

SOLUZIONI ESATTE DELLE EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES.

Generalmente le equazioni di Navier - Stokes, insieme all'equazione di stato, di continuità ed eventualmente quella dell'energia costituiscono un sistema differenziale di tale complessità la cui soluzione è quasi sempre impossibile. Anche nel caso di fluido isocoro, le equazioni di Navier - Stokes sono non lineari a causa dell'inerzia convettiva. Tale termine potrà essere trascurato per valori molto bassi del numero di Reynolds ed in questi casi è possibile trovare alcune soluzioni analitiche, o nei casi più complessi numeriche, soluzioni che come si vedrà hanno la struttura tipica delle soluzioni di strato limite nelle vicinanze di una parete solida, confermando il fatto che la viscosità si fa sentire soprattutto in presenza di tali contorni solidi, ed i suoi effetti sono prevalentemente confinati in un loro intorno piuttosto ristretto.

FLUSSI PARALLELI. Sono per definizione quelli in cui vi è una sola componente del vettore velocità:

$$u(x, y, z', t) \quad , \quad v = 0 \quad , \quad w = 0 \quad (1)$$

dove si è indicata con z' la terza coordinata cartesiana, non necessariamente coincidente con un asse verticale diretto verso l'alto che continueremo ad indicare con z . Nel caso isocoro l'equazione di continuità si riduce ad affermare che

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

il moto è **uniforme**, in quanto l'unica componente della velocità non varia nella direzione del moto. Dalle (1) e (2) si vede che sono nulli tutti i termini della accelerazione convettiva e le equazioni di Navier - Stokes si riducono ad equazioni lineari:

$$\frac{1}{g} \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{1}{g} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\gamma} \nabla^2 \vec{v} \quad (3)$$

che proiettate danno:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} \right) = -\frac{d}{dx} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \frac{\mu}{\gamma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} \right) \quad (4)$$

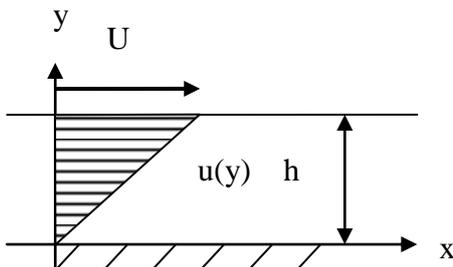
$$\frac{\partial}{\partial y} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{\partial}{\partial z'} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = 0 \quad (5)$$

Le (5) ribadiscono la circostanza che anche per un *fluido reale*, così come lo si era già visto per un fluido perfetto, *in una corrente lineare la distribuzione delle pressioni in direzione normale al moto è idrostatica*, per questo motivo nella (4) la derivata della piezometrica può anche essere indicata col simbolo di derivata ordinaria. Tale derivata, cambiata di segno, è la **cadente piezometrica** ed è indicata con J . La (4) è una equazione differenziale lineare in $u(y, z', t)$ che andrà risolta imponendo le condizioni al contorno, che nel caso di pareti solide fisse sono anche esse lineari:

$$u(y, z', t) = 0 \quad \text{sul contorno} \quad (6)$$

si è imposta cioè sia la condizione di non penetrazione né distacco dalla parete, come per i fluidi perfetti, ma anche la condizione di **non scorrimento** sulla parete, condizione questa tipica dei fluidi reali. Si consideri qualche caso particolare.

FLUSSO IN UN CANALE PIANO. In un canale delimitato da due piani paralleli distanti h , il primo fermo ed il secondo in movimento con velocità U , la (4) fornisce nel caso stazionario



$$-\frac{d}{dx} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = J = -\frac{\mu}{\gamma} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{g} \frac{d^2 u}{dy^2} \quad (7)$$

il cui integrale generale è

$$u(y) = -\frac{gJ}{2\nu} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (8)$$

dove le costanti di integrazione vanno determinate con le condizioni al contorno.

FLUSSO DI COUETTE. Il canale è orizzontale e la pressione non varia in direzione del moto, quindi $J = 0$, la velocità è nulla sulla prima parete, $u(0) = 0$, mentre sulla seconda $u(h) = U$, in tali condizioni la (8) fornisce

$$u(y) = \frac{U}{h} y \quad (9)$$

l'andamento delle velocità è lineare mentre lo sforzo di taglio è costante in ogni punto del canale

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{U}{h} = \tau_w = \text{cost.} \quad (10)$$

e pari allo sforzo di taglio sulla parete (wall) τ_w .

