
Rivelazione

Teoria della decisione (I)

Sistema radar \Rightarrow esempio di decisione binaria: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- **bersaglio assente**: segnale ricevuto \equiv solo disturbo (\mathbf{H}_0);
- **bersaglio presente**: segnale ricevuto \equiv segnale utile più disturbo (\mathbf{H}_1);



Teoria della decisione (II)

Nella decisione radar si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi H_0 ma si decide per l'ipotesi $H_1 \Rightarrow$ il disturbo viene riconosciuto come bersaglio: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme (P_{fa}) è data da

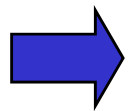
$$P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA'
DI FALSO
ALLARME**

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi H_1 ma si decide per l'ipotesi $H_0 \Rightarrow$ il bersaglio viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ($1-P_d$) è data da

$$1 - P_d = \int_{\Omega_0} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA' DI
MANCATA
RIVELAZIONE**



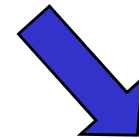
La partizione $\{\Omega_0, \Omega_1\}$ dello spazio delle osservazioni Ω dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione radar è il criterio di Neyman-Pearson.**

Teoria della decisione (III)

Nel criterio di decisione di Neyman-Pearson la partizione è individuata in modo tale che:

- ▶ la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato ($P_{fa} = \alpha_0$) \Rightarrow **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;
- ▶ la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la probabilità di rivelazione (P_d max);

$$\left. \begin{array}{l} \{\Omega_0, \Omega_1\} \\ \text{tale che} \end{array} \right\} \begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r} \quad \textit{massima} \end{cases}$$



Problema di massimizzazione vincolata \Rightarrow problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

Prob. di rivelazione, falso allarme e miss

Decisore a soglia sul modulo

Senale ricevuto in banda base

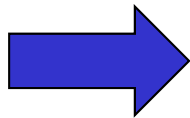
Ipotesi H_0 (M_0)

$$H_0: \quad \tilde{r} = r_I + j r_Q = \tilde{n} = n_I + j n_Q$$

disturbo \tilde{n} = variabile aleatoria Gaussiana complessa con

valor medio = 0

varianza σ_d^2

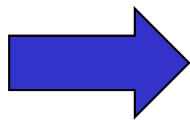


Richiamo DDP (I)

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2 \right\} \quad \begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | H_0) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | H_0) dr_I dr_Q = \quad d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi \\ = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | H_0) \cdot r$$



$$p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} r^2 \right\}$$

$$p_r(r | H_0) = \int_0^{2\pi} p_{r, \phi}(r, \phi | H_0) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} r^2 \right\} d\phi = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

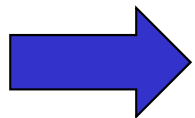
Richiamo DDP (II)

$$p(\tilde{r} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r} - a|^2 \right\} \quad \begin{cases} r = |\tilde{r}| = \sqrt{r_I^2 + r_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{r} = \text{arctg}(r_Q / r_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r_I = r \cdot \cos \phi \\ r_Q = r \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$p_{\tilde{r}}(\tilde{r} | a; H_1) d\tilde{r} = p_{r_I, r_Q}(r_I, r_Q | a; H_1) dr_I dr_Q = \quad d\tilde{r} = dr_I dr_Q = r dr d\phi$$

$$= p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | a; H_1) \cdot r dr d\phi = p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) dr d\phi$$

$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = p_{r_I, r_Q}(r \cdot \cos \phi, r \cdot \sin \phi | a; H_1) \cdot r$$



$$p_{r, \phi}(r, \phi | a; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |r \cdot \cos \phi + j r \cdot \sin \phi - a|^2 \right\} =$$

$$= \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\}$$

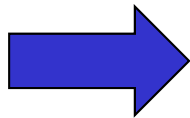
Ipotesi H_1 (M_1)

$$H_1: \quad \tilde{r} = r_I + j r_Q = \tilde{a} + \tilde{n} = a_I + n_I + j(a_Q + n_Q)$$

disturbo \tilde{n} = variabile aleatoria Gaussiana complessa con

valor medio = \tilde{a}

varianza σ_d^2



Richiamo DDP (III)

