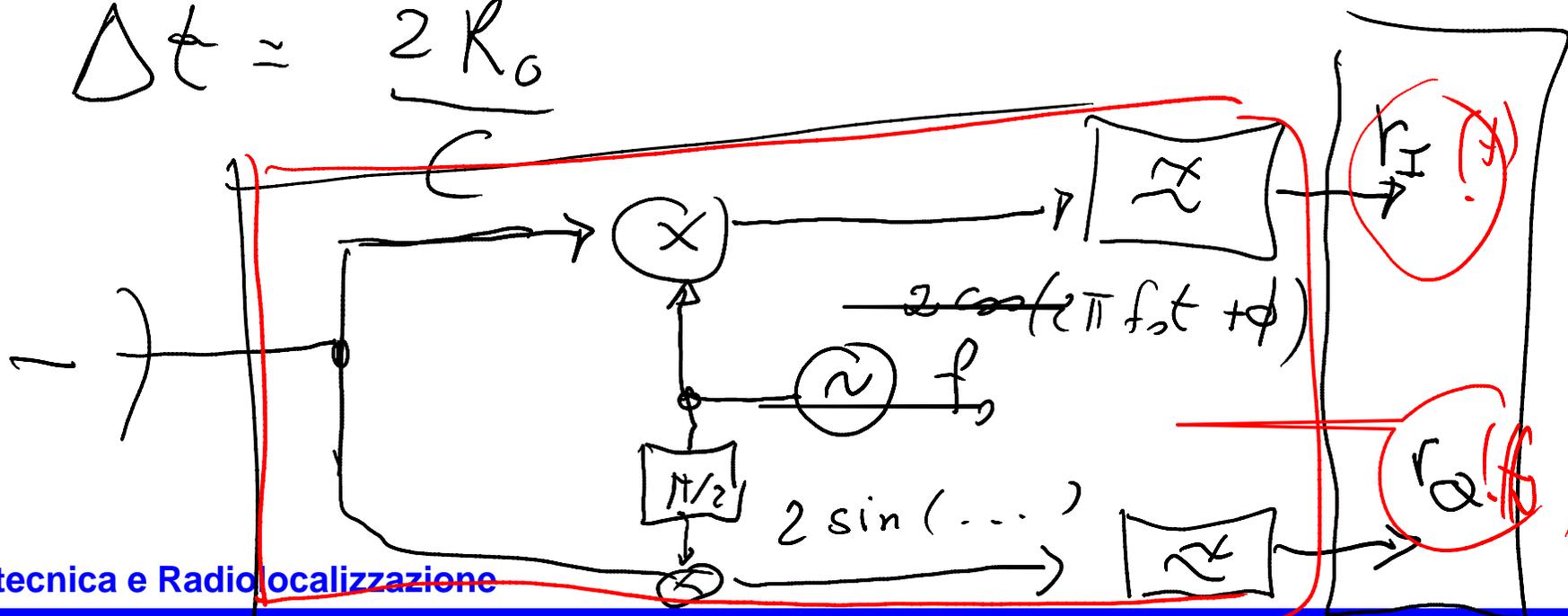


# Rivelazione

$= r_I(t) + j r_Q(t)$

$\Delta t = \frac{2R_0}{c}$



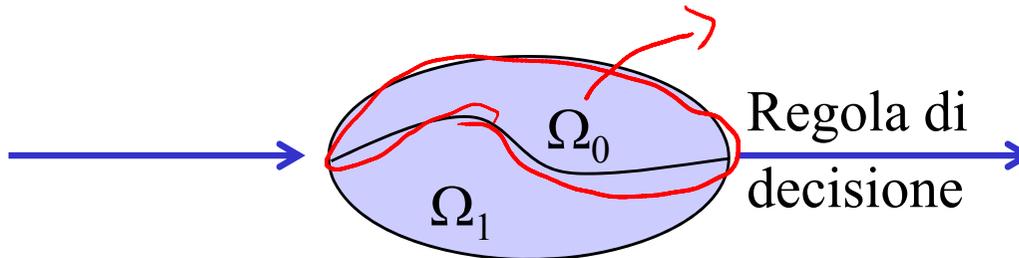
# Teoria della decisione (I)

**Sistema radar**  $\Rightarrow$  esempio di decisione binaria: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- ~~bersaglio~~ <sup>segnale</sup> assente: segnale ricevuto  $\equiv$  solo disturbo ( $H_0$ );
- ~~bersaglio~~ <sup>segnale</sup> presente: segnale ricevuto  $\equiv$  segnale utile più disturbo ( $H_1$ );