FLUSSO DI POISEUILLE PIANO. Le pareti del canale sono ora entrambe ferme, $U = 0$, ma vi è una cadente piezometrica $J \neq 0$ dovuta o al fatto che il canale è in discesa, o al fatto che vi è una differenza di pressione lungo di esso. Le condizioni $u(0) = u(h) = 0$ imposte alla (8) comportano ora:

$$u(y) = -\frac{gJ}{2\nu} y(y-h) \quad (11)$$

una distribuzione parabolica della velocità, ed una distribuzione lineare dello sforzo di taglio

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\gamma J \left(y - \frac{h}{2} \right) \quad (12)$$

che è nullo in mezzeria ed è massimo, in valore assoluto, sulle pareti

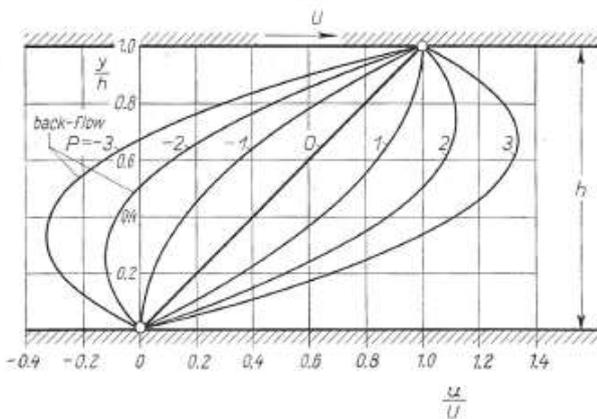
$$\tau_w = \frac{\gamma J h}{2} \quad (13)$$

Se contemporaneamente sono presenti entrambe le cause di moto, sia $J \neq 0$ che $U \neq 0$, la (8) da:

$$u(y) = \frac{U}{h} y - \frac{gJ}{2\nu} y(y-h) = \frac{U}{h} y \left[1 + P \left(1 - \frac{y}{h} \right) \right] \quad (14)$$

che si può anche ricavare direttamente sovrapponendo la soluzione di Couette (9) con quella di Poiseuille (11) stante la linearità del problema. Nella (14) si è posto:

$$P = \frac{\tau_{wp}}{\tau_{wc}} = \frac{gJ}{2\nu} \frac{h^2}{U} = \frac{1}{2} J \frac{Uh}{\nu} \frac{gh}{U^2} = \frac{1}{2} J \frac{Re}{Fr^2} \quad (15)$$



che è legato al rapporto tra forze di massa e forze viscosi. Per $P < -1$ si ha una inversione del flusso, vi è cioè una zona del canale in cui prevale l'azione di trascinamento della parete ed una zona in cui prevale il gradiente della piezometrica. Questo tipo di flusso è il caso più semplice ma per certi versi il più emblematico della **teoria idrodinamica della lubrificazione**, che riguarda per l'appunto lo studio di sottili strati di fluidi viscosi, in genere olii, tra organi meccanici in movimento relativo. In tali problemi il numero di Reynolds è molto piccolo per l'alta viscosità del fluido, per le piccole dimensioni dello strato, e per le piccole velocità relative in quanto se il progetto meccanico è stato eseguito correttamente si saranno evitati il più possibile gli strisciamenti. Ha pertanto senso considerare la soluzione limite per $Re \rightarrow 0$ delle equazioni di Navier - Stokes che riguarda i cosiddetti

FLUSSI DI STOKES. Supponendo il fluido isocoro, le forze di massa trascurabili ed il moto permanente si ha

$$\nabla p = \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (16)$$

dette **equazioni di Stokes** che insieme all'equazione di continuità ed alle condizioni al contorno che generalmente assegnano la velocità su delle superfici note risolvono completamente il problema: si hanno infatti 4 equazioni differenziali lineari nelle quattro incognite u, v, w, p . Per geometrie semplici, come quelli già esaminati del canale piano e pochi altri, si hanno soluzioni analitiche, mentre per altri si possono trovare soluzioni numeriche. Il campo tipico di applicazione dei flussi di Stokes rimane per l'appunto quello della teoria idrodinamica della lubrificazione.

FLUSSO DI HAGEN-POISEUILLE. In un tubo cilindrico a sezione circolare si potrà instaurare un flusso parallelo in moto permanente assumendo coordinate cilindriche r, θ, x e ponendo $u_r = u_\theta = 0, u = u(r)$, la (2) afferma sempre che il moto è uniforme, mentre le (5) afferma sempre che nelle sezioni trasversali del tubo la distribuzione delle pressioni è idrostatica e la piezometrica è quindi funzione della sola ascissa x , mentre la (4) in coordinate polari da:

$$\frac{\mu}{\gamma} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{\mu}{\gamma} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = \frac{d}{dx} \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) = -J \quad (17)$$

il cui integrale generale è

$$u(r) = -\frac{gJ}{4\nu} r^2 + c_1 \ln r + c_2 \quad (18)$$

in cui la costante c_1 deve annullarsi se si vuole che la velocità sia finita sulla mezzeria e la costante c_2 si determina imponendo la condizione di non scorrimento sulla parete del tubo $u(R) = 0$. Si ottiene il **profilo parabolico di velocità di Poiseuille**

