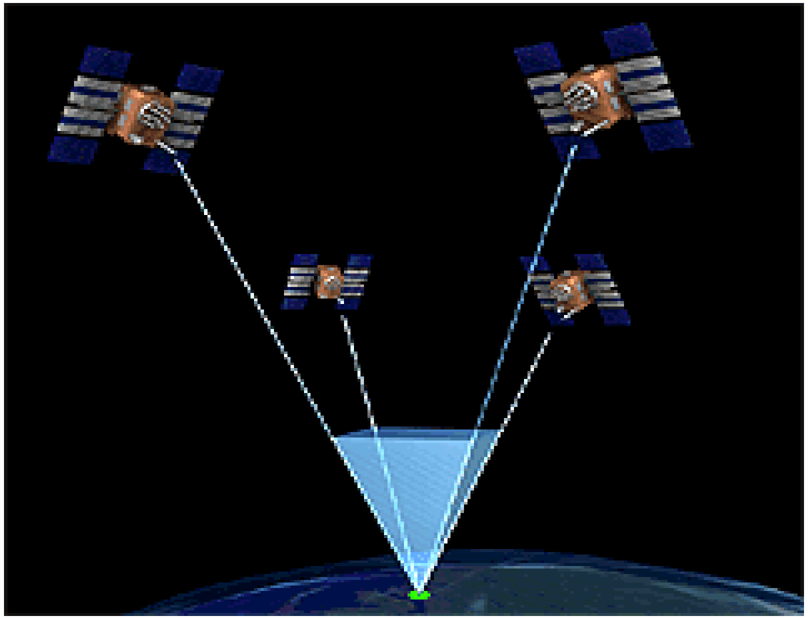
La Soluzione Navigazionale per La Radiolocalizzazione satellitare

Calcolo della posizione con il codice C/A



- *Misura della distanza dai satelliti*
- *Errori di misura della distanza: orologio del ricevitore*
- *Il sistema di equazioni degli pseudorange*
- *Inversioni delle equazioni di pseudorange: calcolo della posizione*

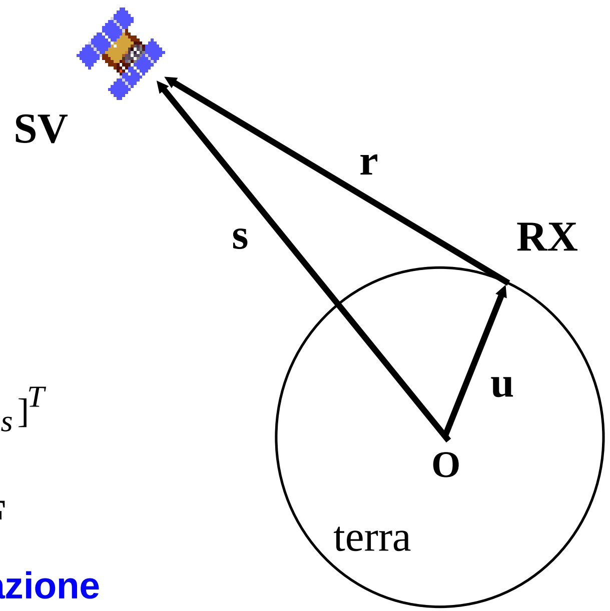
True range: distanza fra SV ed RX

- La distanza r fra SV ed RX può essere scritta in termini vettoriali come

$$r = \|\mathbf{r}\| = \|\mathbf{s} - \mathbf{u}\| = \sqrt{(x_s - x_u)^2 + (y_s - y_u)^2 + (z_s - z_u)^2}$$

il modulo (norma) del vettore **r** pari alla **differenza (vettoriale)** fra:

- vettore **s** = **posizione del SV**: noto
- vettore **u** = **posizione del RX** (utente): da determinare



$\mathbf{s} = [x_S, y_S, z_S]^T$

$\mathbf{u} = [x_u, y_u, z_u]^T$

In coordinate ECEF

Pseudorange: distanza stimata fra SV e RX

• La **distanza misurata** ρ fra SV ed RX (**pseudorange**) differisce dalla distanza vera r per la presenza di contributi di ritardo di tre tipi:

a) ritardi dovuti al RX (comuni a tutti gli pseudorange misurati dallo stesso RX)

