Rivelazione

Rivelare la presenza del segnale utile

Esempi di rivelazione della presenza del segnale

- **Radar**: rivelazione della presenza di segnale al tempo t_0,
  → presenza del bersaglio che lo ha riflesso a distanza $R_0 = c\, t_0/2$

- **Sistema di localizzazione**: rivelazione della presenza di segnale al tempo t_0,
  → presenza del segnale emesso da un punto di riferimento

- **WiFi**: rivelazione della presenza del segnale di beacon
  → inizializzazione della connessione fra dispositivo e router

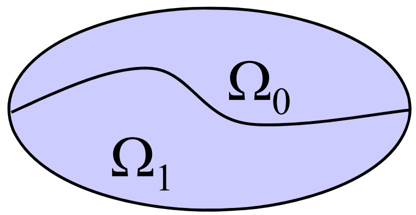
Teoria della decisione (I)

Rivelazione ⇒ esempio di **decisione binaria**: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- **segnale utile assente**: segnale ricevuto ≡ solo disturbo ($\mathbf{H_0}$);
- **segnale utile presente**: segnale ricevuto ≡ segnale utile più disturbo ($\mathbf{H_1}$);

M: Spazio degli eventi

- M_0: segnale utile assente
- M_1: segnale utile presente



Ω: Spazio delle osservazioni

Regola di decisione

D: Spazio delle decisioni

- H_0: segnale utile assente
- H_1: segnale utile presente

Prob. di rivelazione, falso allarme e miss

Si prende una decisione sulla base delle osservazioni.

In questo caso, l'osservazione è costituita dal campione dell'inviluppo complesso all'istante t_0 per cui si vuole rivelare la presenza del segnale:

$$\boxed{\tilde{r} = \tilde{r}(t_0)}$$

Decisione →	**H_0**	**H_1**
Situazione reale		
M_0	Corretta rivelazione dell'assenza del segnale (probabilità $1-P_{fa}$)	Falso Allarme (P_{fa}= probabilità di falso allarme)
M_1	Miss ($P_{miss}= 1- P_d$ probabilità di miss)	Corretta Rivelazione (P_d= probabilità di rivelazione)

Teoria della decisione (II)

Nella decisione binaria si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi H_0 ma si decide per l'ipotesi H_1 $\Rightarrow$ il disturbo viene riconosciuto come segnale utile: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme (P_{fa}) è data da

$$\boxed{P_{fa} = \int_{\Omega_1} p\left(\tilde{r} / M_0\right) d\tilde{r}}$$

PROBABILITA' DI FALSO ALLARME

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi H_1 ma si decide per l'ipotesi H_0 $\Rightarrow$ il segnale utile viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ($1\text{-}P_d$) è data da

$$\boxed{1 - P_d = \int_{\Omega_0} p\left(\tilde{r} / M_1\right) d\tilde{r}}$$

PROBABILITA' DI MANCATA RIVELAZIONE

⇒ La partizione $\{\Omega_0, \Omega_1\}$ dello spazio delle osservazioni Ω dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione usato è il criterio di Neyman-Pearson**.

Teoria della decisione (III)

Nel <u>criterio di decisione di Neyman-Pearson</u> la partizione è individuata in modo tale che:

- **la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato** ($P_{fa}=\alpha_0$) $\Rightarrow$ **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;

- **la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la probabilità di rivelazione** (P_d max);

$\{\Omega_0, \Omega_1\}$ tale che

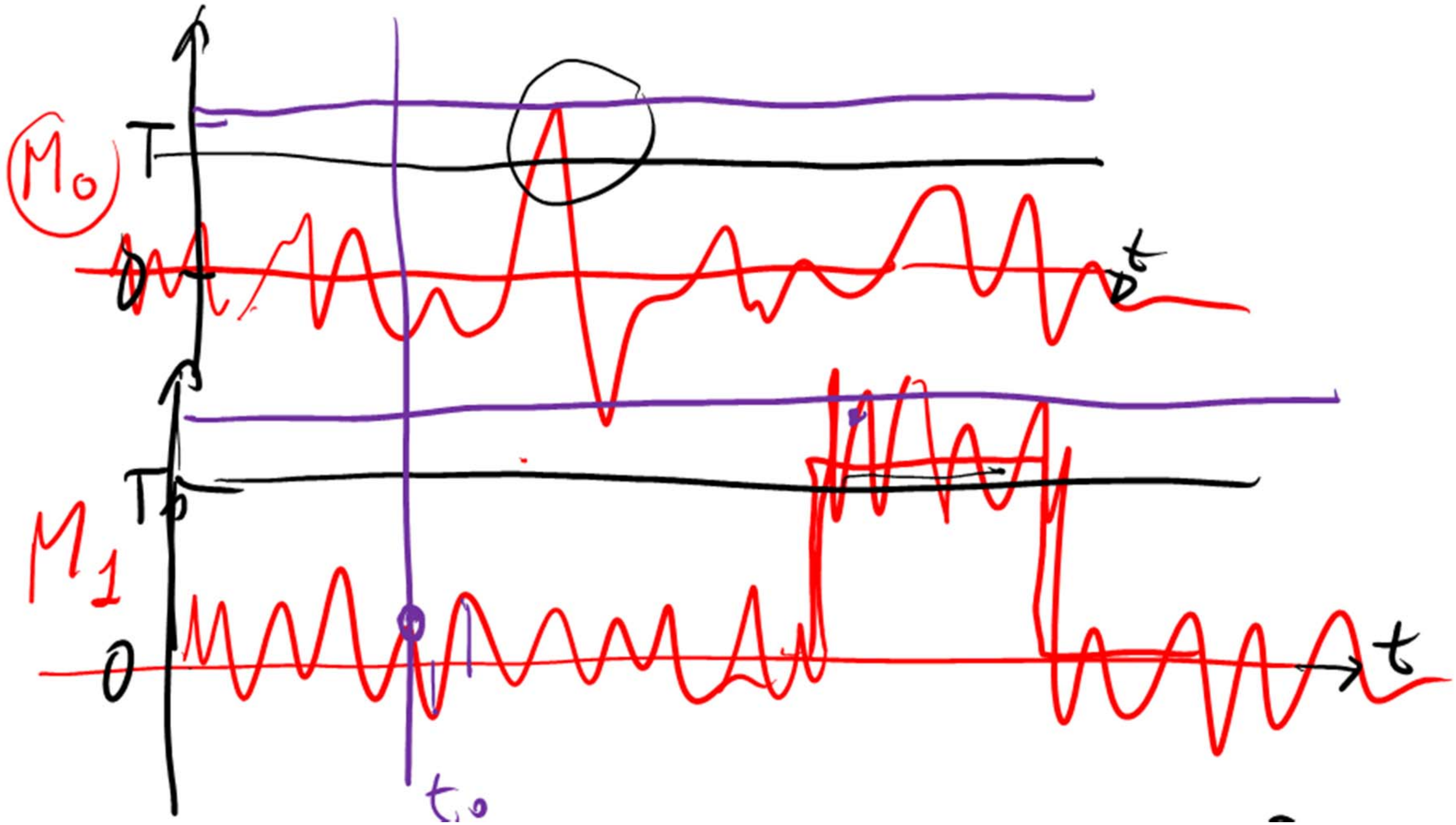
$$\begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p\left(\tilde{r} / M_0\right) d\tilde{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p\left(\tilde{r} / M_1\right) d\tilde{r} \quad massima \end{cases}$$