M: Spazio degli eventi

- ~~$M_0$ : bersaglio assente~~
- ~~$M_1$ : bersaglio presente~~



$\Omega$ : Spazio delle osservazioni

D: Spazio delle decisioni

- $H_0$ : bersaglio assente
- $H_1$ : bersaglio presente

# Teoria della decisione (II)

Nella decisione radar si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi  $H_0$  ma si decide per l'ipotesi  $H_1 \Rightarrow$  il disturbo viene riconosciuto come bersaglio: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme ( $P_{fa}$ ) è data da

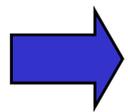
$$P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA'  
DI FALSO  
ALLARME**

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi  $H_1$  ma si decide per l'ipotesi  $H_0 \Rightarrow$  il bersaglio viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ( $1-P_d$ ) è data da

$$1 - P_d = \int_{\Omega_0} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA' DI  
MANCATA  
RIVELAZIONE**



La partizione  $\{\Omega_0, \Omega_1\}$  dello spazio delle osservazioni  $\Omega$  dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione radar è il criterio di Neyman-Pearson.**

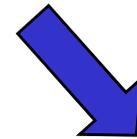
**Radiotecnica e Radiolocalizzazione**

# Teoria della decisione (III)

Nel criterio di decisione di Neyman-Pearson la partizione è individuata in modo tale che:

- ▶ la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato ( $P_{fa} = \alpha_0$ )  $\Rightarrow$  **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;
- ▶ la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la **probabilità di rivelazione** ( $P_d$  max);

$$\left. \begin{array}{l} \{\Omega_0, \Omega_1\} \\ \text{tale che} \end{array} \right\} \begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r} \quad \textit{massima} \end{cases}$$



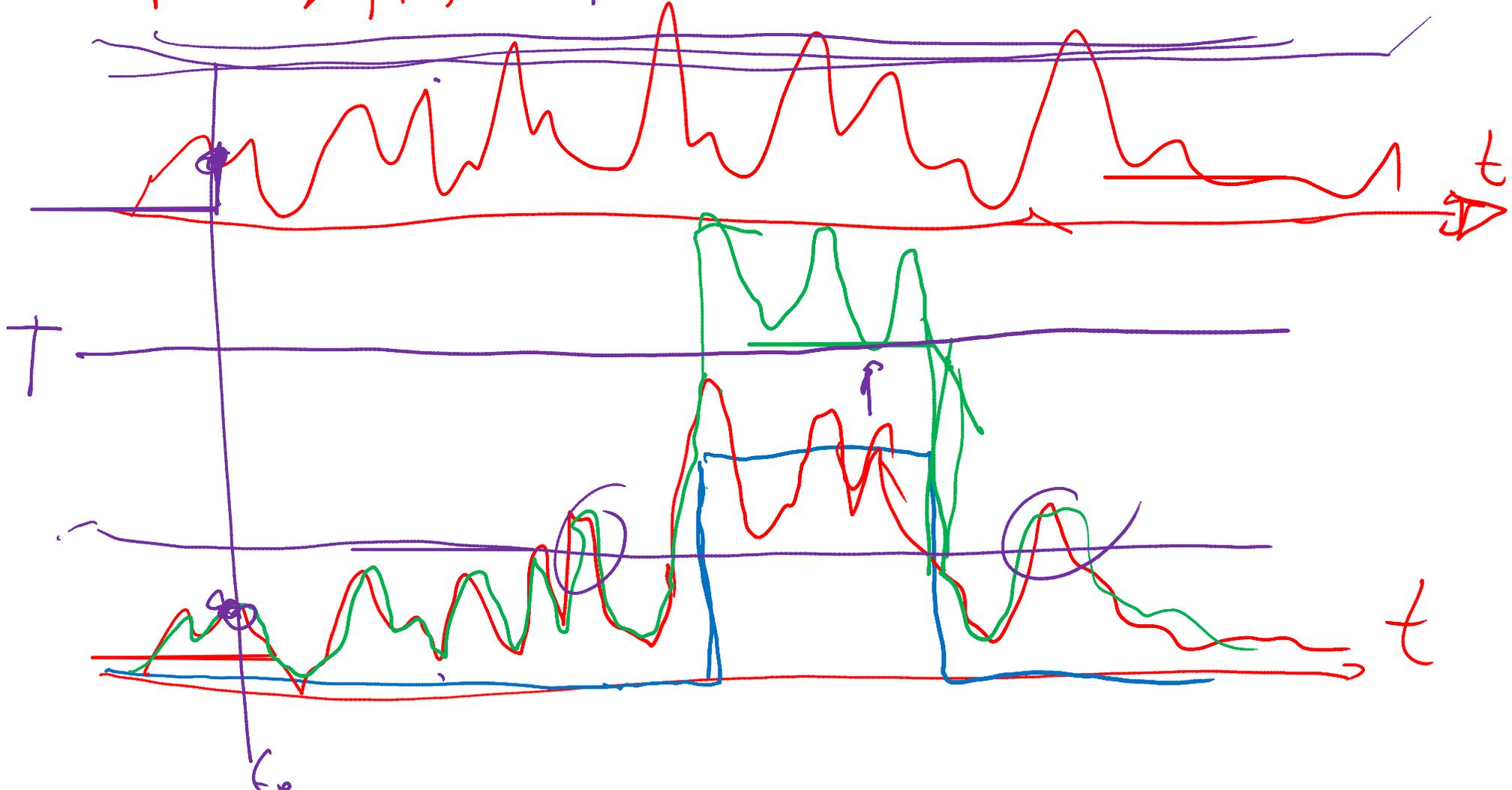
Problema di massimizzazione vincolata  $\Rightarrow$  problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