- errore dell'orologio (al quarzo) del RX
- ritardi hardware del ricevitore
- rumore termico

b) ritardi dovuti al SV (simili per gli pseudorange misurati per lo stesso SV)

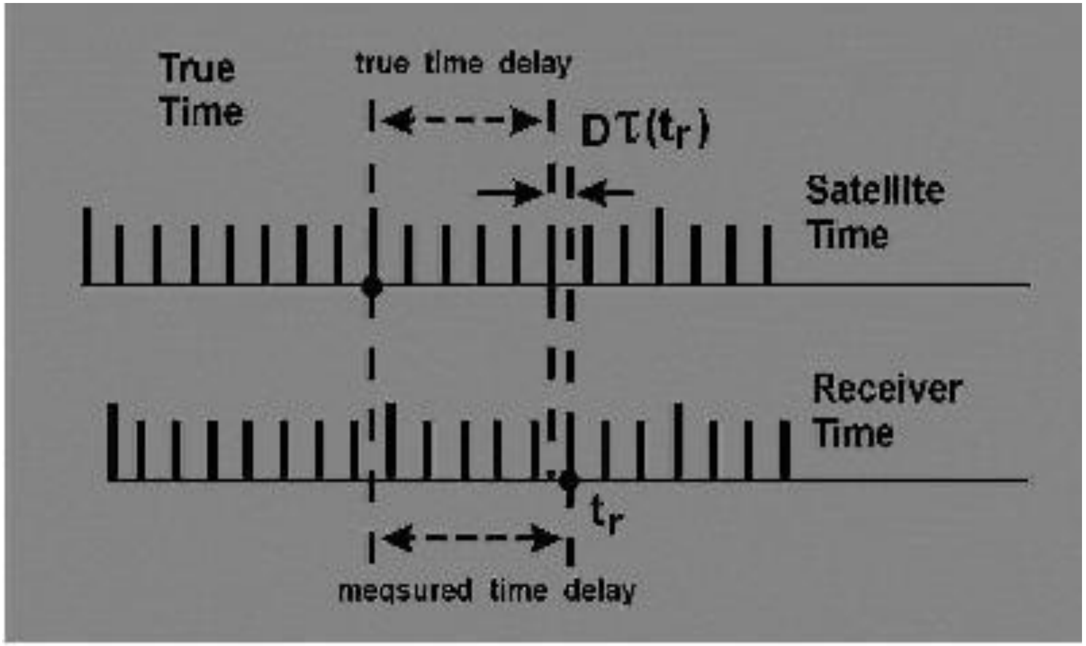
- errore dell'orologio (atomico) del SV
- errore nelle effemeridi

c) ritardi dovuti all'osservazione (legati a combinazione di RX e SV e spesso a variazione lenta)

- ritardo dovuto alla ionosfera
- ritardo dovuto alla troposfera
- ritardo dovuto al multipath

Errore di orologio del RX (I)

- assumiamo che l'orologio del SV sia perfetto: "satellite time" coincidente con "true time"
- l'orologio del RX ha un errore $t_u(t_R)$ all'istante della misura t_R