Problema di massimizzazione vincolata $\Rightarrow$ problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

Decisore a soglia sul modulo

$$Criterio\ \ di\ \ decisione: \qquad - decido\, per\ \ H_1 \quad se \quad r = \left| \tilde{r} \right| > T$$

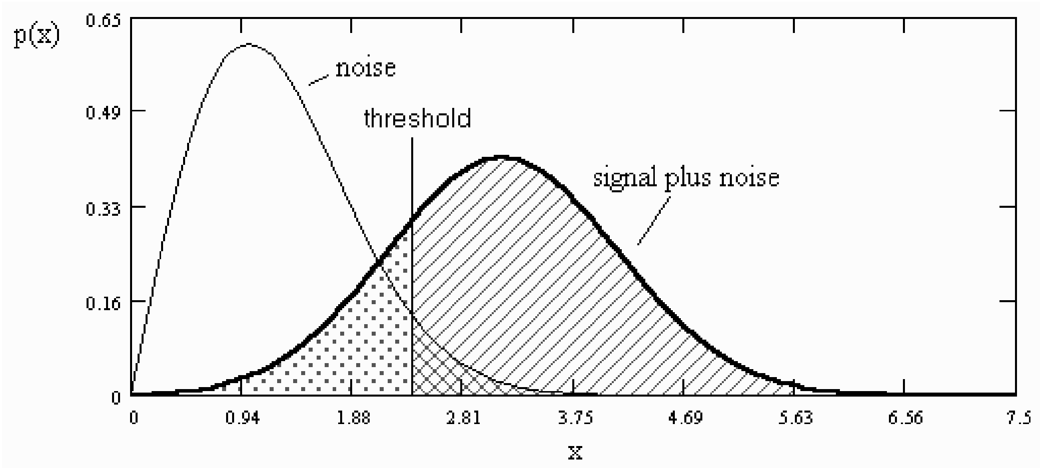
$$- decido\, per\ \ H_0 \quad se \quad r = \left| \tilde{r} \right| < T$$



Prestazioni di rivelazione

$\Pr obabilità \ \ di \ \ \sup erare \ \ la \ soglia:$

$$\Pr ob\{r > T\} = \int_T^{\infty} p_r(r)dr$$



$Quindi:$

$$P_{fa} = \Pr ob\{r > T \ \ / H_0\} = \int_T^{\infty} p_r(r / M_0)\,dr$$

$$P_d = \Pr ob\{r > T \ \ / H_1\} = \int_T^{\infty} p_r(r / M_1)\,dr$$

Ipotesi H_0 (M_0)

$$H_0: \quad \tilde{r} = r_I + j\, r_Q = \tilde{n} = n_I + j\, n_Q$$

disturbo $\tilde{n}$ = *variabile aletoria Gaussiana complessa con*

valor medio $= 0$

varianza σ_d^2

r_I *e* r_Q *sono variabili Gaussiane reali con*

valor medio $= 0$

varianza $\sigma_n^2 = \sigma_d^2 / 2$

$$p(r_I, r_Q \mid H_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{r_I^2}{\sigma_d^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{r_Q^2}{\sigma_d^2}\right\} = \frac{1}{\pi\,\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r_I^2 + r_Q^2}{\sigma_d^2}\right\}$$

Richiamo DDP Rayleigh

$$p(\tilde{r}\,|\,H_0) = \frac{1}{\pi\,\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\,|\,\tilde{r}\,|^2\right\}$$

$$\begin{cases} r = |\,\tilde{r}\,| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle\tilde{r} = arctg(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r\cdot\cos\phi \\ r_Q = r\cdot\sin\phi \end{cases}$$

$$d\tilde{r} = dr_I\, dr_Q = r\, dr\, d\phi$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r}\,|\,H_0)\, d\tilde{r} = p_{r_I,r_Q}(r_I, r_Q\,|\,H_0)\; dr_I\; dr_Q =$$
$$= p_{r_I,r_Q}(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi\,|\,H_0)\cdot r\, dr\, d\phi = p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,H_0)\; dr\, d\phi$$

$$p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,H_0) = p_{r_I,r_Q}(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi\,|\,H_0)\cdot r$$

$$\boxed{p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,H_0) = \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\,r^2\right\}}$$

