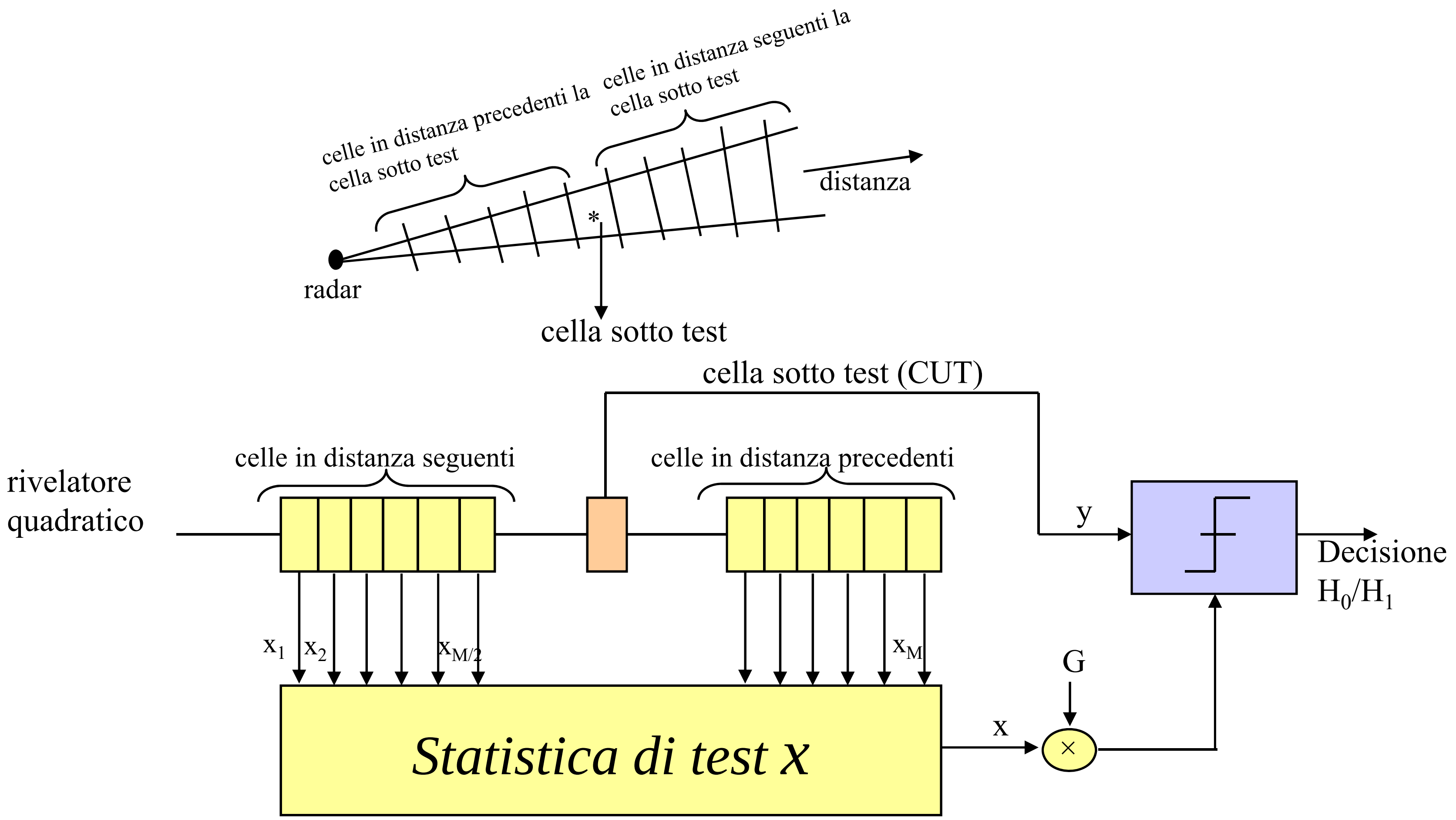
Incremento di P_{fa} per stima disturbo

$$P_{fa} = \frac{1}{2} e^{-\frac{G\cdot(\sigma_d^2+\Delta)}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{G\cdot(\sigma_d^2-\Delta)}{\sigma_d^2}} = \frac{1}{2} e^{-G-\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-G+\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} =$$

$$= e^{-G}\ \frac{1}{2}\left[e^{-\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + e^{\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}}\right] = e^{-G}\ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}\right)^2 + 1 + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}\right)^2\right] =$$

$$= e^{-G}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}\right)^2\right]$$