# Prob. di rivelazione, falso allarme e miss

		decisione	
		$H_0$	$H_1$
realtà	$M_0$	Decisione corretta $1 - P_{fa}$	FALSO ALLARME $P_{fd}$
	$M_1$	MISS $P_{miss} = 1 - P_d$	RIVELAZIONE (DETECTION) $P_d$

# Decisore a soglia sul modulo

$$\tilde{r} \rightarrow |\tilde{r}|^2 = r^2$$

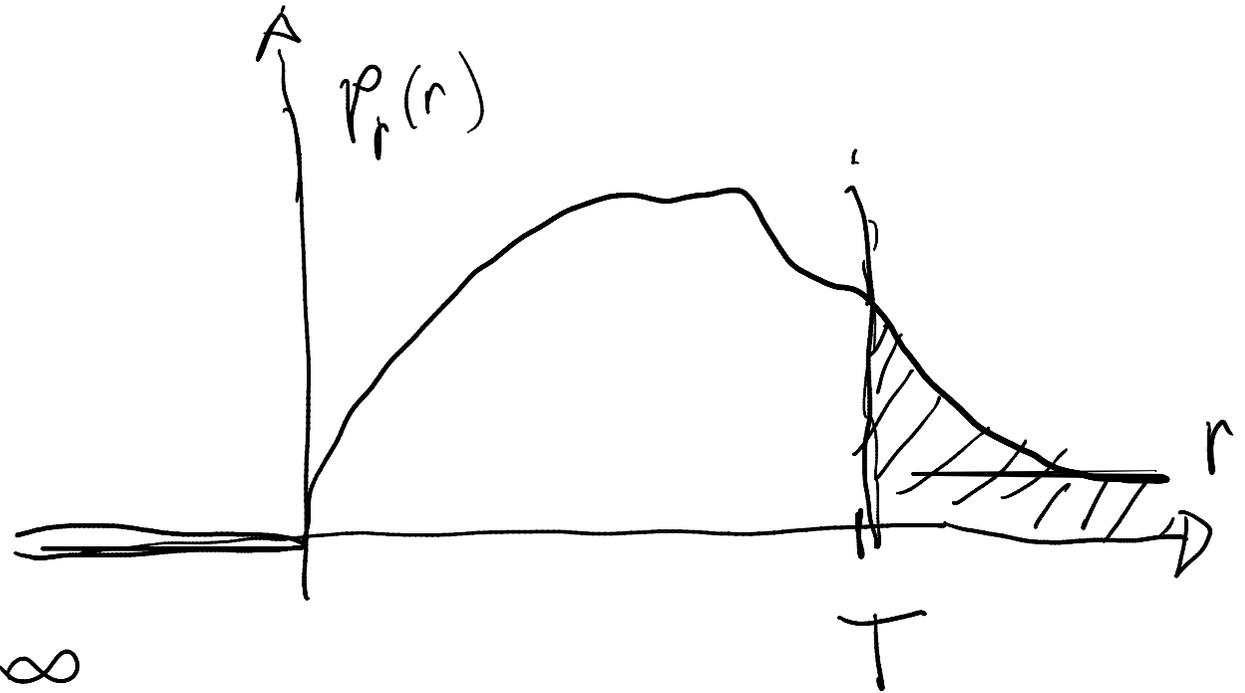


# Senale ricevuto in banda base

$$H_1: \text{se } r = |\tilde{r}| \geq T$$

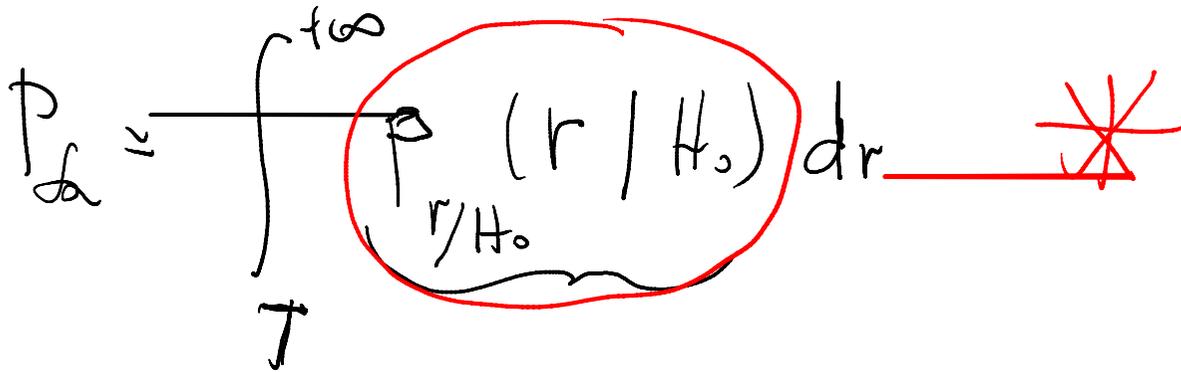
$$H_0: \text{se } r = |\tilde{r}| < T$$

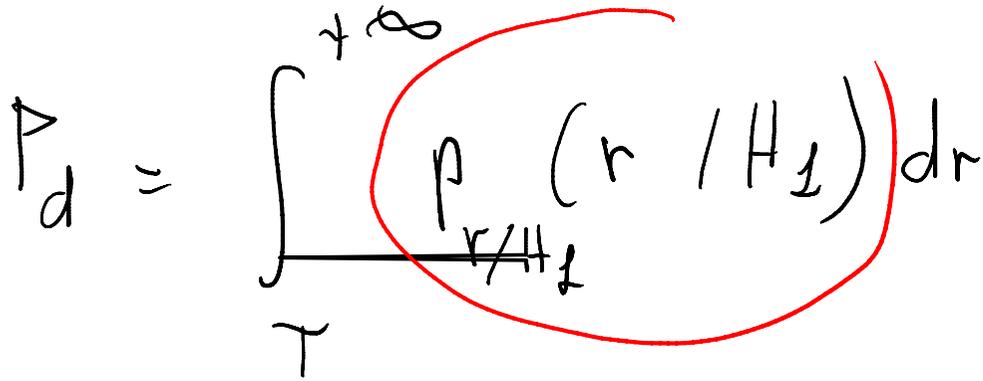
$$P_r(r)$$



$$P_{2b} \{ r > T \} = \int_T^{+\infty} P_r(r) dr$$

---

$$P_d \approx \int_T^{+\infty} \rho \left( \frac{r}{H_0} \right) dr$$


$$P_d \approx \int_T^{+\infty} \rho \left( \frac{r}{H_1} \right) dr$$


# Ipotesi $H_0$ ( $M_0$ )

\* 