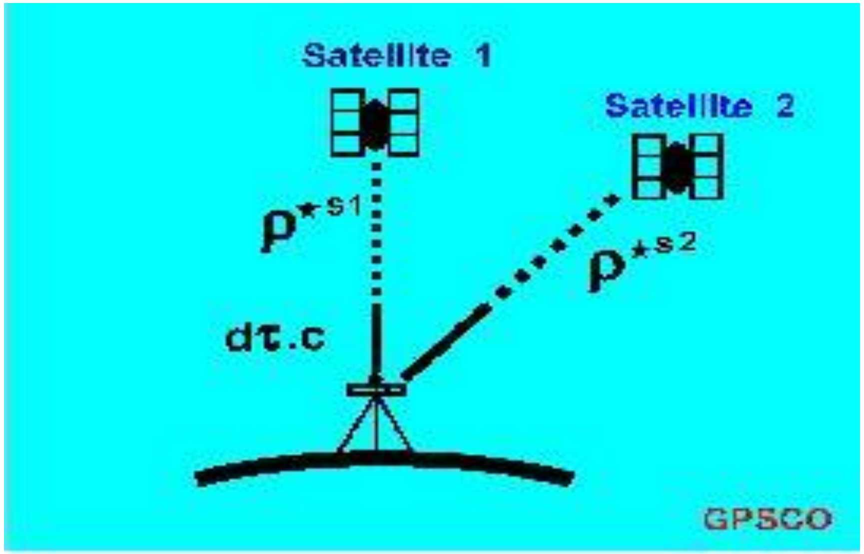


$$\rho(t) = r(t) + c \cdot t_u(t_R)$$

- se l'orologio del RX è ***lento*** (valori positivi di t_u), lo pseudorange misurato è troppo ***lungo***
- se l'orologio del RX è ***veloce*** (valori negativi di t_u), lo pseudorange misurato è troppo ***corto***

Errore di orologio del RX (II)

• Se si effettuano misure contemporanee con più SV,
l'errore di orologio $t_u(t_R)$ del RX è lo stesso per tutti,
anche se il tempo di trasmissione dagli SV è diverso



$$\rho_1(t_1) = r_1(t_1) + c \cdot t_u$$
$$\rho_2(t_2) = r_2(t_2) + c \cdot t_u$$
$$\rho_3(t_3) = r_3(t_3) + c \cdot t_u$$
$$\rho_4(t_4) = r_4(t_4) + c \cdot t_u$$

• E' il **contributo di ritardo più grande** (gli altri sono trascurabili al suo confronto)

• Essendo uguale per diversi pseudorange **può essere considerato il 4° parametro da stimare** (oltre alle 3 coordinate spaziali che definiscono la posizione di RX)

Equazioni degli pseudorange (I)

• Assumendo la sola presenza di errore dell'orologio del ricevitore, si possono scrivere le seguenti equazioni per gli pseudorange:

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} = \rho_1 - c \cdot t_u \\
r_2 &= \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} = \rho_2 - c \cdot t_u \\
&\vdots \\
r_N &= \sqrt{(x_N - x_u)^2 + (y_N - y_u)^2 + (z_N - z_u)^2} = \rho_N - c \cdot t_u
\end{aligned}
$$

• Per N ≥ 4 satelliti in vista il sistema di N equazioni non lineari in 4 incognite può avere soluzione

• Per trovare la soluzione, si parte da

- una stima iniziale della posizione dell'utente $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{x}_u, \hat{y}_u, \hat{z}_u]^T$
- una stima iniziale del ritardo dell'orologio del RX $\hat{t}_u$

e si linearizza il sistema nel loro intorno:

$$
\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \Delta\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \qquad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u
$$

Equazioni degli pseudorange (II)

• la singola equazione $$\sqrt{(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2 + (z_j - z_u)^2} + c \cdot t_u = \rho_j$$

può essere linearizzata intorno alle stime iniziali come

$$\sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2} + \begin{bmatrix} \left.\frac{\partial r_j}{\partial x_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial y_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial z_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} + c \cdot \hat{t}_u + c \cdot \Delta t_u = \rho_j$$

• dunque

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial r_j}{\partial x_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial y_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial z_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_j - \hat{z}_u)^2}$$

• ed infine

$$\begin{bmatrix} \left.\frac{\partial r_j}{\partial x_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial y_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & \left.\frac{\partial r_j}{\partial z_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|$$

Equazioni degli pseudorange (III)

• per le derivate si procede come segue:

$$\left.\frac{\partial r_j}{\partial x_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} = \frac{\partial}{\partial x_u}\sqrt{(x_j - x_u)^2 + (y_j - y_u)^2 + (z_j - z_u)^2}\,\Bigg|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} =$$

$$= -\frac{2(x_j - \hat{x}_u)}{2\sqrt{(x_j - \hat{x}_u)^2 + (y_j - \hat{y}_u)^2 + (z_2 - \hat{z}_u)^2}} = -\frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\right\|}$$