Autogate (I)



G = Guadagno che determina la P_{fa}

Autogate (II)

Probabilità di falso allarme:

$$P_{fa} = \int_0^\infty \left[\int_{G\cdot x}^\infty p_y(y/H_0)dy \right] p_x(x)\,dx$$

DDP della cella sotto test

DDP della statistica di test

Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^\infty \left[\int_{G\cdot x}^\infty p_y(y/H_1)dy \right] p_x(x)\,dx$$

CA-CFAR (I)

Statistica di test

$$x = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M} x_i = \frac{1}{M}x'$$

- Ipotesi: disturbo gaussiano

$$p_y(y/H_0) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i}{\sigma^2}} \quad x_i \geq 0, i = 1 \ldots M$$

⇒ M variabili aleatorie indipendenti identicamente distribuite

Per l'ipotesi di indipendenza statistica:
densità di probabilità = convoluzione delle singole densità

⇒ $$p_{x'}(x') = p_{x_1}(x') * p_{x_2}(x') \ldots * p_{x_M}(x')$$

Funzione caratteristica:

$$C_{x'}(u) = C_{x_1}(u) \cdot C_{x_2}(u) \cdot \ldots \cdot C_{x_M}(u) = \left[C_{x_i}(u)\right]^M = \left[\frac{1/\sigma^2}{1/\sigma^2 - ju}\right]^M$$

⇒ antitrasformando

$$\begin{cases} p_{x'}(x') = \dfrac{1}{(M-1)!}\dfrac{1}{\sigma^2}\left(\dfrac{x'}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}} \quad x' \geq 0 \\ x = \dfrac{x'}{M} \Rightarrow p_x(x) = M p_{x'}(Mx) \end{cases}$$

CA-CFAR (II)

$$P_{fa}=\int_0^{\infty}\left[\int_{Gx}^{\infty}\frac{1}{\sigma^2}e^{-\frac{y}{\sigma^2}}dy\right]p_x(x)dx=\int_0^{\infty}e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}}p_x(x)dx=\int_0^{\infty}e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}}\frac{M}{(M-1)!}\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1}e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}}dx=$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{M}{(M-1)!}\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1}e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M+G)}dx=\left(\frac{M}{M+G}\right)^M\underbrace{\int_0^{\infty}\frac{1}{(M-1)!}\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^{M-1}e^{-\frac{z}{\sigma^2}}dz}_{\text{Integrale di una densità di probabilità}}=\boxed{\left(1+\frac{G}{M}\right)^{-M}}$$

z=x(M+G)

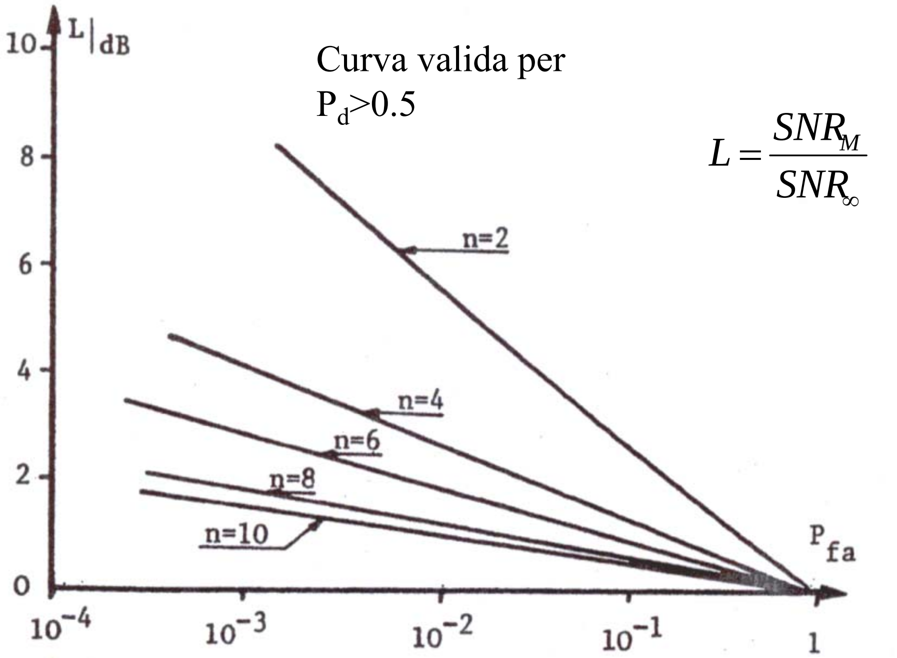
Fissato il tasso di falsi allarmi desiderato e fissato il valore di M resta fissato il valore da dare al guadagno G.

