

## STATICA DEI FLUIDI.

In un fluido in quiete in un qualunque sistema di riferimento, anche non inerziale, per le ipotesi fatte circa la natura di un fluido, non nascono sforzi tangenziali. Gli autovalori del tensore degli sforzi sono tutti coincidenti e tutte le direzioni dello spazio sono principali. Si ha cioè il **Principio di Pascal**:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} \quad \text{ossia} \quad \underline{\underline{\Phi}} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (1)$$

dove il segno meno sta ad indicare che, a meno di deboli forze intermolecolari di attrazione responsabili dei fenomeni di *capillarità*, un fluido può essere soggetto solo a compressione; e  $p$  rappresenta la **pressione** che possiamo ritenere coincidente con la *pressione termodinamica* e dipende a sua volta dalle altre grandezze termodinamiche attraverso le equazioni di stato e di equilibrio energetico.

L'equazione di equilibrio delle forze si riduce all'**equazione indefinita dell'equilibrio statico di un fluido**:

$$\rho \vec{F} = \nabla p \quad (2)$$

avendo indicato con  $\mathbf{F}$  la risultante delle forze di massa per unità di massa (dimensionalmente è una accelerazione). La (2) può facilmente ricavarsi direttamente, imponendo per esempio l'equilibrio delle forze ad un parallelepipedo elementare, oppure derivarsi dalle equazioni di Navier – Stokes. Affinché sussista l'equilibrio statico (2) *le forze di massa debbono necessariamente essere conservative* ed il fluido deve essere **barotropico**. Detto  $U$  il **potenziale** delle forze di massa, la (2) può scriversi:

$$\rho \vec{F} = \rho \nabla U = \nabla p \quad (3)$$

dall'uguaglianza vettoriale deriva che  $\nabla U$  e  $\nabla p$  debbono avere la stessa direzione e quindi:

*le superfici equipotenziali delle forze di massa* ( $U = \text{cost.}$ ) *coincidono con le superfici isobariche* ( $p = \text{cost.}$ ), e, poiché su tali superfici debbono uguagliarsi anche i moduli della (3), *coincidono con le superfici isocore* ( $1/\rho = \text{cost.}$ ), ciò comporta che la densità dovrà essere funzione univoca della pressione.

**L'equilibrio statico è possibile solo per un fluido barotropico soggetto a forze conservative.**

Escludendo forze di tipo elettromagnetico o nucleare le uniche forze di massa in gioco sono la **forza di attrazione terrestre**  $g'$ , e la **forza centrifuga**  $\Omega^2 R$  dovuta alla rotazione diurna ( $R$  è il raggio del parallelo corrispondente ed  $\Omega$  la velocità angolare del moto di rotazione terrestre). Considerando un raggio terrestre medio  $R_T$  pari 6371 km risulta

$$g' = G \frac{M_T}{R_T^2} = 6.673 \times 10^{-11} \frac{5.973 \times 10^{24}}{6.371^2 \times 10^{12}} = 9.82 \text{ m s}^{-2} \quad (4)$$

che è diretta verso il centro della terra ed è di circa 3 ordini di grandezza superiore alla forza centrifuga. Infatti la durata del giorno siderale vale

$$T = 60 \times 60 \times 24 \frac{365,24}{366,24} \text{ s} = 86164 \text{ s} \quad (5)$$

vale cioè circa 4 minuti meno del giorno solare, a causa del moto di rivoluzione terrestre. La velocità angolare del moto di rotazione diurna è

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1} \quad (6)$$

La **forza di gravità** o **peso** (per unità di massa) è data dalla somma delle due forze

$$\vec{g} = \vec{g}' + \Omega^2 \vec{R} \quad (7)$$

All'equatore risulta

$$g = 9.82 - 7.29^2 \times 10^{-10} \times 6.37 \times 10^6 = 9.82 - 0.03 = 9.79 \text{ m s}^{-2} \quad (8)$$

che è solo del 3% inferiore al valore  $g'$  che essa assume ai poli.

Prendendo l'asse  $z$  secondo la verticale locale, la (3) può risciversi

$$\frac{\nabla p}{\rho} = \nabla \left( g' z - \frac{\Omega^2 R^2}{2} \right) \quad (9)$$

la superficie libera che è isobara, isocora ed equipotenziale per la gravità, ha equazione

$$g'z - \frac{\Omega^2 R^2}{2} = \text{cost.} \quad (10)$$

Tra poli ed equatore vi è quindi uno schiacciamento pari a

$$\Delta z = \frac{\Omega^2 R^2}{2g'} = \frac{(7.29 \times 10^{-5} \times 6.37 \times 10^6)^2}{2 \times 9.82} = 11 \text{ km} \quad (11)$$

In realtà lo spostamento di masse prodotto dall'azione della forza centrifuga modifica il potenziale gravitazionale, rinforzando ulteriormente l'effetto ora rilevato. La condizione di equilibrio finale corrisponde ad un raggio equatoriale superiore di 21 km al raggio polare, equivalente ad una variazione del 3‰ rispetto al raggio terrestre medio. Si può infine constatare che la variazione della gravità tra polo ed equatore è del 5‰.