DDP Rayleigh

$$p_r(r\,|\,H_0) = \int_0^{2\pi} p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,H_0)\; d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\,r^2\right\} d\phi = \boxed{\frac{2r}{\sigma_d^2}\,e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}}$$

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 (a=0) ho un Falso Allarme se $r = |\tilde{r}| > T$

$$p_r(r|H_0) = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\Pr ob\{r > T|H_0\} = \int_T^\infty p_r(r|H_0)\, dr = \int_T^\infty \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr = \int_{T^2/\sigma_d^2}^\infty e^{-t}\, dt = \left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^\infty = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\boxed{P_{fa} = \Pr ob\{r > T\,|\,H_0\} = \int_T^\infty p_r(r|H_0)\,dr = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}}$$

Probabilità di falso allarme P_{fa}

$$\boxed{P_{fa} = \int_T^{\infty} p_r(r/M_0)dr = \int_T^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia T e dalla potenza del rumore σ_n^2 : (disturbo $\sigma_n^2 = \sigma_d^2/2$) fissato il valore di P_{fa} desiderata e nota la potenza di rumore σ_n^2 risulta individuato il livello di soglia T.

$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{P_{fa}}\right)} =$$

$\sigma_n \cdot \sigma_\infty$

$$p(r) = \begin{cases} \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} & r>0 \quad \text{Rayleigh} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$r = |\tilde{r}|$

$$I = r^2$$

$dI = 2r\,dr$

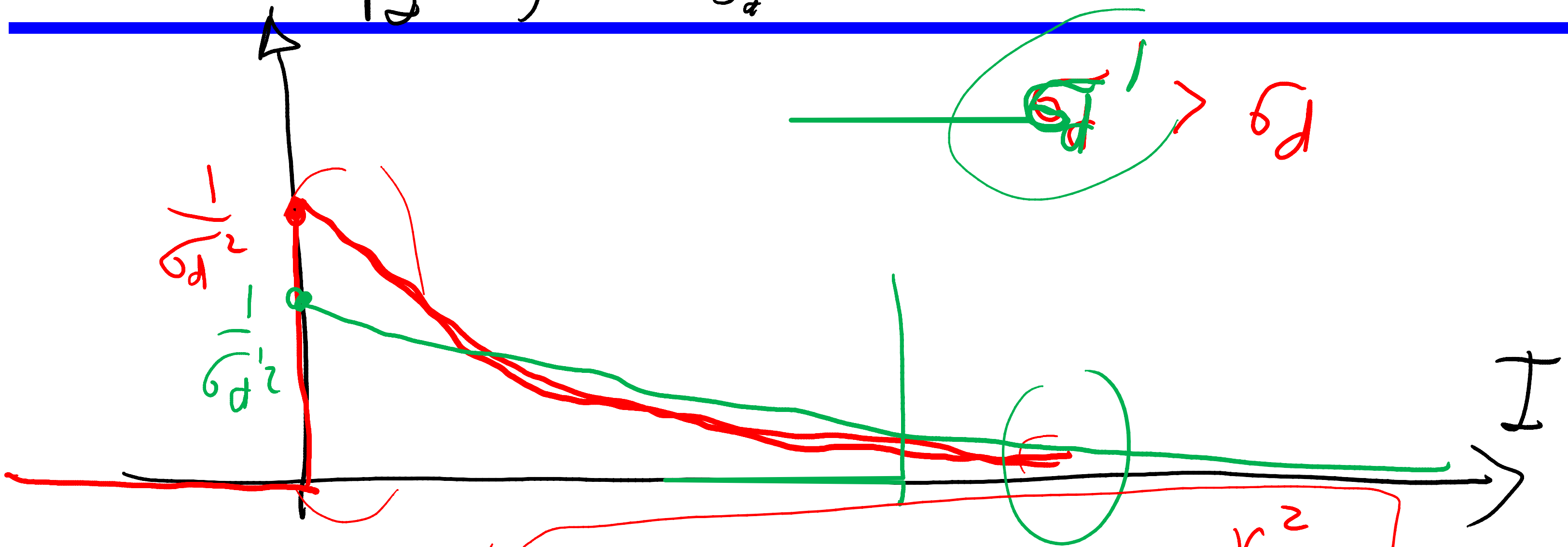
$$I = r^2 = |\tilde{r}|^2$$

$$p(r)\,dr = p(I)\,dI \qquad \frac{dr}{dI} = \frac{1}{2r}$$

$$p(I) = \left[p(r) \frac{dr}{dI} \right]_{r=\sqrt{I}}$$

$$\boxed{p(I) = \frac{\cancel{2}\cancel{\sqrt{I}}}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \frac{1}{\cancel{2}\cancel{\sqrt{I}}} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} & I>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}}$$

$$p_I(I) = \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \qquad I > 0$$



$$p(r) = \frac{2r}{\cancel{2}\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