From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento

Probabilità di falso allarme dipende solo da G e da M ed è indipendente dal livello del disturbo ⇒ **CFAR: Constant False Alarm Rate** indipendente da variazioni spaziali o temporali del livello del disturbo (la soglia si adatta a variazioni spaziali e/o temporali di σ^2).

CA-CFAR (III)

- Probabilità di rivelazione: $$P_d = \int_0^{\infty} \left[\int_{Gx}^{\infty} p_y(y/H_1)dy \right] p_x(x)dx$$
- soglia fluttuante $\rightarrow$ perdite in sensibilità (tutto va come se ci fosse una soglia fissa più un rumore additivo dovuto alla fluttuazione della stima)

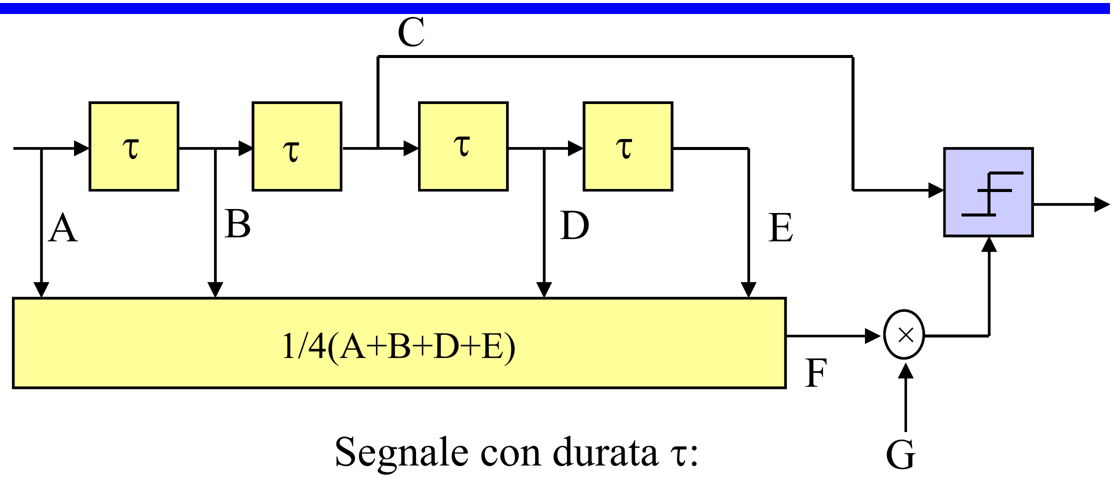


Perdite in sensibilità: rapporto tra SNR richiesto in presenza di soglia stimata adattivamente da M campioni (SNR_M) e SNR richiesto in presenza di soglia fissa (SNR_∞).

Fissato il livello di falso allarme le perdite sono tanto minori quanto maggiore è M ($M=\infty$ equivale a disturbo noto).