$$P_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r_I^2 + r_Q^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{r_I, r_Q} = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} e^{-\frac{r_I^2}{\sigma_d^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_d} e^{-\frac{r_Q^2}{\sigma_d^2}}$$

$$H_0: \tilde{r} = \underbrace{r_I}_{\text{real}} + j \underbrace{r_Q}_{\text{imag}} = \tilde{n} = \underbrace{n_I}_{\text{real}} + j \underbrace{n_Q}_{\text{imag}}$$

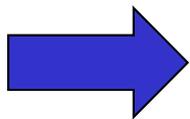
disturbo  $\tilde{n}$  = variabile aleatoria Gaussiana complessa con  
 valor medio = 0

varianza  $\sigma_d^2$

$$\langle n_I \cdot n_Q \rangle = 0$$

$n_I$  v.a. Gauss reale  
 $n_Q$  v.a. Gauss reale

$$\langle n_I^2 \rangle = \langle n_Q^2 \rangle = \frac{\sigma_d^2}{2}$$



$$\frac{2}{\sigma_d^2} \langle \tilde{n}^* \tilde{n} \rangle = \langle (n_I - j n_Q) (n_I + j n_Q) \rangle = \langle n_I^2 + n_Q^2 \rangle = 2 \langle n_I^2 \rangle$$

