

---

# Rivelazione

# Rivelare la presenza del segnale utile

---

## Esempi di rivelazione della presenza del segnale

- **Radar:** rivelazione della presenza di segnale al tempo  $t_0$ ,  
→ presenza del bersaglio che lo ha riflesso a distanza  $R_0 = c t_0/2$
- **Sistema di localizzazione:** rivelazione della presenza di segnale al tempo  $t_0$ ,  
→ presenza del segnale emesso da un punto di riferimento
- **WiFi:** rivelazione della presenza del segnale di beacon  
→ inizializzazione della connessione fra dispositivo e router

# Teoria della decisione (I)

---

**Rivelazione**  $\Rightarrow$  esempio di decisione binaria: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- **segnale utile assente**: segnale ricevuto  $\equiv$  solo disturbo ( $\mathbf{H}_0$ );
- **segnale utile presente**: segnale ricevuto  $\equiv$  segnale utile più disturbo ( $\mathbf{H}_1$ );



# Prob. di rivelazione, falso allarme e miss

Si prende una decisione sulla base delle osservazioni.

In questo caso, l'osservazione è costituita dal campione dell'involuppo complesso all'istante  $t_0$  per cui si vuole rivelare la presenza del segnale:

$$\tilde{r} = \tilde{r}(t_0)$$

Decisione $\rightarrow$	$H_0$	$H_1$
Situazione reale		
$M_0$	Corretta rivelazione dell'assenza del segnale (probabilità $1-P_{fa}$ )	Falso Allarme ( $P_{fa}$ = probabilità di falso allarme)
$M_1$	Miss ( $P_{miss} = 1 - P_d$ probabilità di miss)	Corretta Rivelazione ( $P_d$ = probabilità di rivelazione)

# Teoria della decisione (II)

---

Nella decisione binaria si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi  $H_0$  ma si decide per l'ipotesi  $H_1 \Rightarrow$  il disturbo viene riconosciuto come segnale utile: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme ( $P_{fa}$ ) è data da

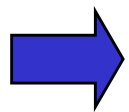
$$P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\tilde{r} / M_0) d\tilde{r}$$

**PROBABILITA'  
DI FALSO  
ALLARME**

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi  $H_1$  ma si decide per l'ipotesi  $H_0 \Rightarrow$  il segnale utile viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ( $1-P_d$ ) è data da

$$1 - P_d = \int_{\Omega_0} p(\tilde{r} / M_1) d\tilde{r}$$

**PROBABILITA' DI  
MANCATA  
RIVELAZIONE**



La partizione  $\{\Omega_0, \Omega_1\}$  dello spazio delle osservazioni  $\Omega$  dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione usato è il criterio di Neyman-Pearson.**

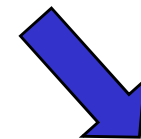
# Teoria della decisione (III)

---

Nel criterio di decisione di Neyman-Pearson la partizione è individuata in modo tale che:

- ▶ la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato ( $P_{fa} = \alpha_0$ )  $\Rightarrow$  **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;
- ▶ la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la probabilità di rivelazione ( $P_d$  max);

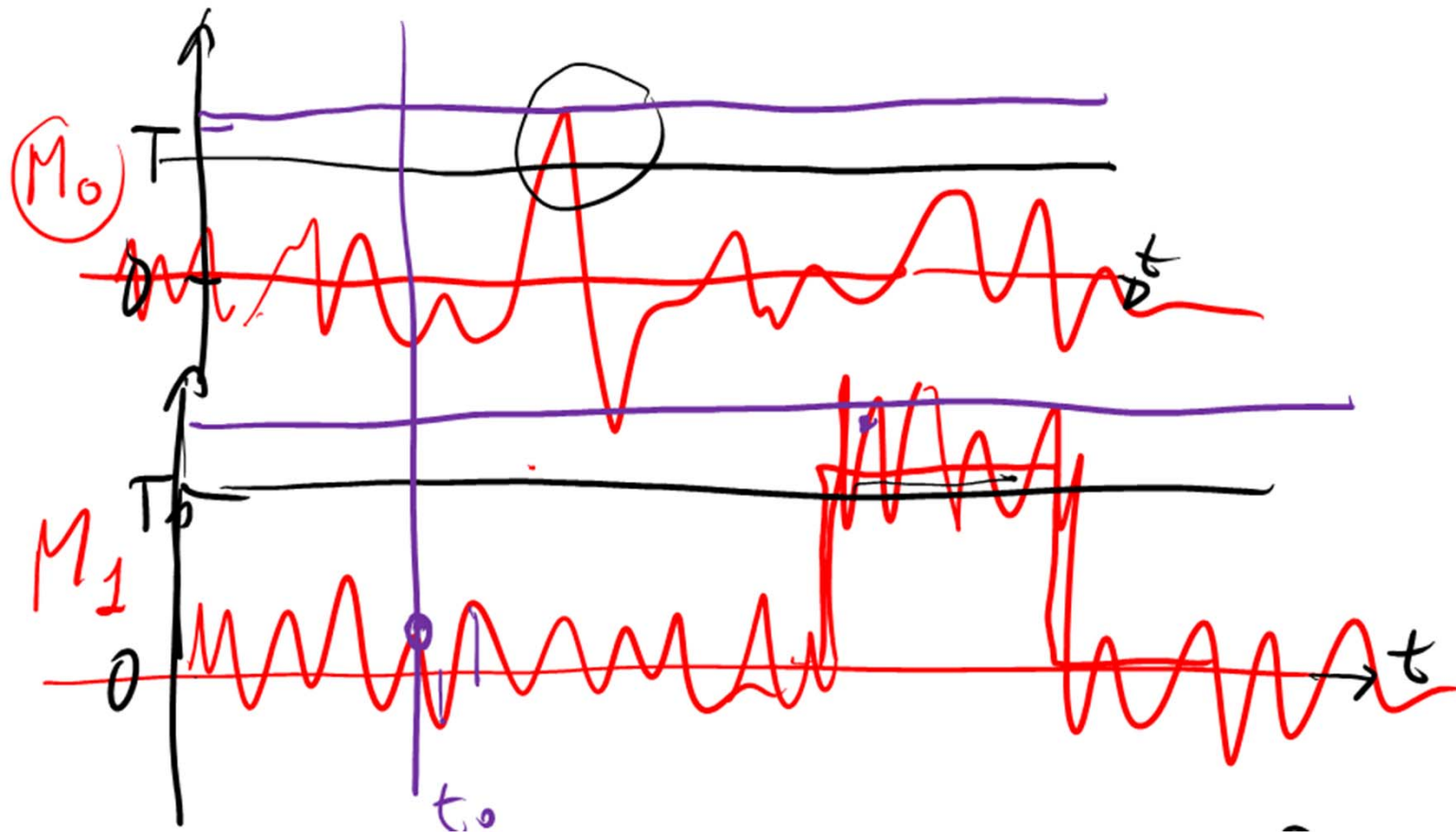
$$\left. \begin{array}{l} \{\Omega_0, \Omega_1\} \\ \text{tale che} \end{array} \right\} \begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\tilde{r} / M_0) d\tilde{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p(\tilde{r} / M_1) d\tilde{r} \quad \textit{massima} \end{cases}$$