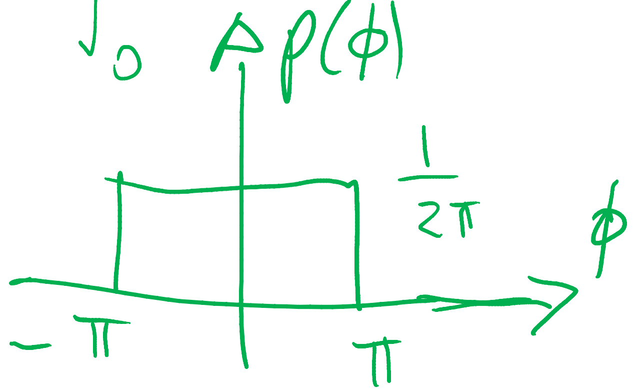
$\sigma_d' > \sigma_d$

$$p(r,\phi) = \frac{r}{\pi\sigma_d^2}\, e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$p_\phi(\phi) = \int_0^{+\infty} \frac{r}{\pi\sigma_d^2}\, e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}\, dr = \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_d^2}\, e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}\, dr^2 =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi}\, e^{-t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty} = \qquad t = \frac{r^2}{\sigma_d^2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[1\right] = \frac{1}{2\pi}$$



$$p_I(I) = \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}}$$

$$r > T$$

$$P_{fa} : \quad \mathrm{Prob}\{ |\tilde{r}| = r > T \}$$
$$= \mathrm{Prob}\{ I > T^2 \}$$

$$r^2 > T^2$$

$$I > T^2$$

$$P_{fa} = \int_{T^2}^{\infty} p_I(I)\, dI = \int_{T^2}^{\infty} \frac{1}{\sigma_d^2} e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} dI =$$

$$= \left[-e^{-\frac{I}{\sigma_d^2}} \right]_{T^2}^{\infty} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

Ipotesi H_1 (M_1)

$$H_1: \qquad \tilde{r} = r_I + j\, r_Q = \tilde{a} + \tilde{n} = a_I + n_I + j\,(a_Q + n_Q)$$

$disturbo\ \ \tilde{n} = variabile\ \ aletoria\ Gaussiana\ complessa\ con$

$valor\ medio = \tilde{a}$ $= a_I + j\, a_Q$

$varianza\ \ \sigma_d^2$

$r_I\ e\ r_Q\ \ sono\ variabili\ Gaussiane\ reali\ \ con$

$valor\ medio = a_I\ e\ a_Q$

$varianza\ \ \sigma_n^2 = \sigma_d^2 / 2$

$$p(r_I, r_Q | H_1) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{(r_I - a_I)^2}{\sigma_d^2}\right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma_d} \exp\left\{-\frac{(r_Q - a_Q)^2}{\sigma_d^2}\right\} = \frac{1}{\pi\,\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{(r_I - a_I)^2 + (r_Q - a_Q)^2}{\sigma_d^2}\right\}$$

Richiamo DDP Rice (I)

$$p(\tilde{r}\,|\,a;\,H_1) = \frac{1}{\pi\,\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|\tilde{r}-\tilde{a}\right|^2\right\}$$

$$\begin{cases} r = |\,\tilde{r}\,| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle\tilde{r} = arctg(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r\cdot\cos\phi \\ r_Q = r\cdot\sin\phi \end{cases}$$

$$d\tilde{r} = dr_I\,dr_Q = r\,dr\,d\phi$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r}\,|\,a;\,H_1)\,d\tilde{r} = p_{r_I,r_Q}(r_I, r_Q\,|\,\tilde{a};\,H_1)\;dr_I\;dr_Q =$$

$$= p_{r_I,r_Q}(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi\,|\,\tilde{a};\,H_1)\cdot r\,dr\,d\phi = p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,\tilde{a};H_1)\;dr\,d\phi$$

$$p_{r,\phi}(r,\phi|a;H_1) = p_{r_I,r_Q}(r\cdot\cos\phi, r\cdot\sin\phi\,|\,\tilde{a};H_1)\cdot r$$

$$p_{r,\phi}(r,\phi\,|\,a;\,H_1) = \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|r\cdot\cos\phi + j\;r\cdot\sin\phi - \tilde{a}\right|^2\right\} =$$

$$= \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left[r^2 + |\tilde{a}|^2 - 2|\tilde{a}|\,r\cdot\cos(\phi - \angle\tilde{a})\right]\right\}$$

$p(r,\phi)$

$$\frac{r}{\pi\sigma_d^2}\, e^{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|\underbrace{r\cos\phi + j r\sin\phi}_{\alpha} - \underbrace{\tilde{a}}_{\beta}\right|^2}$$