•dunque

$$\left.\frac{\partial r_j}{\partial x_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} = -\frac{x_j - \hat{x}_u}{\left\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\right\|} = -a_{x\,j}$$

$$\left.\frac{\partial r_j}{\partial y_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} = -\frac{y_j - \hat{y}_u}{\left\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\right\|} = -a_{y\,j}$$

$$\left.\frac{\partial r_j}{\partial z_u}\right|_{\mathbf{u}=\hat{\mathbf{u}}} = -\frac{z_j - \hat{z}_u}{\left\|\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}}\right\|} = -a_{z\,j}$$

• dove $a_{x\,j}$, $a_{y\,j}$, $a_{z\,j}$ sono i coseni direttori del versore che dalla posizione RX approssimata punta lo SV

Equazioni degli pseudorange (IV)

- la singola equazione linearizzata può riscriversi:

$$\begin{bmatrix} -a_{xj} & -a_{yj} & -a_{zj} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix} = \rho_j - c \cdot \hat{t}_u - \left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\|$$

- ed infine

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{xj} & a_{yj} & a_{zj} & 1 \end{bmatrix}}{} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \\ -c \cdot \Delta t_u \end{bmatrix}}_{\Delta \mathbf{x}} = \underbrace{\left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_j}_{\Delta \rho_j}$$

Equazioni degli pseudorange (V)

- definendo la matrice dei coseni direttori **H** (N×4) :

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} a_{x1} & a_{y1} & a_{z1} & 1 \\ a_{x2} & a_{y2} & a_{z2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{xN} & a_{yN} & a_{zN} & 1 \end{bmatrix}$$

- ed il vettore

$$\Delta\rho = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \|\mathbf{s}_1 - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_1 \\ \vdots \\ \|\mathbf{s}_N - \hat{\mathbf{u}}\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_N \end{bmatrix}$$

- si ha

$$\boxed{\mathbf{H} \cdot \Delta\mathbf{x} = \Delta\boldsymbol{\rho}}$$

(N×4) (4×1) (N×1)

Soluzione equazioni degli pseudorange

• Per N=4, la matrice **H** è quadrata (4×4) e può essere invertita

$$\mathbf{\Delta x} = \mathbf{H}^{-1} \cdot \mathbf{\Delta \rho}$$

• per N>4, la matrice non è quadrata e ci sono più equazioni che incognite.
• Moltiplicando entrambi i membri a sinistra per $\mathbf{H}^T$, si ha

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Delta x} = \mathbf{H}^T \mathbf{\Delta \rho}$$

• $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ è quadrata ed invertibile, dunque si può scrivere (pseudoinversa di **H**)

$$\mathbf{\Delta x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{\Delta \rho}$$

• Ne segue che la stima di posizione e ritardo del clock è

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{\Delta u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \qquad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u$$

Algoritmo per il calcolo della posizione

Assegnazione stima iniziale

$$\hat{\mathbf{u}} = [\hat{x}_u,\ \hat{y}_u, \hat{z}_u]^T = [0,0,0]^T \qquad \text{centro della terra}$$

$$\hat{t}_u = 0 \qquad \text{ritardo clock RX=0}$$

Calcolo di:

- matrice **H** e
- $\Delta\rho_j = \left\| \mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{u}} \right\| + c \cdot \hat{t}_u - \rho_j$

Inversione

$$\boldsymbol{\Delta}\mathbf{x} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \boldsymbol{\Delta\rho}$$

Aggiornamento della stima

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Delta}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \hat{x}_u \\ \hat{y}_u \\ \hat{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Delta x_u \\ \Delta y_u \\ \Delta z_u \end{bmatrix} \qquad t_u = \hat{t}_u + \Delta t_u$$

$\left\| \Delta \mathbf{x} \right\| < accuratezza$

$o \quad iter \geq \max\_iter$

no

si

S
T
O
P