Problema di massimizzazione vincolata  $\Rightarrow$  problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

# Decisore a soglia sul modulo

- Criterio di decisione:*
- decido per  $H_1$  se  $r = |\tilde{r}| > T$
  - decido per  $H_0$  se  $r = |\tilde{r}| < T$



# Prestazioni di rivelazione

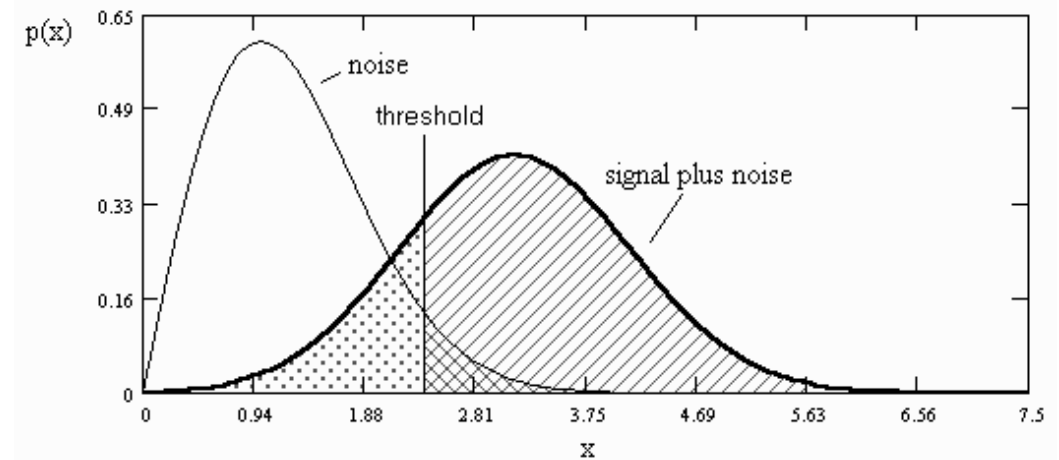
Probabilità di superare la soglia:

$$\text{Prob}\{r > T\} = \int_T^{\infty} p_r(r) dr$$

Quindi:

$$P_{fa} = \text{Prob}\{r > T \mid H_0\} = \int_T^{\infty} p_r(r \mid M_0) dr$$

$$P_d = \text{Prob}\{r > T \mid H_1\} = \int_T^{\infty} p_r(r \mid M_1) dr$$





# Ipotesi $H_0$ ( $M_0$ )

---

$$(H_0 : \underbrace{\tilde{r}} = r_I + j r_Q = \underbrace{\tilde{n}} = n_I + j n_Q$$

*disturbo  $\tilde{n}$  = variabile aleatoria Gaussiana complessa con*

*valor medio = 0*

*varianza  $\sigma_d^2$*

$$\left\{ \begin{array}{l} r_I \text{ e } r_Q \text{ sono variabili Gaussianhe reali con} \\ \text{valor medio} = 0 \\ \text{varianza } \sigma_n^2 = \sigma_d^2 / 2 \end{array} \right.$$

$$p(r_I, r_Q | H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} \exp \left\{ -\frac{r_I^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} \exp \left\{ -\frac{r_Q^2}{\sigma_d^2} \right\} = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r_I^2 + r_Q^2}{\sigma_d^2} \right\}$$

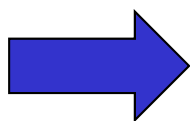
# Richiamo DDP Rayleigh

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2\right\} \quad \begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | H_0) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | H_0) dr_I dr_Q = \quad d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi$$

$$= p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r$$



$$p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} r^2\right\}$$

DDP Rayleigh

$$p_r(r | H_0) = \int_0^{2\pi} p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} r^2\right\} d\phi = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

# Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi  $H_0$  ( $a=0$ ) ho un Falso Allarme se

$$r = |\tilde{r}| > T$$

$$p_r(r | H_0) = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$


$$\text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^{\infty} p_r(r | H_0) dr = \int_T^{\infty} \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr = \int_{T^2/\sigma_d^2}^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^{\infty} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^{\infty} p_r(r | H_0) dr = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

# Probabilità di falso allarme $P_{fa}$

$$P_{fa} = \int_T^{\infty} p_r(r / M_0) dr = \int_T^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia  $T$  e dalla potenza del rumore  $\sigma_n^2$ : (disturbo  $\sigma_n^2 = \sigma_d^2/2$ ) fissato il valore di  $P_{fa}$  desiderata e nota la potenza di rumore  $\sigma_n^2$  risulta individuato il livello di soglia  $T$ .


