Soluzioni Compito A

1. Supponendo di scegliere l'origine del sistema di riferimento nel punto al suolo sotto il punto di lancio, le equazioni del moto divengono:
   $x(t) = v_{0x}t$ $\quad$ $v_x(t) = v_{0x}$
   $y(t) = h + v_{0y}t-1/2gt^2$ $\quad$ $v_y(t) = v_{0y}-gt$
   L'altezza massima raggiunta si ha nell'istante t_1 in cui $v_y = 0$;
   ciò si verifica per $t_1 = v_{0y}/g$ e quindi l'altezza massima è
   $h_O= y_{MAX} = y(t_1) = h +v_{0y}^2/2g$ da cui $\mathbf{v_{0y}=\sqrt{[2g(h_O-h)]} = 2.43m/s}$
   allora il valore minimo del modulo di $\mathbf{v_0=\sqrt{(v_{0x}^2+ v_{0y}^2)}=\sqrt{((4/3v_{0y})^2+ v_{0y}^2)} = 4.05\ m/s}$
   Il tempo di volo coincide con l'istante in cui $y = 0$ ed è dunque la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $h+v_{0y}t-1/2gt^2 = 0$ e quindi
   $t_2 = [v_{0y} +\sqrt{(v^2_{0y}+2gh)}]/g = 0.933$ s
   La velocità d'impatto v_I è la velocità all'istante t_2, quindi
   $\mathbf{v_I} = v(t_2) = \sqrt{(v^2_{Ix}+ v^2_{Iy})}=\sqrt{(v^2_x(t_2) + v^2_y(t_2))}$ **= 7.45 m/s** :

MODO veloce:

Il moto lungo x è uniforme quindi basta calcolare i valori di v_{0y} e v_{Iy}. Se si fa uso della conservazione dell'energia dobbiamo calcolare la velocità v_{0y} capace di far salire il PM di una quota (h_O-h) quindi:
$1/2mv^2_{0y} = mg(h_O-h)$ da cui $v_{0y}=\sqrt{[2g(h_O-h)]} = 2.43m/s$
Per calcolare la velocità d'impatto essendo v_x=cost. è sufficiente calcolare v_{Iy} che è data dalla velocità di caduta da quota h_O quindi: $v_{IY}=\sqrt{(2gh_O)}=6.71$ m/s

2. Il punto m si muoverà su una traiettoria circolare sotto la condizione che la risultante delle forze sia nulla lungo il raggio. Orientando l'asse X da m verso il punto O abbiamo:
   $ma = kx-m\omega^2R= kx-m\omega^2(r_0+x) = 0$ (1)
   dove x è l'allungamento della molla rispetto alla posizione di riposo. Risolvendo si ha:
   $x = mr_0\omega^2/(k-m\omega^2) = 15$ cm
   da cui il raggio della circonferenza $\mathbf{R=r_0+x= 45\ cm}$
   Nel caso in cui $\omega = 7$ rad/s la (1) diventa:
   $kx - m\omega^2x - m\omega^2r_0 < 0$ per qualunque valore di x infatti $(k-m\omega^2)=-2.5$ N/m < 0 la forza elastica di richiamo della molla è insufficiente per creare una situazione di equilibrio.

3. Lungo l'asse del moto (x) scriviamo $F - Fa = M a_{CM} = M\alpha R$ dove F è la forza con cui viene tirata la ruota, Fa è la forza di attrito statico ed a_{CM} è l'accelerazione del centro di massa. Lungo la verticale (y) abbiamo $N - Mg = 0$, con N reazione vincolare. Rispetto al centro di massa della ruota l'equazione dei momenti si scrive:
   $FaR = \alpha I$. Il momento di inerzia della ruota rispetto al suo centro è pari a $I = 1/2\ MR^2$.
   Risolvendo le equazioni del moto si ottiene: $N = mg$. $\alpha = 2F/(3\ MR^2)$. $Fa = F/3$.
   Imponendo la condizione di non slittamento: $Fa<= |\mu_S N|$ si ottiene $\mathbf{F<= 3\mu_S Mg \sim 29.4\ N}$.