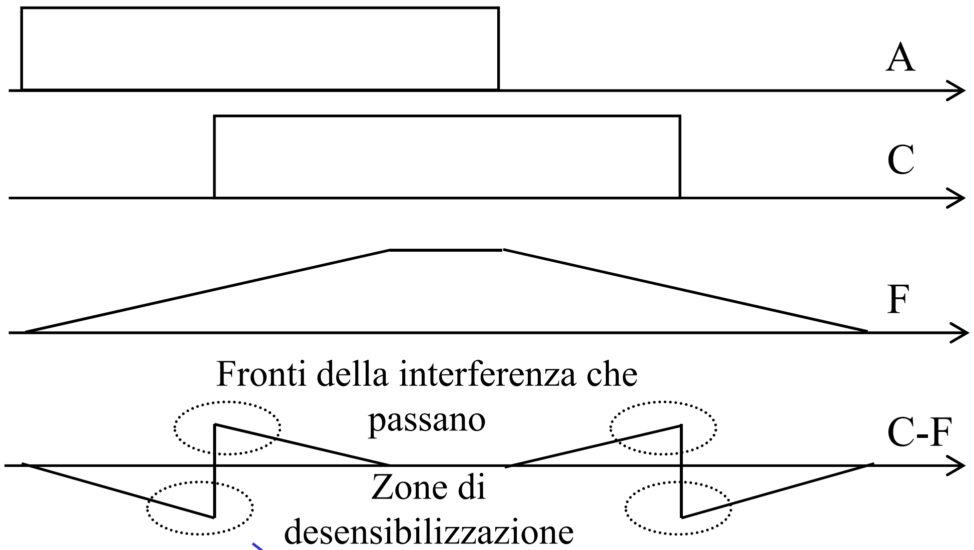
CA-CFAR (V)

Problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento

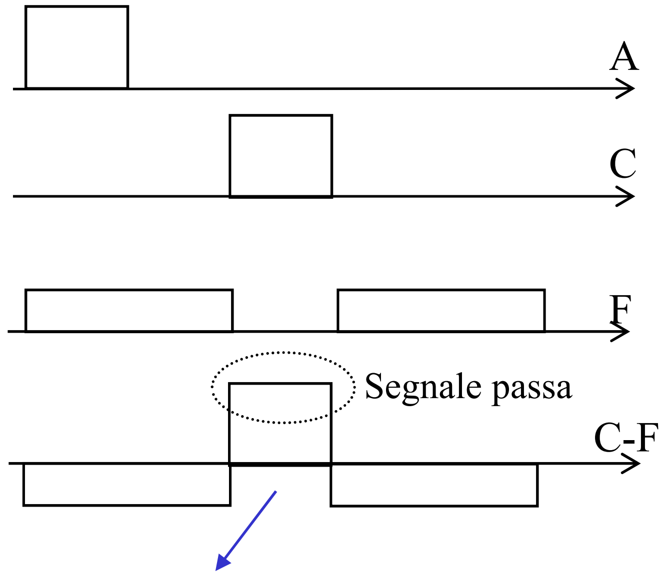


From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento

Interferenza con durata 5τ:



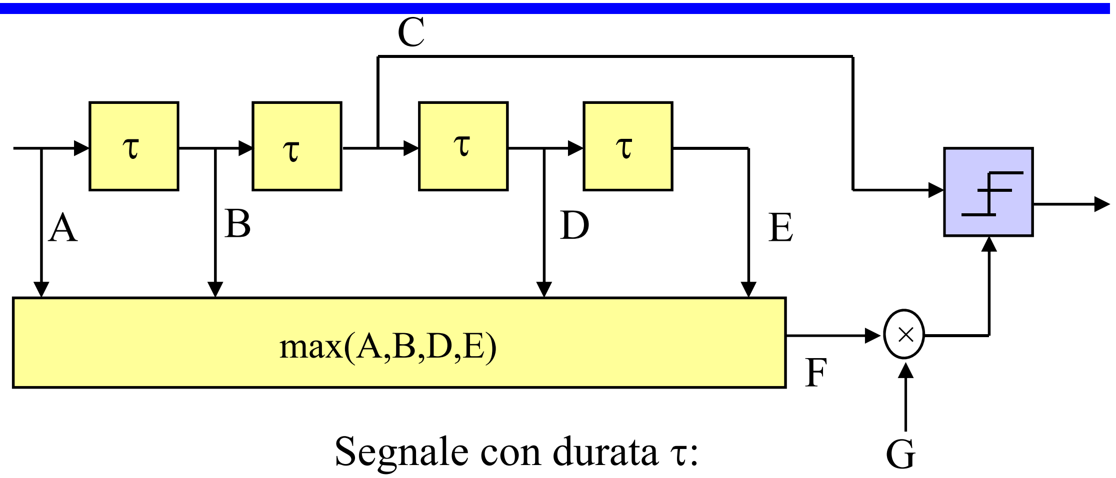
Segnale con durata τ:



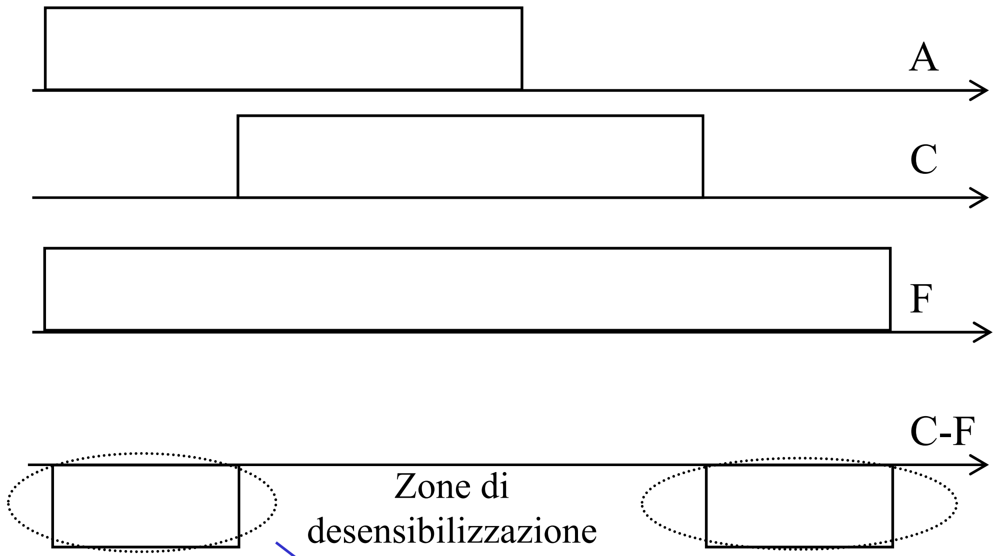
Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

GO-CFAR

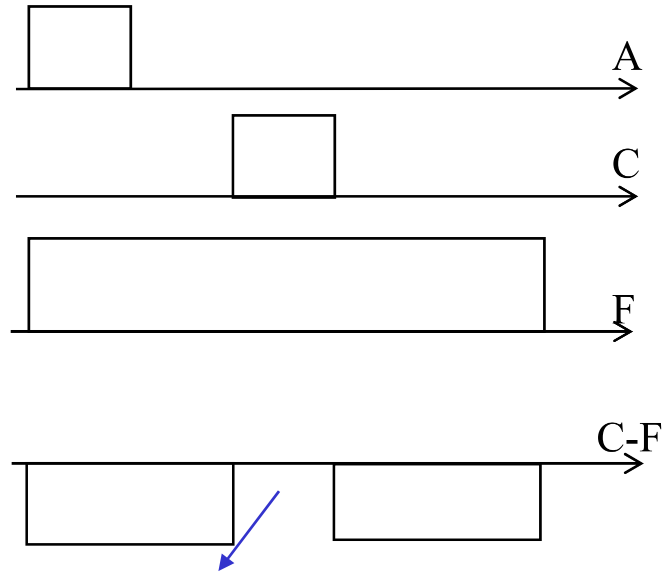
Greatest Of (GO) affronta il problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento



Interferenza con durata 5τ:



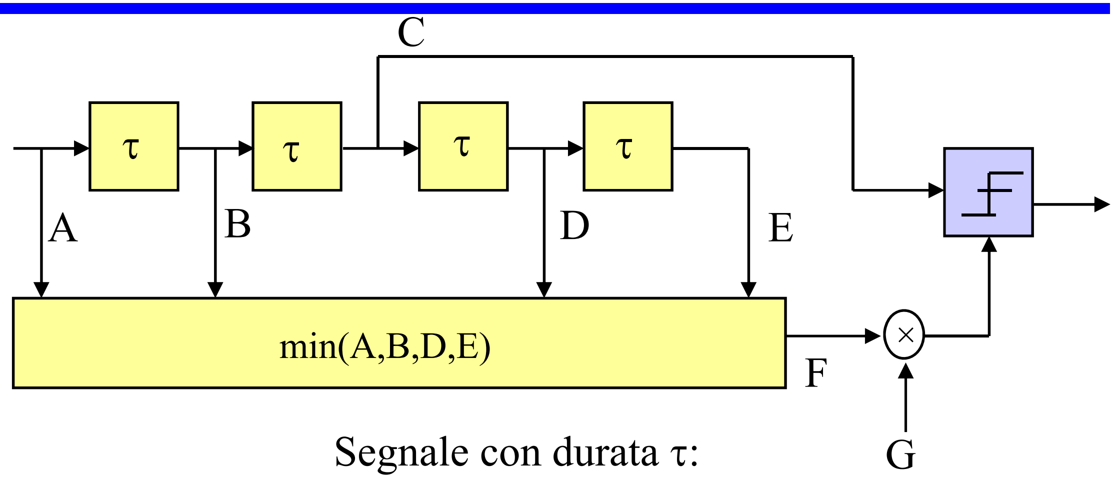
Segnale con durata τ:



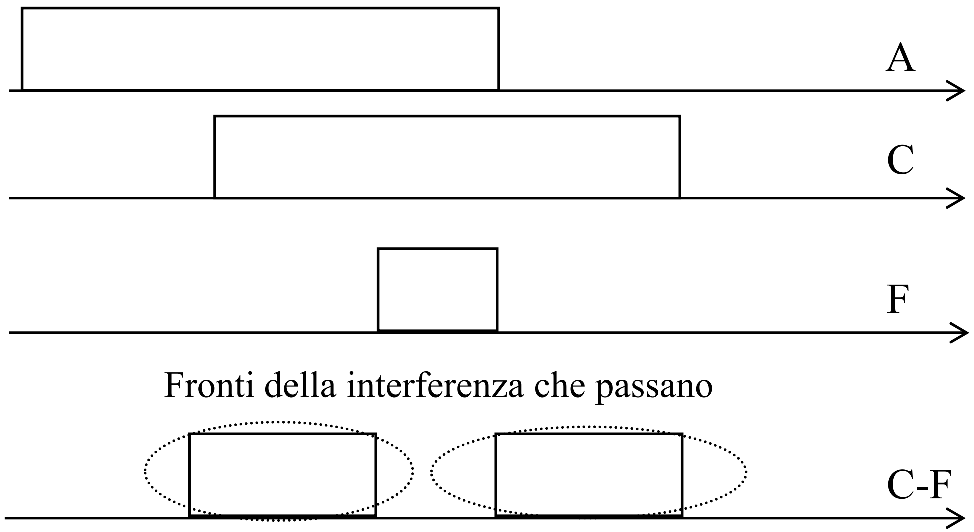
Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

SO-CFAR

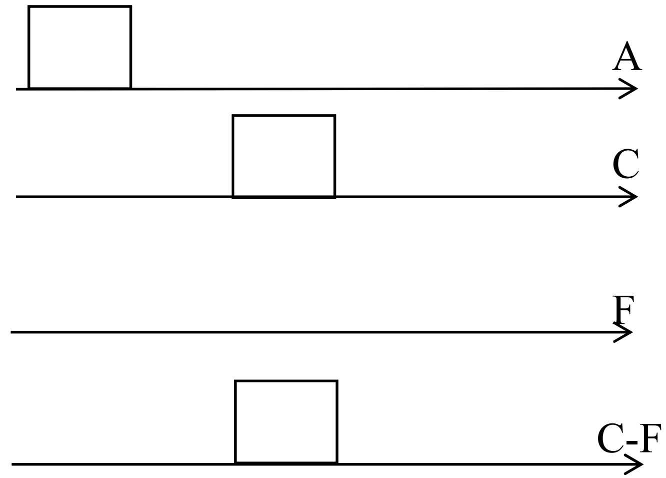
Smallest Of (SO) affronta il problema dei bersagli multipli



Interferenza con durata 5τ:



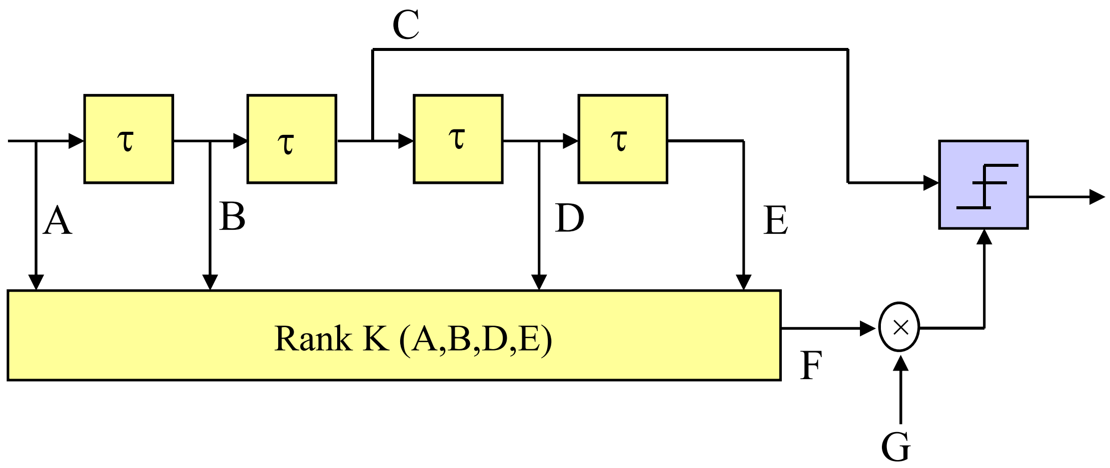
Segnale con durata τ:



OS-CFAR

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e d utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

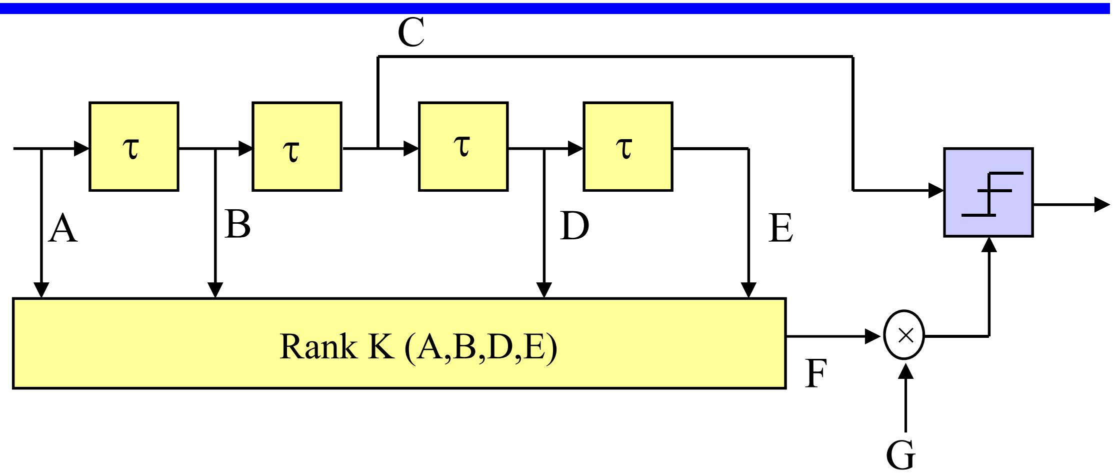
K=M → GO

K=1 → SO

OS-CFAR (I)

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e d utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

K=M → GO

K=1 → SO

$$p_x(x) = p_K(x) = K\binom{M}{K}\left[P(x)\right]^{K-1}\left[1-P(x)\right]^{M-K} p(x)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}} \qquad P(x) = \int_0^x p(x')\,dx' = 1-e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$p_x(x) = p_K(x) = K\binom{M}{K}\left[1-e^{-\frac{x}{\sigma}}\right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma}(M-K)}\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

OS-CFAR (II)

$$P_{fa} = \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x)dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx =$$

$$= -\int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+G)} dy =$$

$$= K \binom{M}{K} \frac{(M-K+G)!\,(K-1)!}{(M+G)!} = \frac{(M-K+G)!\,M!}{(M+G)!(M-K)!}$$