# Richiamo DDP (I)

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2 \right\}$$

$$\begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | H_0) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | H_0) dr_I dr_Q =$$

$$d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi$$

$$= p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r$$

$$p_{r, \phi}(z, \phi | H_0) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} r^2 \right\} \quad \times$$

$$p_r(r | H_0) = \int_0^{2\pi} p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} r^2 \right\} d\phi = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{r, \phi}(r_I, r_Q) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r_I^2 + r_Q^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{r, \phi}(r, \phi) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{(r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}{\sigma_d^2}} \cdot r =$$

$$P_{r, \phi}(r, \phi) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

Rayleigh

$$P_r(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} d\phi = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

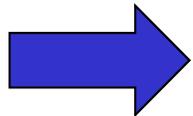
# Richiamo DDP (II)

$$p(\tilde{r} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r} - a|^2 \right\} \quad \begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | a; H_1) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | a; H_1) dr_I dr_Q = \quad d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi$$

$$= p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | a; H_1) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | a; H_1) \cdot r$$



$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |r \cdot \cos \phi + j r \cdot \sin \phi - a|^2 \right\} =$$

$$= \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\}$$

# Ipotesi $H_1$ ( $M_1$ )

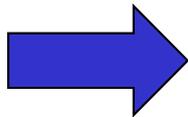
---

$$H_1: \quad \tilde{r} = r_I + j r_Q = \tilde{a} + \tilde{n} = a_I + n_I + j(a_Q + n_Q)$$

*disturbo  $\tilde{n}$  = variabile aleatoria Gaussiana complessa con*

*valor medio =  $\tilde{a}$*

*varianza  $\sigma_d^2$*



# Richiamo DDP (III)

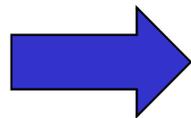
$$p_{r,\phi}(r, \phi | a; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\}$$

$$p_r(r | a; H_1) = \int_0^{2\pi} p_{r,\phi}(r, \phi | a; H_1) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[ r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |a|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2r|a|}{\sigma_d^2} \cdot \cos(\phi - \angle a) \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |a|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[ \frac{2r|a|}{\sigma_d^2} \right]$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt \quad \left( = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(t)} dt \right)$$



$$p_r(r | \sigma; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + \sigma}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[ \frac{2r \sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2} \right] \quad \sigma = |a|^2$$

# Richiamo DDP (IV)

$$t = \frac{r^2}{\sigma_d^2}$$

$$dt = \frac{2r}{\sigma_d^2} dr$$

$$p_r(r | a; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} + SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d} \sqrt{SNR}\right] \quad SNR = \frac{|a|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$\text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^\infty p_r(r | H_0) dr = \int_T^\infty \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr = \int_{T^2/\sigma_d^2}^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^\infty = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} &= \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} = \int_T^\infty p_r(r | \sigma; H_1) dr = \\ &= \int_T^\infty \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d} \sqrt{SNR}\right] dr = \\ &= \int_{T/\sigma_d}^\infty 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0\left[2t \sqrt{SNR}\right] dt \end{aligned}$$

# Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi  $H_0$  ( $a=0$ ) ho un Falso Allarme se

$$r = |\tilde{r}| > T$$

Poiché  $d_f(t)$  è Gaussiana a valor medio nullo e varianza  $\sigma_d^2$  ( $\sigma_d^2 = \sigma_n^2$  se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p_r(r | H_0) = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^\infty p_r(r | H_0) dr = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

# Probabilità di falso allarme $P_{fa}$

$$P_{fa} = \int_T^{\infty} p_r(r / M_0) dr = \int_T^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$\sigma_h^2 = \frac{\sigma_d^2}{2}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia  $T$  e dalla potenza del rumore  $\sigma_n^2$ : (disturb  $\sigma_d^2$ ) fissato il valore di  $P_{fa}$  desiderata e nota la potenza di rumore  $\sigma_n^2$  risulta individuato il livello di soglia  $T$ .

$$\alpha_0 = e^{-\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$\frac{1}{\alpha_0} = e^{\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$\ln \frac{1}{\alpha_0} = \frac{T^2}{2\sigma_n^2}$$



$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln \left( \frac{1}{P_{fa}} \right)}$$

$\downarrow$   
 $\alpha_0$