$$u(r) = \frac{gJ}{4\nu} (R^2 - r^2) \quad (19)$$

mentre lo sforzo di taglio ha andamento lineare

$$\tau(r) = \mu \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\gamma J}{2} r \quad (20)$$

ed è nullo al centro e massimo in valore assoluto sulla parete

$$\tau_w = \tau(R) = -\frac{\gamma J}{2} R = -\frac{\gamma J}{4} D \quad (21)$$

la velocità è massima in mezzeria

$$u_{\max} = u(R) = \frac{gJ}{4\nu} R^2 = \frac{gJD^2}{16\nu} \quad (22)$$

e la portata è

$$Q = \iint_A u(r) dA = \frac{gJ}{4\nu} \int_0^R (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\pi gJD^4}{128\nu} \quad (23)$$

mentre la velocità media è

$$V = \frac{1}{A} \iint_A u(r) da = \frac{Q}{A} = \frac{1}{2} u_{\max} = \frac{gJD^2}{32\nu} \quad (24)$$

La (23) è la celeberrima **formula di Poiseuille** dal nome del medico e fisiologo francese Jean Léonard Marie Poiseuille che studiando la circolazione sanguigna condusse intorno al 1840 esperienze in flussi su tubi capillari a bassi numeri di Reynolds ed arrivò a stabilire sperimentalmente la (23) ben prima che fossero integrate le equazioni stabilite da Navier. La (23) fu ricavata sempre in via sperimentale, quasi contemporaneamente, dal prussiano Gotthilf Heinrich Ludwig Hagen ed è quindi anche nota come **formula di Hagen – Poiseuille**.

Le soluzioni qui descritte delle equazioni di Navier – Stokes costituiscono altrettanti esempi di **moto laminare** in quanto possono essere immaginate come costituite da sottili strati di fluido, cioè da *lamine*, che scorrono le une sulle altre: lamine piane nel caso dei flussi di Couette e Poiseuille piano, lamine cilindriche coassiali nel caso del flusso di Hagen - Poiseuille. Tali regimi sono anche detti di **moto viscoso** poiché in essi le forze viscosse hanno un ruolo fondamentale in quanto prevalenti rispetto alle altre forze in gioco, in particolare rispetto alle forze d'inerzia che negli esempi ideali ora visti erano addirittura nulle. Caratteristica dei regimi laminari è, come si vede dalle (11), (14), (23), (24), il *legame lineare tra cadente piezometrica e velocità, o portata*. Le soluzioni di moto laminare sono indipendenti dal numero di Reynolds e sussistono qualunque esso sia, ma mentre per bassi numeri di Reynolds il moto laminare è stabile, per alti numeri di Reynolds il moto laminare diventa instabile. Questo poiché se le forze d'inerzia sono piccole rispetto alle forze viscosse eventuali disturbi tendono ad attenuarsi, mentre nel caso contrario tendono ad esaltarsi e facilmente il moto diviene **turbolento**. Per le condotte cilindriche a sezione circolare si è soliti definire il numero di Reynolds

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (25)$$

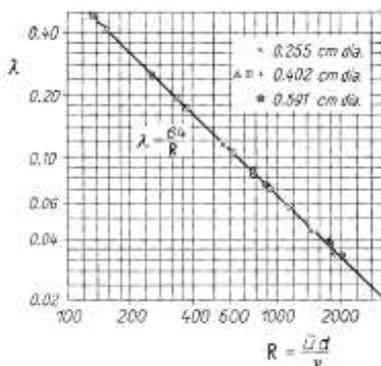
il cui valore critico è all'incirca 2300, nel senso che per valori più bassi il regime è quasi sicuramente laminare, mentre per valori più elevati il regime potrebbe ancora essere laminare se si pone grande attenzione a non provocare disturbi, ma ci si trova comunque in una situazione di equilibrio instabile e, nei casi concreti, è molto probabile che il regime diventi turbolento.

La cadente piezometrica, il gradiente di pressione nella direzione del moto sono altrettante misure della resistenza di un tubo al moto di un fluido. Si è soliti misurare tale resistenza all'avanzamento mediante il **coefficiente di resistenza**

$$\lambda = \frac{-\frac{\partial p}{\partial x}}{\frac{1}{2} \rho v^2} D = \frac{JD}{2g} \quad (26)$$

La (24) fornisce la **legge universale di resistenza dei tubi in regime laminare**

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (27)$$



Da Hermann Schlichting: "Boundary Layer Theory".

Exact solutions of the Navier-Stokes equations:
Laminar flow through pipe; resistance coefficient, λ , plotted against Reynolds number measured by Hagen, from Prandtl-Tietjens