$$|\alpha-\beta|^2$$

$$|\alpha|^2+|\beta|^2-2\,\mathrm{Re}\{\alpha\beta^*\}$$

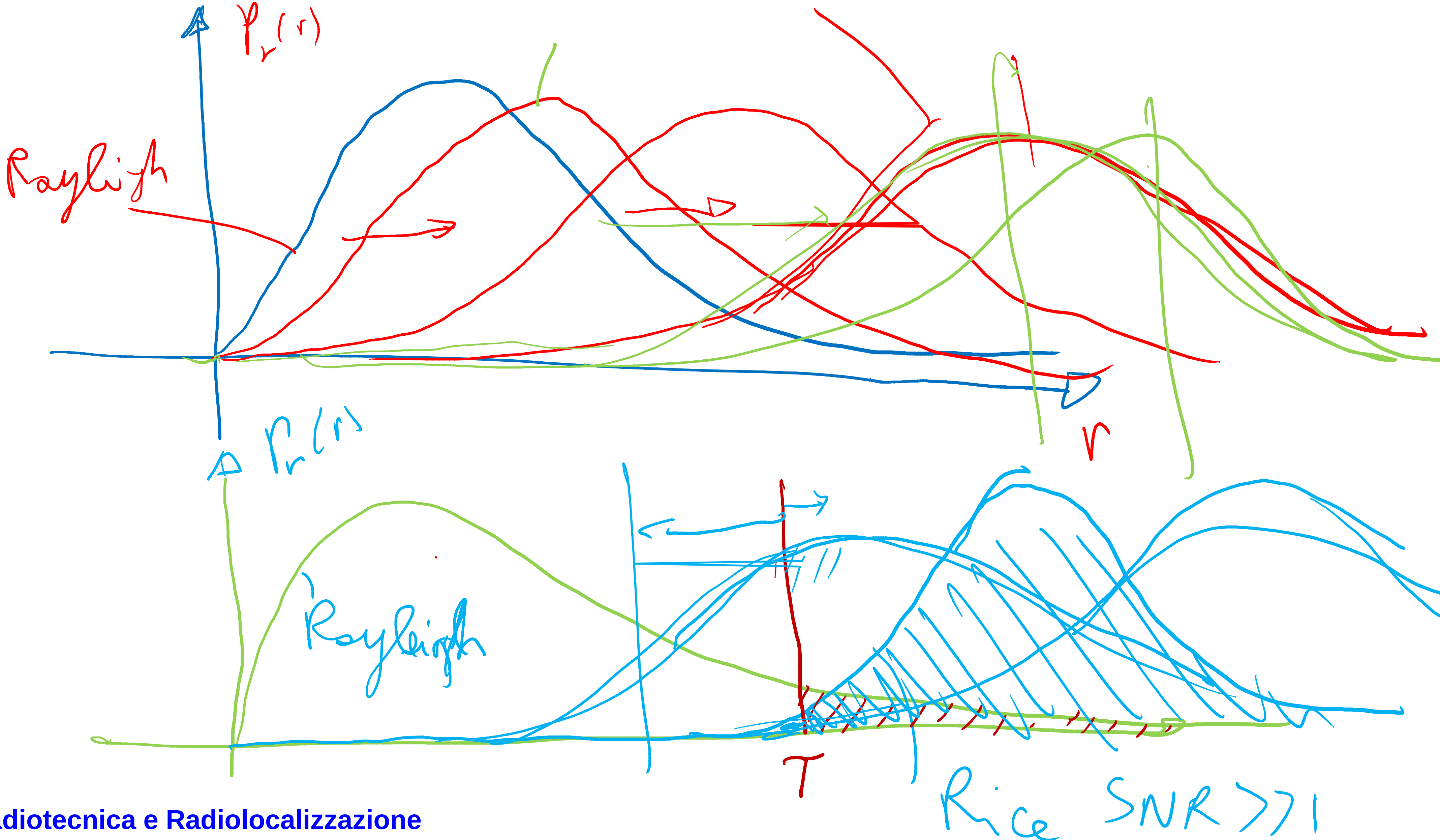
$$|\alpha|e^{j\angle\alpha} \qquad |\beta|e^{-j\phi}$$

$$-2|\alpha||\beta|\,\mathrm{Re}\{e^{j(\angle\alpha-\angle\beta)}\}$$

$$-2|\alpha||\beta|\cos(\angle\alpha-\angle\beta)$$

$$p(r,\phi)=\frac{r}{\pi\sigma_d^2}\, e^{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left\{r^2+|\tilde{a}|^2-2r|\tilde{a}|\cos(\phi-\angle\tilde{a})\right\}}$$

SNR molto alto



Richiamo DDP Rice (II)

$$p_{r,\phi}(r,\phi|\tilde{a};\,H_1) = \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left[r^2+|\tilde{a}|^2-2|\tilde{a}|\,r\cdot\cos(\phi-\angle\hat{a})\right]\right\}$$

$$p_r(r\,|\,\tilde{a};H_1) = \int_0^{2\pi} p_{r,\phi}(r,\phi|\tilde{a};\,H_1)\,d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi\,\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left[r^2+|\hat{a}|^2-2|\tilde{a}|\,r\cdot\cos(\phi-\angle\hat{a})\right]\right\}d\phi =$$

$$= \frac{2\,r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2+|\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2\,r\,|\tilde{a}|}{\sigma_d^2}\cdot\cos(\phi-\angle\tilde{a})\right\}d\phi =$$

$$x = \frac{2r|\tilde{a}|}{\sigma_d^2}$$

$$= \frac{2\,r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2+|\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2\,r\,|\tilde{a}|}{\sigma_d^2}\right]$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos(t)}\,dt\quad\left(=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos(t)}\,dt\right)$$

DDP Rice

$$p_r(r\,|\,\sigma;H_1) = \frac{2\,r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2+\sigma}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2\,r\,\sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2}\right]\qquad \sigma = |\tilde{a}|^2$$

Probabilità di rivelazione

$$p_r(r\,|\,\tilde{a};H_1)=\frac{2r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}-SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

$$SNR=\frac{|\tilde{a}|^2}{\sigma_d^2}=\frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$\Pr ob\{r>T\,|\,\sigma;\,H_1\}=\Pr ob\{r>T\,|\,\sigma;\,H_1\}=\int_T^\infty p_r(r\,|\,\sigma;\,H_1)\,dr=$$

$$t=\frac{r}{\sigma_d}$$

$$=\int_T^\infty \frac{2r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}-SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]dr=$$

$$=\int_{T/\sigma_d}^\infty 2t\,\exp\left\{-t^2-SNR\right\}\cdot I_0\left[2\,t\sqrt{SNR}\right]dt$$

Probabilità di Rivelazione – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_1 (a≠0) ho una rivelazione se $r = |\tilde{r}| = |d(t) + a| > T$

Ora c'è un valor medio (valore complesso) pari ad "a" volte il valore della funzione di ambiguità

$$p(\tilde{r}|H_0) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}|\tilde{r}|^2\right\} \Rightarrow p(\tilde{r}|a;H_1) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}|(\tilde{r}-a)|^2\right\}$$

$$p_r(r|\sigma;H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2+\sigma}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2r\sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2}\right]$$

$$SNR = \frac{|a|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$p_r(r|SNR;H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