$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln \left( \frac{1}{P_{fa}} \right)}$$

$\sigma_n \quad \sigma_n$

$$P(r) = \begin{cases} \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} & r > 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases}$$

$r > 0$   
Rayleigh  
altro

$$I = r^2 = |r|^2$$

$$I = r^2$$

$$dI = 2r dr$$

$$\frac{dr}{dI} = \frac{1}{2r}$$

$$P(r) dr = P(I) dI$$

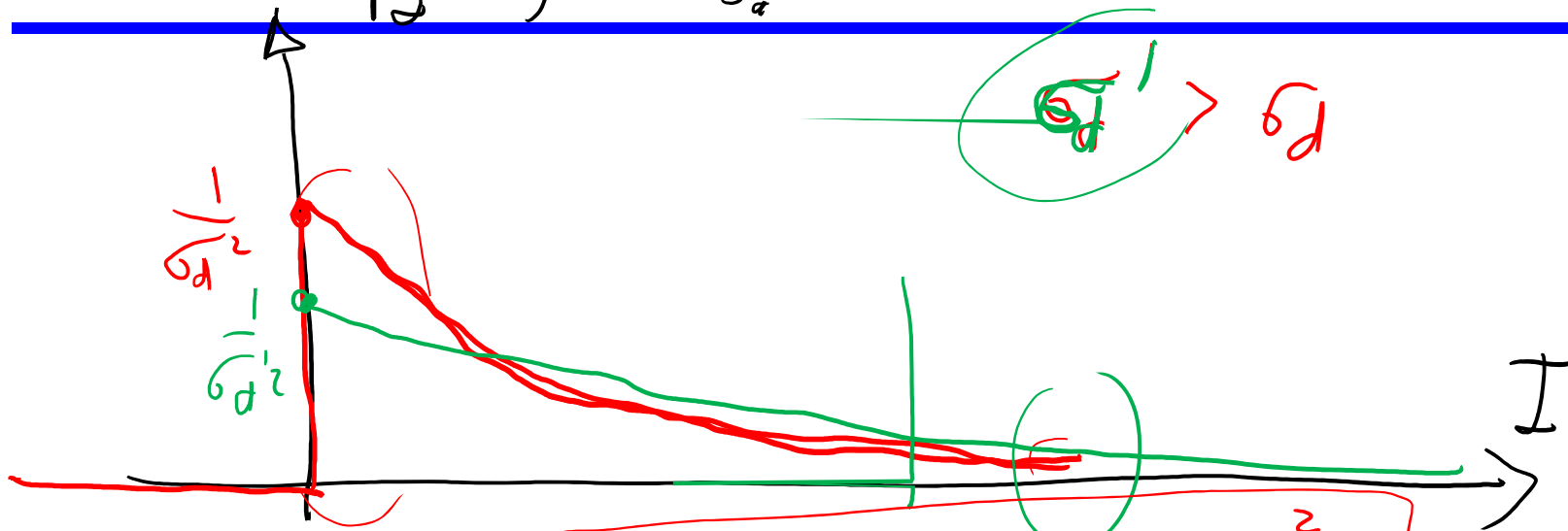
$$P(I) = \left[ P(r) \frac{dr}{dI} \right]$$

$$= r = \sqrt{I}$$

$$P(I) = \frac{2\sqrt{I}}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \frac{1}{2\sqrt{I}} = \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \quad I > 0$$

altro

$$p_{\bar{I}}(\bar{I}) = \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{\bar{I}}{\sigma_d^2}} \quad \bar{I} > 0$$



$$P(r) = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$



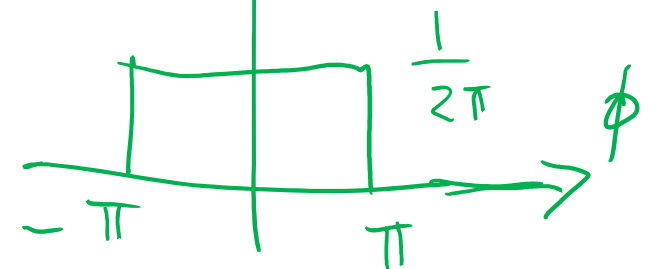
$$P(r, \phi) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_\phi(\phi) = \int_0^{\infty} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr^2$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[ -e^{-t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\pi} \left[ 0 - (-1) \right] = \frac{1}{2\pi}$$

$t = \frac{r^2}{\sigma_d^2}$   
 $\uparrow$   
 $P_\phi(\phi)$

$$= \frac{1}{2\pi} [1] = \frac{1}{2\pi}$$



$$P(I) = \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}}$$

$$r > T$$

$$P_{\text{out}} = P_{\text{in}} \left\{ |\tilde{r}| = r > T \right\}$$

$$P_{\text{in}} \left\{ I > T^2 \right\}$$



$$r^2 > T^2$$

$$I > T^2$$

$$P_{\text{out}} = \int_{T^2}^{\infty} P_{\text{in}}(I) dI = \int_{T^2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} dI = \left[ -e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \right]_{T^2}^{\infty} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$