4. Nell'ipotesi che la Luna si muova su traiettoria circolare l'equazione del suo moto proiettata in direzione radiale si scrive come:
   $- GM_Tm_L/d^2_{T\text{-}L} = - m_L\omega^2d_{T\text{-}L}$ da cui si ottiene che $d^3_{T\text{-}L} = GM_T/\omega^2$ (1).
   il valore di ω si ricava essendo noto il valore del periodo di rivoluzione lunare pari a:
   $T = 24\text{x}3600\text{x}27.25 = 2354400$ s da cui $\omega = 2\pi/T = 2.668\text{x}10^{-6}$ rad/s
   Sostituendo nella (1) si ha: $\mathbf{d^3_{T\text{-}L} = GM_T/\omega^2}$ da cui $\mathbf{d_{T\text{-}L} = 382400\ km.}$
   Per calcolare la velocità iniziale di un razzo v_{0R} che volesse raggiungere dal centro della

terra una distanza pari a $\mathbf{d_{T\text{-}L}}$ possiamo utilizzare la conservazione dell'energia e trascurando l'attrazione lunare si ottiene:
$\frac{1}{2}\, m_R v_{0R}^2 - GM_T m_R/R_T = -GM_T m_R/d_{T\text{-}L}$ da cui si ricava che:
$v_{0R} = \sqrt{[2GM_T(1/R_T - 1/d_{T\text{-}L})]} = 11114$ m/s di poco inferiore alla velocità di fuga di $v_F = \sqrt{(2GM_T/R_T)} = 11200$ m/s.

5. Dalla legge dei gas perfetti ricaviamo $V_1 = nRT_1/p_1 = 5.1\times10^{-3}$ m^3; Essendo $V_2 = 4V_1$ e gli stati 1 e 2 collegati da un'isoterma si ha $p_2 = nRT_1/4V_1 = 1/4\ p_1$. Lo stato 3 è sull'adiabatica che riporta allo stato 1 e si dovrà avere: $p_1V_1^\gamma = p_2V_3^\gamma$ (avendosi $p_2 = p_3$ visto che gli stati 2 e 3 sono collegati da una isobara).
Si ottiene quindi che $(V_3/V_1)^\gamma = p_1/p_2 = 4$ e $V_3 = V_1 4^{(5/7)}$.
Dall'equazione di stato dei gas ideali abbiamo inoltre $T_3 = p_2V_3/nR$. Essendo un ciclo $\Delta U=0$ e quindi $\Delta Q = L$. Nell'isoterma $L_{1,2}=Q_{1,2}=nRT_1\ln(V_2/V_1)=Q_{ass}=1.07\times10^4$ J.
Per l'isobara $Q_{2,3} = nc_p(T_3-T_2) = -8.87\times10^3$ J. Nell'adiabatica finale si avrà $Q_{3,1} = 0$ J. non essendoci scambio di calore. Sul ciclo avremo $\mathbf{L} = Q_{1,2} + Q_{2,3} = \mathbf{1.82\times10^3 J}$.
Per il rendimento si avrà $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{L/Q_{ass}} = L/Q_{1,2}$ quindi $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{0.17}$.