Funzione di Marcum

$$\boxed{P_d(SNR) = \Pr ob\{r > T|\sigma;\, H_1\} = \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t\ \exp\{-t^2 - SNR\}\cdot I_0\left[2\,t\sqrt{SNR}\right]dt}$$

$$P_{fa} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}} \qquad \ln P_{fa} = -\frac{T^2}{\sigma_d^2}$$

$$\ln 1/P_{fa} = \frac{T^2}{\sigma_d^2} \qquad \boxed{\sqrt{\ln 1/P_{f}} = \frac{T}{\sigma_d}}$$

$$\boxed{P_d(SNR, P_{fa}) = \int_{\sqrt{\ln 1/P_{fa}}}^{\infty} 2t\, e^{-(t^2 + SNR)}\, I_0\left(2t\sqrt{SNR}\right) dt}$$

Probabilità di rivelazione P_d

$$P_d = \int_T^{\infty} p_r(r/M_1)dr = \underbrace{\int_T^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2+a^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{r\,a}{\sigma_n^2}\right)dr}_{\text{Non ammette soluzione in forma chiusa}} \cong \int_T^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}} dr = \boxed{\frac{1}{2}\left[1-erf\left(\frac{T}{\sigma_n\sqrt{2}}-\sqrt{SNR}\right)\right]}$$

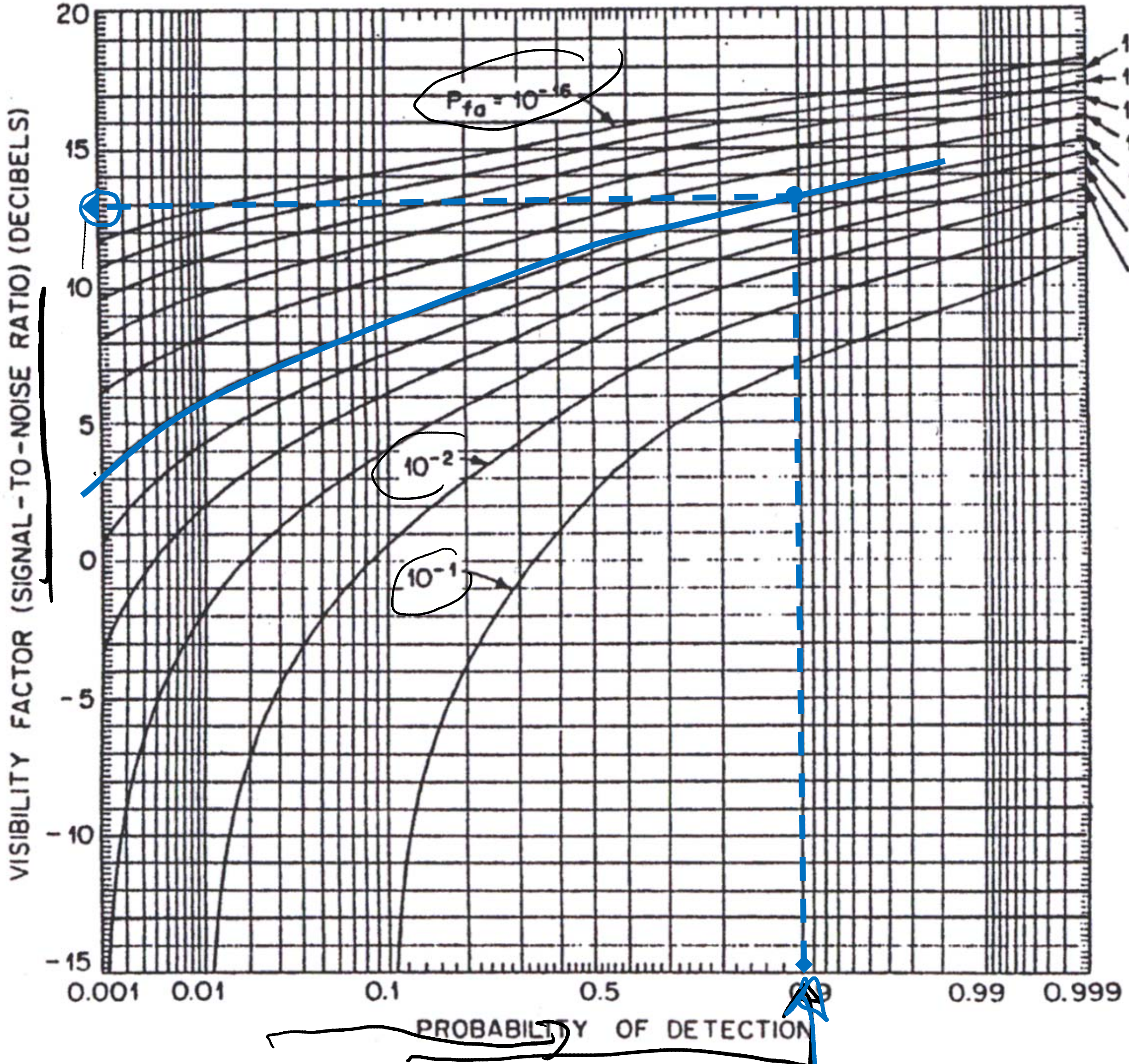
Approx S/N alto

La probabilità di rivelazione dipende dal rapporto fra la soglia V_T e il valore rms di rumore σ_n e dal rapporto segnale a rumore SNR.

$$SNR = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} >> 1 \Rightarrow I_0\left(\frac{r\,a}{\sigma_n^2}\right) \cong I_0\left(\frac{a^2}{\sigma_n^2}\right) \cong \left(2\pi\frac{a^2}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow p_r(r/M_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