# Ipotesi $H_1$ ( $M_1$ )

$$H_1: \tilde{r} = r_I + j r_Q = \tilde{a} + \tilde{n} = a_I + n_I + j(a_Q + n_Q)$$

disturbo  $\tilde{r}$  = variabile aleatoria Gaussiana complessa con

valor medio =  $\tilde{a} = a_I + j a_Q$

varianza  $\sigma_d^2$

$r_I$  e  $r_Q$  sono variabili Gaussianhe reali con

valor medio =  $a_I$  e  $a_Q$

varianza  $\sigma_n^2 = \sigma_d^2 / 2$

$$p(r_I, r_Q | H_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} \exp\left\{-\frac{(r_I - a_I)^2}{\sigma_d^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} \exp\left\{-\frac{(r_Q - a_Q)^2}{\sigma_d^2}\right\} = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{(r_I - a_I)^2 + (r_Q - a_Q)^2}{\sigma_d^2}\right\}$$

# Richiamo DDP Rice (I)

$$p(\tilde{r} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r} - a|^2 \right\}$$

$$\begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | a; H_1) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | \tilde{a}; H_1) dr_I dr_Q =$$

$$= p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | \tilde{a}; H_1) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | \tilde{a}; H_1) dr d\phi$$

$$d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | \tilde{a}; H_1) \cdot r$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |r \cdot \cos \phi + j r \cdot \sin \phi - a|^2 \right\} =$$

$$= \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |\tilde{a}|^2 - 2|\tilde{a}|r \cdot \cos(\phi - \angle \tilde{a}) \right] \right\}$$

$p(r, \phi)$

$$\frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{1}{\sigma_d^2} \underbrace{|r \cos \phi + j r \sin \phi - \tilde{\alpha}|}_{\alpha}^2}$$

$$|\alpha - \beta|^2$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2 \operatorname{Re}\{\alpha \beta^*\}$$

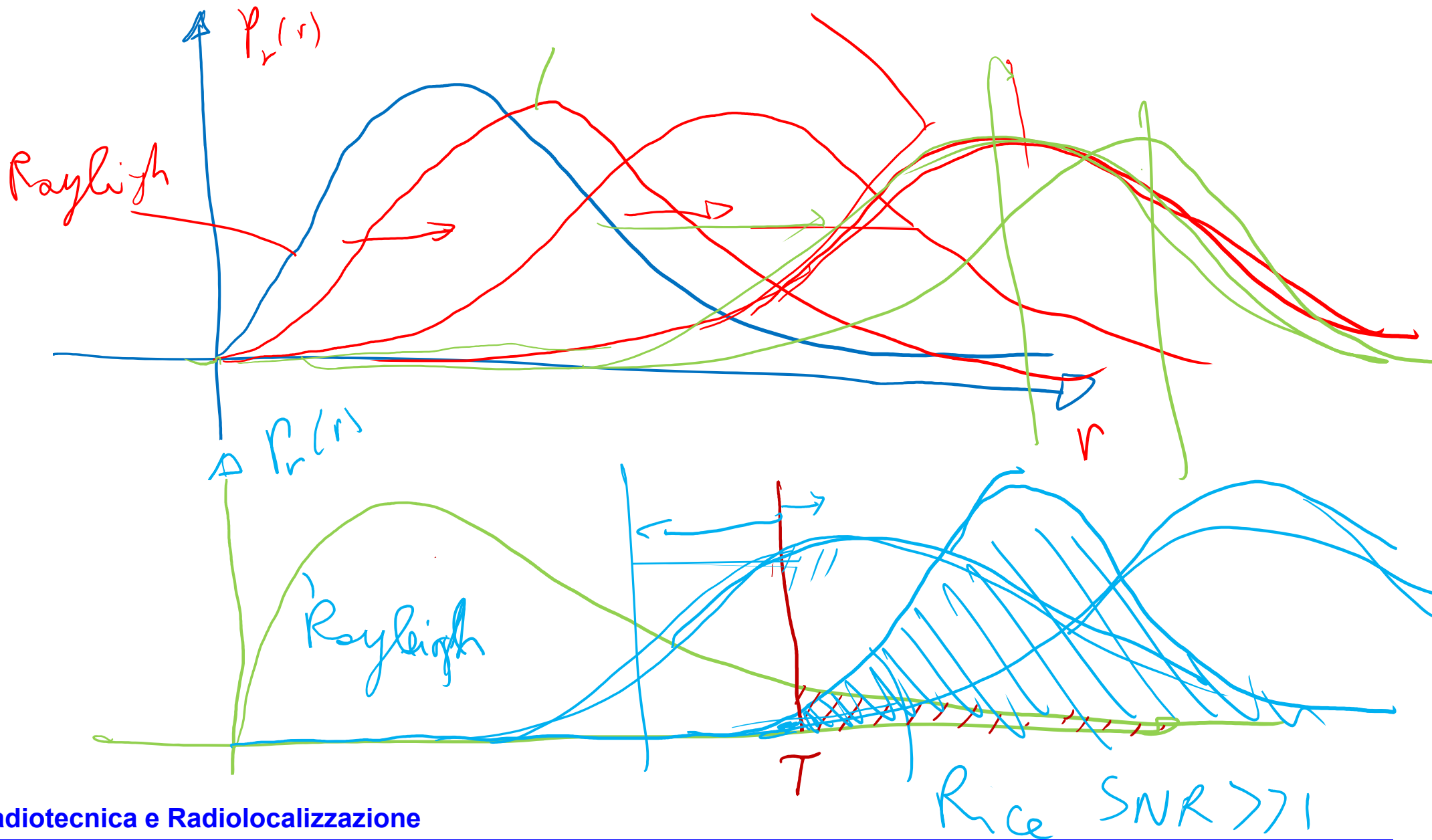
$$P(r, \phi) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{1}{\sigma_d^2} \left\{ r^2 + |\tilde{\alpha}|^2 - 2r|\tilde{\alpha}| \cos(\phi - \angle \tilde{\alpha}) \right\}}$$