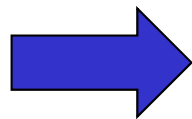
$$p_{r,\phi}(r, \phi | a; H_1) = \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\}$$

$$p_r(r | a; H_1) = \int_0^{2\pi} p_{r,\phi}(r, \phi | a; H_1) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{r}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[r^2 + |a|^2 - 2|a|r \cdot \cos(\phi - \angle a) \right] \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |a|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2r|a|}{\sigma_d^2} \cdot \cos(\phi - \angle a) \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + |a|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[\frac{2r|a|}{\sigma_d^2} \right]$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(t)} dt \right)$$



$$p_r(r | \sigma; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{r^2 + \sigma}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[\frac{2r \sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2} \right] \quad \sigma = |a|^2$$

Richiamo DDP (IV)

$$p_r(r | a; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} + SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right] \quad SNR = \frac{|a|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$\text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^{\infty} p_r(r | H_0) dr = \int_T^{\infty} \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}} dr = \int_{T^2/\sigma_d^2}^{\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^{\infty} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} &= \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} = \int_T^{\infty} p_r(r | \sigma; H_1) dr = \\ &= \int_T^{\infty} \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{r}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right] dr = \\ &= \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0\left[2t\sqrt{SNR}\right] dt \end{aligned}$$

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 ($a=0$) ho un Falso Allarme se

$$r = |\tilde{r}| > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p_r(r | H_0) = \frac{2r}{\sigma_d^2} e^{-\frac{r^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{r > T | H_0\} = \int_T^\infty p_r(r | H_0) dr = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

Probabilità di falso allarme P_{fa}

$$P_{fa} = \int_T^{\infty} p_r(r / M_0) dr = \int_T^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{T^2}{2\sigma_n^2}}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia T e dalla potenza del rumore σ_n^2 : (disturb σ_d^2) fissato il valore di P_{fa} desiderata e nota la potenza di rumore σ_n^2 risulta individuato il livello di soglia T .



$$T = \sigma_n \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{P_{fa}} \right)}$$

Probabilità di Rivelazione – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_1 ($a \neq 0$) ho una rivelazione se

$$r = |\tilde{r}| = |d(t) + a| > T$$

Ora c'è un valor medio (valore complesso) pari ad “a” volte il valore della funzione di ambiguità

$$p(\tilde{r} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{r}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p(\tilde{r} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |(\tilde{r} - a)|^2\right\}$$

$$p_r(r | \sigma; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2 + \sigma}{\sigma_d^2}\right\} \cdot I_0\left[\frac{2r \sqrt{\sigma}}{\sigma_d^2}\right]$$

$$SNR = \frac{|a|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma}{\sigma_d^2}$$

$$p_r(r | SNR; H_1) = \frac{2r}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{r^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2 \frac{r}{\sigma_d} \sqrt{SNR}\right]$$

$$P_d(SNR) = \text{Prob}\{r > T | \sigma; H_1\} = \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0[2t \sqrt{SNR}] dt$$

Probabilità di rivelazione P_d

$$P_d = \int_T^\infty p_r(r / M_1) dr = \int_T^\infty \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2+a^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{r a}{\sigma_n^2}\right) dr \cong \int_T^\infty \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}} dr = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{T}{\sigma_n \sqrt{2}} - \sqrt{SNR}\right) \right]$$

Non ammette soluzione in forma chiusa

Approx
S/N alto

La probabilità di rivelazione dipende dal rapporto fra la soglia V_T e il valore rms di rumore σ_n e dal rapporto segnale a rumore SNR.

$$SNR = \frac{a^2}{2\sigma_n^2} \gg 1 \Rightarrow I_0\left(\frac{r a}{\sigma_n^2}\right) \cong I_0\left(\frac{a^2}{\sigma_n^2}\right) \cong \left(2\pi \frac{a^2}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{a^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow p_r(r / M_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

SNR elevato \Rightarrow Rice \cong Gaussiana