SNR elevato $\Rightarrow$ Rice $\cong$ Gaussiana

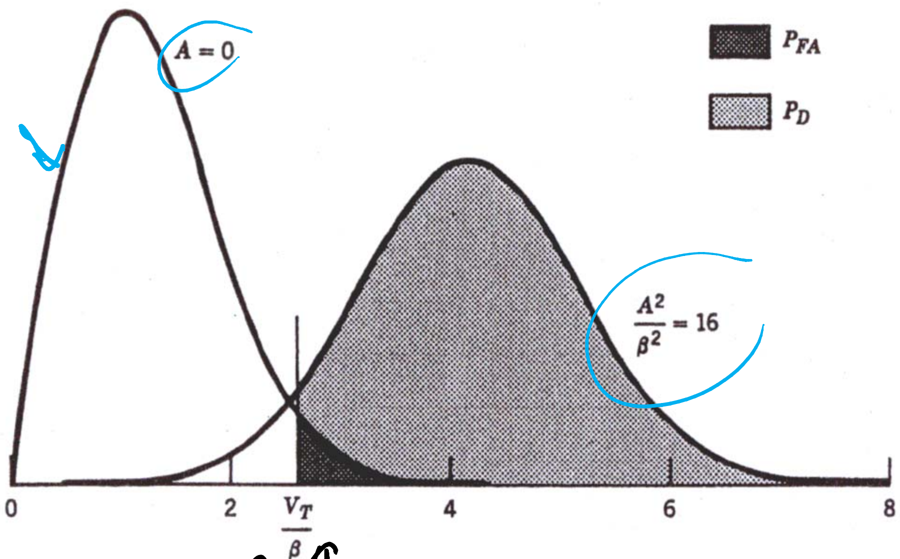
Curve di Marcum

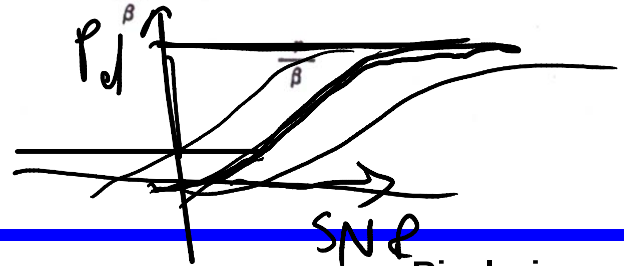


Ad es.: per $P_{fa}=10^{-6}$ e $P_d=0.9$

$\Rightarrow$ SNR=13 dB.

SNR≈ 20 volte





Marcum Function

marcumq

Generalized Marcum Q function

Syntax

```
Q = marcumq(a,b)
Q = marcumq(a,b,m)
```

Description

`Q = marcumq(a,b)` computes the Marcum Q function of `a` and `b`, defined by

$$Q(a,b) = \int_b^{\infty} x \exp\left(-\frac{(x^2+a^2)}{2}\right) I_0(ax)dx$$

where `a` and `b` are nonnegative real numbers. In this expression, I_0 is the modified Bessel function of the first kind of zero order.

`Q = marcumq(a,b,m)` computes the generalized Marcum Q, defined by

$$Q\ (a,b) = \frac{1}{a^{m-1}} \int_b^{\infty} x^m \exp\left(-\frac{(x^2+a^2)}{2}\right) I_{m-1}(ax)dx$$

where `a` and `b` are nonnegative real numbers, and `m` is a positive integer. In this expression, I_{m-1} is the modified Bessel function of the first kind of order m-1.

If any of the inputs is a scalar, it is expanded to the size of the other inputs.

Algorithms

`marcumq` uses the algorithm developed in [3]. The paper describes two error criteria: a relative error criterion and an absolute error criterion. `marcumq` utilizes the absolute error criterion.

References

[1] Cantrell, P. E., and A. K. Ojha, "Comparison of Generalized Q-Function Algorithms," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-33, July, 1987, pp. 591-596.

[2] Marcum, J. I., "A Statistical Theory of Target Detection by Pulsed Radar: Mathematical Appendix," RAND Corporation, Santa Monica, CA, Research Memorandum RM-753, July 1, 1948. Reprinted in *IRE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-6, April, 1960, pp. 59-267.

[3] Shnidman, D. A., "The Calculation of the Probability of Detection and the Generalized Marcum Q-Function," *IEEE Transactions on Information Theory*, Vol. IT-35, March, 1989, pp. 389-400.

Albersheim's Equation

Albersheim's equation is a closed-form approximation to the SNR required to achieve the specified detection and false alarm probabilities for a nonfluctuating target in independent and identically distributed Gaussian noise. The approximation is valid for a linear detector and is extensible to the noncoherent integration of N samples.

Let

$$A = \ln \frac{0.62}{P_{FA}}$$

and

$$B = \ln \frac{P_D}{1-P_D}$$

where and are the false alarm and detection probabilities.

Albersheim's equation for the required SNR in dB is:

$$\mathrm{SNR} = -5\log_{10} N + [6.2 + 4.54 / \sqrt{N + 0.44}]\log_{10}(A + 0.12AB + 1.7B)$$

where N is the number of noncoherently integrated samples

Albersheim's Equation (II)

$$A = \ln(0.62 / Pfa) \qquad\qquad B = \ln\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)$$

$$per \quad N = 1 \qquad SNR\_dB = [6.2 + 4.54/\sqrt{1.44}]\log_{10}(A + 0.12A\cdot B + 1.7\,B)$$

$$\ln\alpha = \frac{\log_{10}\alpha}{\log_{10} e} \qquad A = \ln(0.62/Pfa) = \ln(0.62) - \frac{\log_{10} P_{fa}}{\log_{10} e} \qquad B = \ln\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right) = \frac{1}{\log_{10} e}\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)$$

$$SNR\_dB = 9.98\cdot\log_{10}(A + 0.12A\cdot B + 1.7\,B) =$$

$$= 9.98\cdot\log_{10}\left[\ln(0.62) - \frac{\log_{10} P_{fa}}{\log_{10} e} + \left(0.12\cdot\frac{\ln(0.62)}{\log_{10} e} + 1.7\frac{1}{\log_{10} e}\right)\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right) - 0.12\frac{\log_{10} P_{fa}}{(\log_{10} e)^2}\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)\right])$$

$$SNR\_dB = 9.98\cdot\log_{10}\left[-0.478 - 2.3\,\log_{10} P_{fa} + 3.78\,\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right) - 0.636\,(\log_{10} P_{fa})\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)\right]$$

$$SNR\_dB = 9.98\cdot\log_{10}\left[-0.478 - 2.3\,\log_{10} P_{fa} + \left(3.78 - 0.636\,\log_{10} P_{fa}\right)\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)\right]$$