$$|\alpha| e^{j\angle \alpha} \quad |\beta| e^{-j\angle \beta}$$

$$-2|\alpha||\beta| \operatorname{Re}\{e^{j(\angle \alpha - \angle \beta)}\}$$

$$-2|\alpha||\beta| \cos(\angle \alpha - \angle \beta)$$

SNR molto alta





# Richiamo DDP Rice (II)

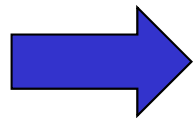
$$p_{r,\phi}(r, \phi | \tilde{a}; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |\tilde{a}|^2 - 2|\tilde{a}| r \cdot \cos(\phi - \angle \hat{a}) \right] \right\}$$

$$\begin{aligned} p_r(r | \tilde{a}; H_1) &= \int_0^{2\pi} p_{r,\phi}(r, \phi | \tilde{a}; H_1) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |\tilde{a}|^2 - 2|\tilde{a}| r \cdot \cos(\phi - \angle \hat{a}) \right] \right\} d\phi = \\ &= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2r|\tilde{a}|}{\sigma_d^2} \cdot \cos(\phi - \angle \hat{a}) \right\} d\phi = \\ &= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[ \frac{2r|\tilde{a}|}{\sigma_d^2} \right] \end{aligned}$$

$\chi = \frac{2r|\tilde{a}|}{\sigma_d^2}$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt \quad \left( = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(t)} dt \right)$$

DDP Rice



$$p_r(r | \sigma; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + \sigma}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[ \frac{2r \sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2} \right] \quad \sigma = |\tilde{a}|^2$$

# Probabilità di rivelazione

$$p_r(r|\tilde{a}; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

$$SNR = \frac{|\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} &= \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} = \int_T^{\infty} p_r(r | \sigma; H_1) dr = \\ &= \int_T^{\infty} \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right] dr = \end{aligned}$$

$$= \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0[2t\sqrt{SNR}] dt$$

# Probabilità di Rivelazione – soglia fissa

Sotto l'ipotesi  $H_1$  ( $a \neq 0$ ) ho una rivelazione se

$$r = |\tilde{r}| = |d(t) + a| > T$$

Ora c'è un valor medio (valore complesso) pari ad "a" volte il valore della funzione di ambiguità

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p(\tilde{r} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |(\tilde{r} - a)|^2\right\}$$

$$p_r(r | \sigma; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + \sigma}{\sigma_d^2}\right\} \cdot I_0\left[\frac{2r \sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2}\right]$$

$$SNR = \frac{|a|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$p_r(r | SNR; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2 \frac{r}{\sigma_d} \sqrt{SNR}\right]$$

Funzione di Marcum

$$P_d(SNR) = \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} = \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0[2t \sqrt{SNR}] dt$$



$$P_d = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\ln P_d = -\frac{T^2}{\sigma_d^2}$$

$$\ln 1/P_d = \frac{T^2}{\sigma_d^2}$$

$$\sqrt{\ln 1/P_d} = \frac{T}{\sigma_d}$$

$$P_d(\text{SNR}, P_d) = \int_{\sqrt{\ln 1/P_d}}^{\infty} 2t e^{-(t^2 + \text{SNR})} I_0(2t \sqrt{\text{SNR}}) dt$$



# Probabilità di rivelazione $P_d$

$$P_d = \int_T^\infty p_r(r / M_1) dr = \int_T^\infty \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2+a^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{ra}{\sigma_n^2}\right) dr \cong \int_T^\infty \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}} dr = \frac{1}{2} \left[ 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sigma_n \sqrt{2}} - \sqrt{SNR}\right) \right]$$