Soluzioni Compito B

1. Le leggi del moto della palla sono
$x(t) = 4/5v_0t$
$y(t) = h + 3/5v_0t - 1\text{-}2gt^2$
dove h = 150m è l'altezza del cannone rispetto alla valle sottostante.
La palla colpisce il bersaglio se in un dato istante t_1 si trova nel punto di coordinate (D; 0) cioè se vale x
$x(t_1) = D = 4/5v_0t_1$
$y(t_1) = 0 = h + 3/5v_0t_1 - 1/2gt_1^2$
Utilizzando la prima delle equazioni del moto si trova
$t_1 = 5D/(4v_0)$ che sostituita nella seconda:
$h + 3D/4 - 25gD^2/(32v_0^2) = 0$
da cui $32v_0^2/4 = 25gD^2/(4h+3D)$ da cui $v_0^2 = 25/8D^2g/(4h+3D)$
da cui $\mathbf{v_0 = 5/2D\sqrt{[g/(8h + 6D)]} = 239}$ **m/s**.
per calcolare la velocità d'impatto conviene usare la conservazione dell'energia altrimenti i conti diventano faticosi. La conservazione dell'energia si scrive come:
$mgH + 1/2mv_0^2 = 1/2mv_I^2$ da cui si ricava che $\mathbf{v_I = \sqrt{(v_0^2+2gh)} = 245}$ **m/s**

2. L'equazione della dinamica del sistema lungo una direzione radiale è:
$kx - N - m\omega^2R = 0$
l'ω massima per cui il corpo resta in contatto con la guida si ottiene quando la reazione normale delle guida si annulla cioè quando la forza elastica non riesce a schiacciare il corpo contro la guida. Per ogni ω maggiore il corpo si distacca dalla guida. Allora si ottiene:
$kx - N - m\omega^2R = 0$ da cui $\omega^2_{max} = k(R-r_0)/(mR)$ da cui $\boldsymbol{\omega_{max}} = \mathbf{5.21}$ **rad/s**
Per il valore di $\omega=4$ rad/s il valore dell'energia meccanica è dato da:
$\mathbf{E_M = \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}k(R-r_0)^2 = 0.52J}$

3. L'equazione del moto del rocchetto si deduce dalla seconda legge di Newton e dal teorema del momento angolare:

$Ma = Mg - T$ (legge di Newton proiettata lungo l'asse verticale)
$M = I\alpha = TR$.
Sostituendo ad I il momento di inerzia del cilindro $I=1/2MR^2$ ed ad $\alpha=a/R$ si ricava: $T = 0.5$ Ma. Sostituendo nella prima equazione si ottiene $\mathbf{a=2/3\ g = 6.54\ m/s^2}$ e
$\mathbf{T = M\ g\ /3 = 2.62\ N.}$

4. La forza d'attrazione terrestre a distanza r_0 dalla terra vale:
   $\mathbf{F_G(r_0)} = GM_Tm/r_0^2 = \mathbf{221\ N}$
   per calcolare le velocità v_0 e v_2 dobbiamo utilizzare la conservazione dell'energia: quando si trova nello spazio profondo il meteorite non risente della forza di gravità quindi la sua energia è puramente cinetica il che significa che $½\ mv_2^2=½\ mv_1^2$ da cui $\mathbf{v_1 = v_2}$. Quando invece si trova in prossimità della terra la sua energia sarà la somma di energia cinetica e energia potenziale gravitazionale:
   $½\ mv_1^2 = ½\ mv_0^2 - GM_Tm/r_0$ da cui si ricava che:
   $v_0^2= v_1^2 + 2GM_T/r_0$ da cui $\mathbf{v_0 = \sqrt{(v_1^2 + 2GM_T/r_0)} = 6190\ m/s}$ maggiore della velocità d'ingresso come atteso essendo la forza gravitazionale terrestre attrattiva.

5. Nelle due isoterme si ha $\Delta U = 0$ e $Q = L = nRT \ln (V_f/V_i)$ e quindi:
   $Q_1=L_1=nRT_1\ln (V_2/V_1) = nRT_1\ln 2$ Assorbito
   $Q_3=L_3= -nRT_2 \ln 2$. Ceduto
   Lungo le isocore i lavori sono nulli e quindi si calcola
   $Q_2 = nc_V(T_2-T_1)$ Ceduto
   $Q_4 = nc_V (T_1-T_2)$ Assorbito
   Il lavoro complessivo in un ciclo è pari a $L = nR(T_1-T_2) \ln 2 = 692$ J. Il rendimento della macchina è calcolabile come $\mathbf{\eta = L/Q_{ass} = L/(Q_1+Q_4) = 0.124}$