Albersheim's Equation (III)

$$SNR\_dB = 10 \cdot \log_{10}\left[-0.5 - 2.3\ \log_{10} P_{fa} + \left(3.8\ -0.6\ \log_{10} P_{fa}\right)\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)\right]$$

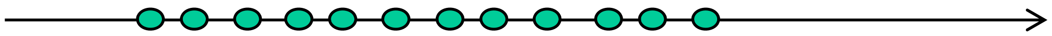
$$SNR = -0.5 - 2.3\ \log_{10} P_{fa} + \left(3.8\ -0.6\ \log_{10} P_{fa}\right)\log_{10}\left(\frac{P_d}{1-P_d}\right)$$

Rivelazione su una regione in distanza

- Test di rivelazione analizzato fin qui è per l'istante t_0

- Per rivelare un potenziale segnale arrivato ad un tempo incognito fra t_{min} e t_{max} (tipicamente corrispondenti a distanze comprese fra distanza minima R_{min} a distanza massima R_{max}), è necessario ripetere il test di rivelazione per tutti i campioni del segnale analitico compresi fra t_{min} e t_{max}.

- Il segnale ricevuto è campionato con frequenza di campionamento: $f_s \geq B$ (B= banda del segnale trasmesso).



- Quindi, il test di rivelazione si ripete un numero di volte pari a $K = (t_{max} - t_{min})/T_s = (t_{max} - t_{min})/f_s$

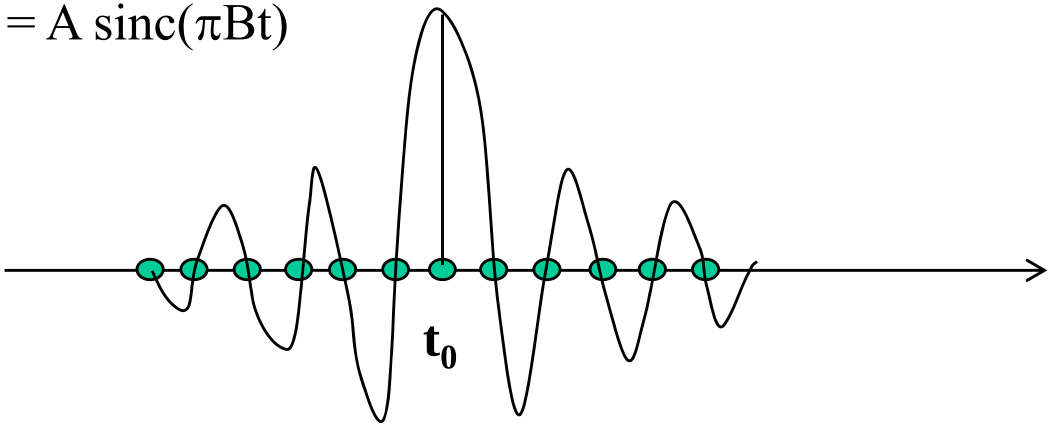
  Dove l'intervallo di campionamento è $T_s = 1/f_s \leq 1/B$

- Probabilità di falso allarme nell'intervallo?
- I campioni di rumore sono indipendenti se campionato a $f_s = B$, quindi $P_{fa}^{TOT} = P_{fa}^{K}$

Rivelazione su una regione in distanza (II)

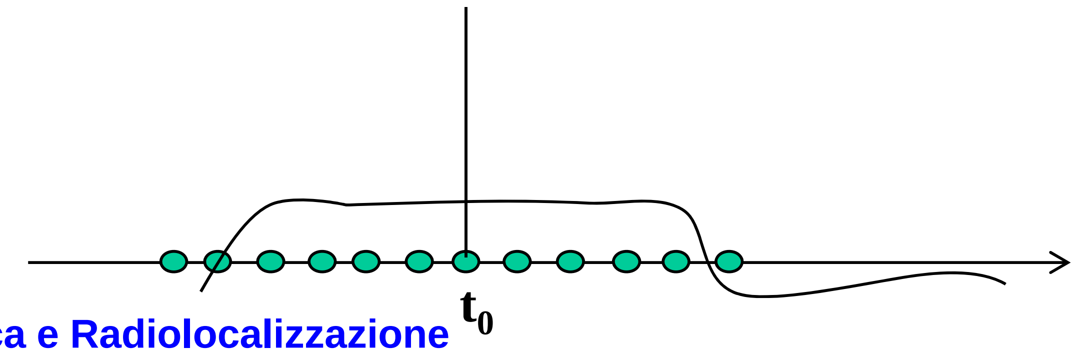
- Quanti campioni occupa il segnale utile?

$S(f)$ = costante su banda B (spettro rettangolare con fase costante)
$s(t) = A\ \mathrm{sinc}(\pi B t)$



Energia concentrata in t_0, quindi in t_0 alta potenza istantanea ed alto S/N

Invece, se lo spettro di fase (e di ampiezza) non è costante, il segnale può essere molto meno concentrato in tempo



Energia distribuita su un tempo lungo, quindi in t_0 bassa potenza istantanea e basso S/N

Rivelazione su una regione in distanza (III)

- Dove è il segnale?
- Come è distribuita in tempo la sua energia?
- Si può raccogliere la sua energia in un istante di tempo?