Non ammette soluzione in forma chiusa

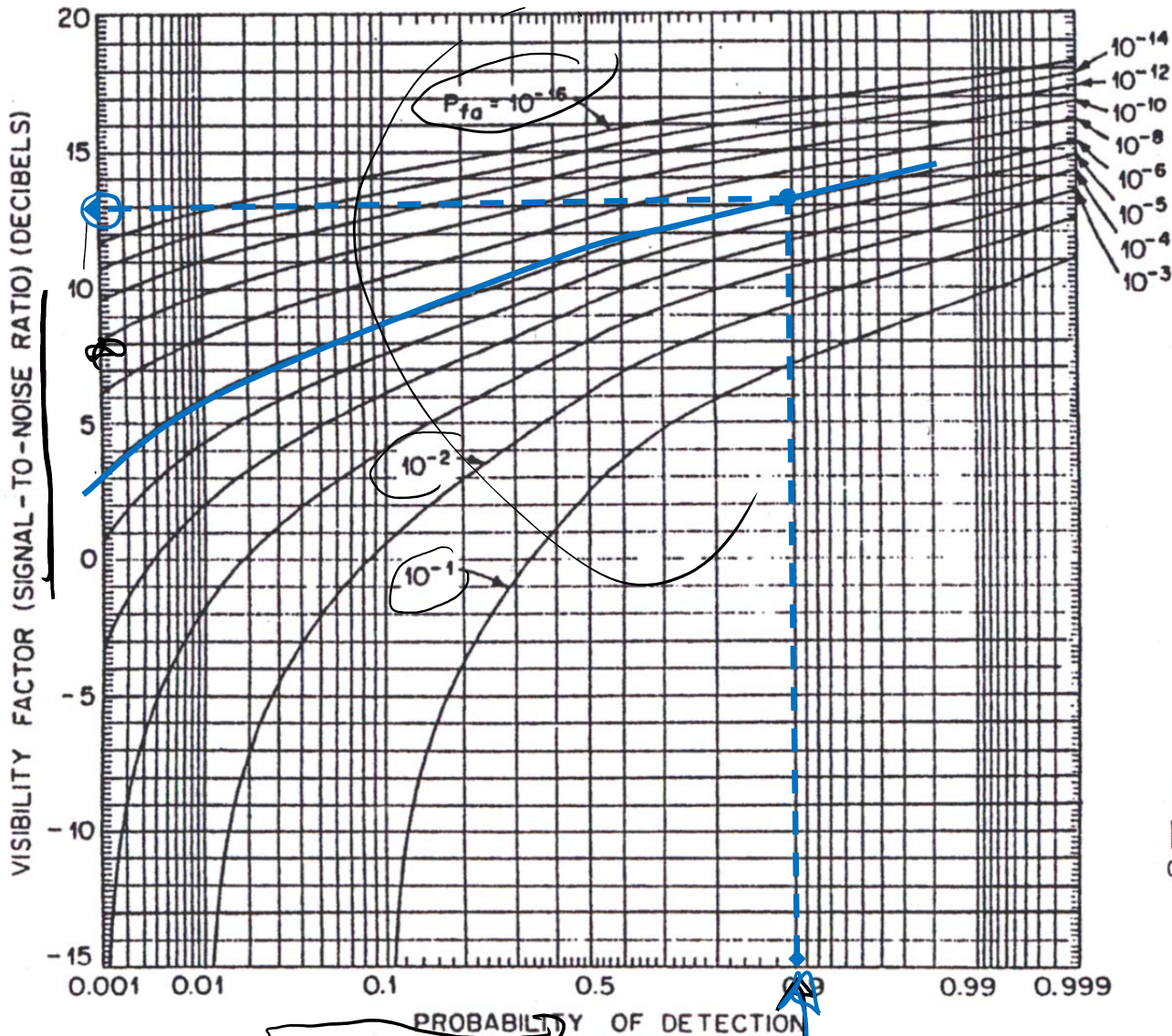
La probabilità di rivelazione dipende dal rapporto fra la soglia  $V_T$  e il valore rms di rumore  $\sigma_n$  e dal rapporto segnale a rumore SNR.

Approx  
S/N alto

$$SNR = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} \gg 1 \Rightarrow I_0\left(\frac{ra}{\sigma_n^2}\right) \cong I_0\left(\frac{a^2}{\sigma_n^2}\right) \cong \left(2\pi \frac{a^2}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow p_r(r / M_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

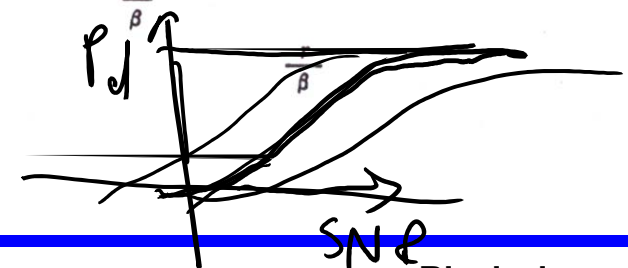
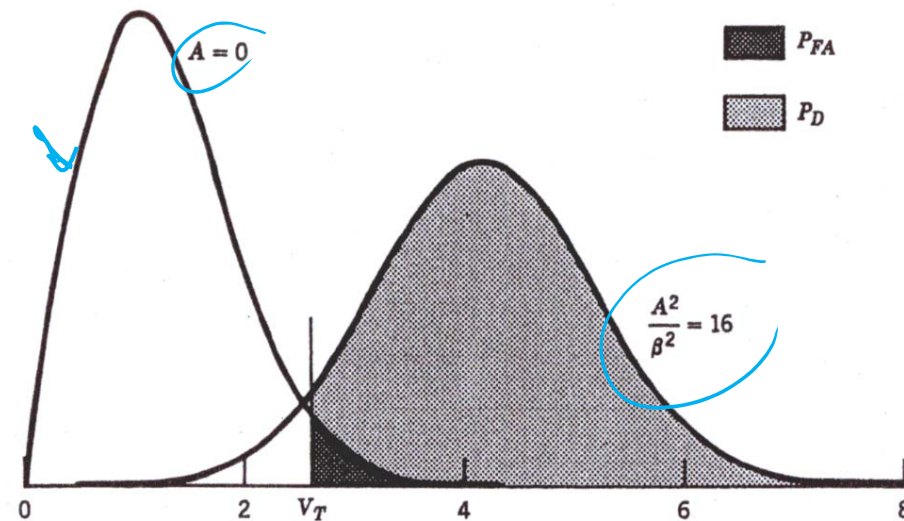
SNR elevato  $\Rightarrow$  Rice  $\cong$  Gaussiana

# Curve di Marcum



Ad es.: per  $(P_{fa} = 10^{-6})$  e  $(P_d = 0.9)$   
 $\Rightarrow$  SNR = 13 dB.

SNR ≈ 20 volte



# Marcum Function

## marcumq

Generalized **Marcum** Q function

### Syntax

`Q = marcumq(a,b)`  
`Q = marcumq(a,b,m)`

### Description

`Q = marcumq(a,b)` computes the **Marcum** Q function of a and b, defined by

$$Q(a,b) = \int_b^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x^2+a^2)}{2}\right) I_0(ax) dx$$

where a and b are nonnegative real numbers. In this expression,  $I_0$  is the modified Bessel function of the first kind of zero order.

`Q = marcumq(a,b,m)` computes the generalized **Marcum** Q, defined by

$$Q(a,b) = \frac{1}{a^{m-1}} \int_b^{\infty} x^m \exp\left(-\frac{(x^2+a^2)}{2}\right) I_{m-1}(ax) dx$$

where a and b are nonnegative real numbers, and m is a positive integer. In this expression,  $I_{m-1}$  is the modified Bessel function of the first kind of order m-1.

If any of the inputs is a scalar, it is expanded to the size of the other inputs.

### Algorithms

`marcumq` uses the algorithm developed in [3]. The paper describes two error criteria: a relative error criterion and an absolute error criterion. `marcumq` utilizes the absolute error criterion.

### References

- [1] Cantrell, P. E., and A. K. Ojha, "Comparison of Generalized Q-Function Algorithms," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-33, July, 1987, pp. 591-596.
- [2] **Marcum**, J. I., "A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar: Mathematical Appendix," RAND Corporation, Santa Monica, CA, Research Memorandum RM-753, July 1, 1948. Reprinted in *IRE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-6, April, 1960, pp. 59-267.
- [3] Shnidman, D. A., "The Calculation of the Probability of Detection and the Generalized **Marcum** Q-Function," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-35, March, 1989, pp. 389-400.

## Radiotecnica e Radiolocalizzazione

# Albersheim's Equation

Albersheim's equation is a closed-form approximation to the SNR required to achieve the specified detection and false alarm probabilities for a nonfluctuating target in independent and identically distributed Gaussian noise. The approximation is valid for a linear detector and is extensible to the noncoherent integration of  $N$  samples.

Let

$$A = \ln \frac{0.62}{P_{FA}}$$

and

$$B = \ln \frac{P_D}{1-P_D}$$

where  $P_{FA}$  and  $P_D$  are the false alarm and detection probabilities.

Albersheim's equation for the required SNR in dB is:

$$\text{SNR} = -5 \log_{10} N + [6.2 + 4.54 / \sqrt{N + 0.44}] \log_{10} (A + 0.12AB + 1.7B)$$

where  $N$  is the number of noncoherently integrated samples

$$N \approx 1$$

# Albersheim's Equation (II)

$$A = \ln(0.62 / P_{fa}) \qquad B = \ln\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)$$

$$\text{per } N = 1 \quad SNR \text{ _ } dB = [6.2 + 4.54 / \sqrt{1.44}] \log_{10}(A + 0.12A \cdot B + 1.7 B)$$

$$\ln \alpha = \frac{\log_{10} \alpha}{\log_{10} e} \qquad A = \ln(0.62 / P_{fa}) = \ln(0.62) - \frac{\log_{10} P_{fa}}{\log_{10} e} \qquad B = \ln\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right) = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)$$

$$\begin{aligned} SNR \text{ _ } dB &= 9.98 \cdot \log_{10}(A + 0.12A \cdot B + 1.7 B) = \\ &= 9.98 \cdot \log_{10}\left[\ln(0.62) - \frac{\log_{10} P_{fa}}{\log_{10} e} + \left(0.12 \cdot \frac{\ln(0.62)}{\log_{10} e} + 1.7 \frac{1}{\log_{10} e}\right) \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right) - 0.12 \frac{\log_{10} P_{fa}}{(\log_{10} e)^2} \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)\right] \end{aligned}$$

$$SNR \text{ _ } dB = 9.98 \cdot \log_{10}\left[-0.478 - 2.3 \log_{10} P_{fa} + 3.78 \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right) - 0.636 (\log_{10} P_{fa}) \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)\right]$$

$$SNR \text{ _ } dB = 9.98 \cdot \log_{10}\left[-0.478 - 2.3 \log_{10} P_{fa} + (3.78 - 0.636 \log_{10} P_{fa}) \log_{10}\left(\frac{P_d}{1 - P_d}\right)\right]$$

# Albersheim's Equation (III)

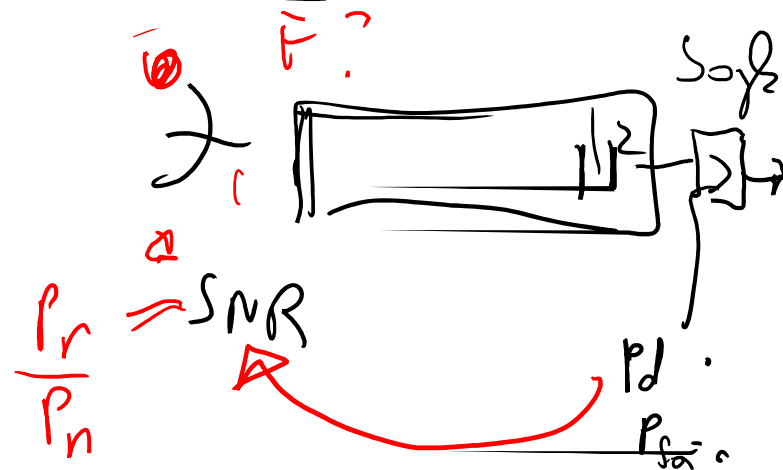
$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left[ -0.5 - 2.3 \log_{10} P_{fa} + (3.8 - 0.6 \log_{10} P_{fa}) \log_{10} \left( \frac{P_d}{1 - P_d} \right) \right]$$

$$SNR = -0.5 - 2.3 \log_{10} P_{fa} + (3.8 - 0.6 \log_{10} P_{fa}) \log_{10} \left( \frac{P_d}{1 - P_d} \right)$$

$P_t$



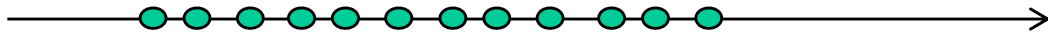
Link budget





# Rivelazione su una regione in distanza

- Test di rivelazione analizzato fin qui è per l'istante  $t_0$
- Per rivelare un potenziale segnale arrivato ad un tempo incognito fra  $t_{\min}$  e  $t_{\max}$  (tipicamente corrispondenti a distanze comprese fra distanza minima  $R_{\min}$  a distanza massima  $R_{\max}$ ), è necessario ripetere il test di rivelazione per tutti i campioni del segnale analitico compresi fra  $t_{\min}$  e  $t_{\max}$ .
- Il segnale ricevuto è campionato con frequenza di campionamento:  $f_s \geq B$  ( $B$ = banda del segnale trasmesso).



- Quindi, il test di rivelazione si ripete un numero di volte pari a  $K = (t_{\max} - t_{\min})/T_s = (t_{\max} - t_{\min})/f_s$

Dove l'intervallo di campionamento è  $T_s = 1/f_s \leq 1/B$

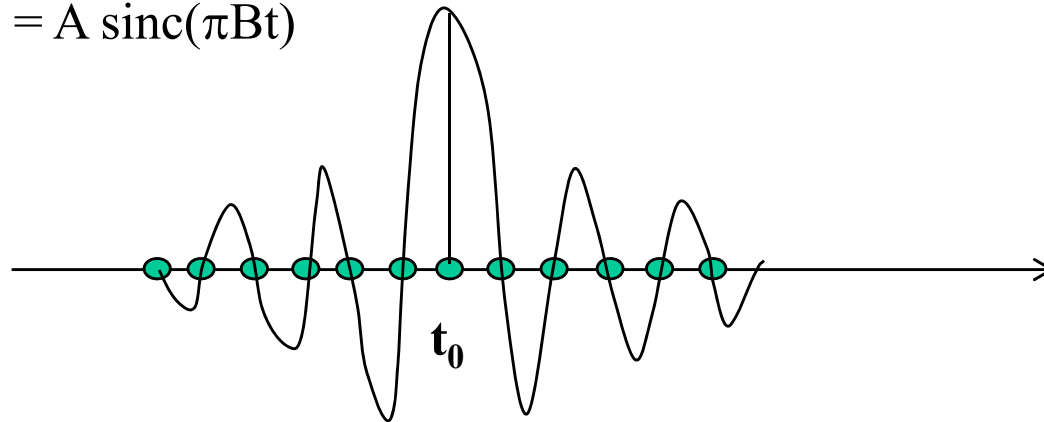
- Probabilità di falso allarme nell'intervallo?
- I campioni di rumore sono indipendenti se campionato a  $f_s = B$ , quindi  $P_{fa}^{TOT} = P_{fa}^K$

# Rivelazione su una regione in distanza (II)

- Quanti campioni occupa il segnale utile?

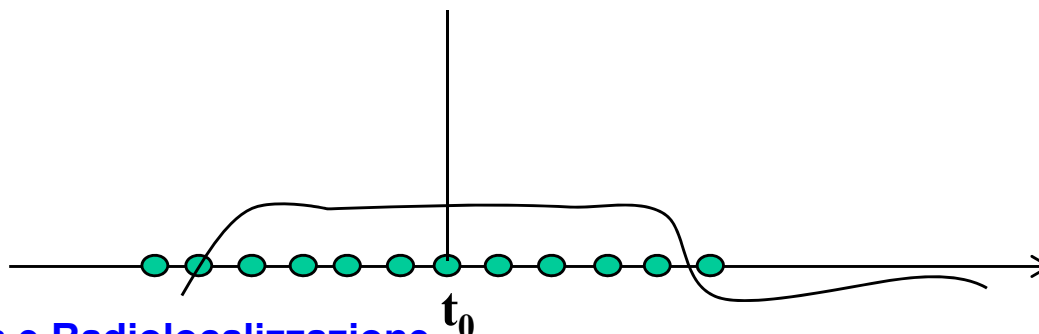
$S(f) = \text{costante}$  su banda  $B$  (spettro rettangolare con fase costante)

$$s(t) = A \text{sinc}(\pi Bt)$$



**Energia concentrata in  $t_0$ ,  
quindi in  $t_0$  alta potenza  
istantanea ed alto S/N**

Invece, se lo spettro di fase (e di ampiezza) non è costante, il segnale può essere molto meno concentrato in tempo



**Energia distribuita su un  
tempo lungo, quindi in  $t_0$   
bassa potenza istantanea e  
basso S/N**

# Rivelazione su una regione in distanza (III)

---

- Dove è il segnale?
- Come è distribuita in tempo la sua energia?
- Si può raccogliere la sua energia in un istante di tempo?