In atmosfera ad una quota  $z > 0$  risulta

$$g'(z) = G \frac{M_T}{(R_T + z)^2} \quad (12)$$

e poiché anche alle maggiori quote è sempre  $z \ll R_T$

$$\Delta g' = \left[ \frac{\partial g'}{\partial z} \right]_{z=0} \Delta z = -2G \frac{M_T}{R_T^3} \Delta z = -\frac{2}{R_T} g' \Delta z = -\frac{2}{6.371 \times 10^6} g' \Delta z = -3.14 \times 10^{-7} g' \Delta z \quad (13)$$

a 10 km di altezza si ha una diminuzione della gravità del 3‰. Nel mare poi la variazione, questa volta in aumento, è ancora minore stante le minori profondità raggiungibili ed il fatto che l'unica massa in grado di produrre una forza gravitazionale è quella che si trova ad una profondità maggiore di quella in esame.

Nella stragrande maggioranza dei problemi applicativi si considera un riferimento cartesiano ortogonale locale con asse  $z$  verticale diretto verso l'alto e gli assi  $x, y$  sul piano tangente alla superficie terrestre nel punto considerato. Un tale riferimento può, con buona approssimazione essere ritenuto inerziale, l'unica forza di massa presente è il peso, e trascurando sia gli effetti della curvatura terrestre, sia la variazione della accelerazione di gravità con la quota, la (3) si riduce a:

$$\rho \vec{g} = -\rho g \nabla z = -\nabla p \quad (14)$$

che può essere letta: *in un fluido pesante in equilibrio statico le superfici isobariche, isocore ed equipotenziali sono i piani orizzontali*. La (4) fornisce quindi informazioni solo sulla verticale e ci si può limitare alla sola equazione scalare:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = \frac{dp}{dz} + \rho g = \frac{dp}{dz} + \gamma = 0 \quad (15)$$

avendo indicato con  $\gamma = \rho g$  il **peso specifico** del fluido in esame.

## IDROSTATICA.

Normalmente per l'acqua, e più in generale per i liquidi, si pone  $\rho = \text{cost.}$  ossia  $\gamma = \text{cost.}$  per cui la (15) può essere immediatamente integrata dando la celebre **legge di Stevino**:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \zeta = \text{cost.} \quad (16)$$

La (6) è stata scritta, secondo una ben radicata consuetudine dell'**Idraulica**, facendovi comparire tutti termini aventi dimensioni lineari ed identificabili con segmenti verticali:

- il termine  $z$  è detto **quota geodetica**, in quanto rappresenta la quota in un riferimento terrestre peraltro arbitrario,
- il termine  $\frac{p}{\gamma}$  è detto **altezza piezometrica**, in quanto rappresenta il contributo dovuto alla pressione,
- il termine  $\zeta$ , somma dei due precedenti, è detto **quota piezometrica**, e rappresenta la quota dei punti del piano in cui la pressione è nulla, detto **piano dei carichi idrostatici**.

La legge di Stevino si può enunciare affermando che *tutti i punti di un fluido pesante isocoro hanno la stessa quota piezometrica, ossia hanno lo stesso piano dei carichi idrostatici*.

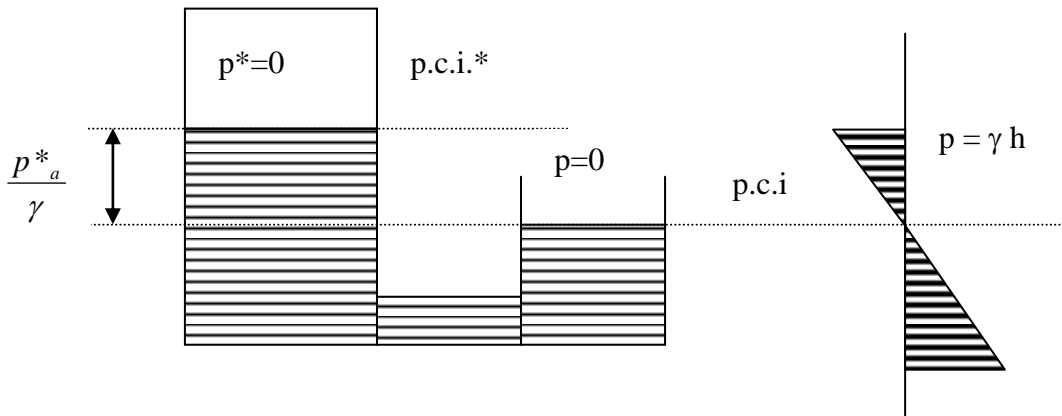
Nell'Idraulica è poi consuetudine riferirsi alle **pressioni relative** che altro non sono che le **pressioni assolute**, già definite e che da ora in poi indicheremo col simbolo  $p^*$ , a cui si sottrae la **pressione atmosferica assoluta**  $p_a^*$

$$p = p^* - p_a^* \quad (17)$$

in parole povere si attribuisce convenzionalmente il valore  $p = 0$  alla pressione atmosferica. Si potranno avere pressioni relative negative dette **depressioni** non superiori, in modulo, ad una atmosfera, che mediamente vale 1,013 bar, il che corrisponde per l'acqua ad una altezza piezometrica di circa 10,33 m. Nei problemi usuali dell'idraulica si trascurano le variazioni della pressione atmosferica con la quota e con i fattori meteorologici.

Per risolvere un problema di **Idrostatica** è necessario individuare il piano dei carichi idrostatici relativo a tale problema. Nel caso di un recipiente aperto in cui vi sia una superficie libera del fluido, a contatto con l'atmosfera, questa coincide con il piano dei carichi idrostatici (relativi), mentre nel caso di recipiente chiuso sigillato si può avere una superficie libera nel vuoto (a meno della tensione di vapore e della pressione dei gas disciolti nel liquido) che costituisce il piano dei carichi assoluto. Dopo di che noto l'**affondamento**  $h = \zeta - z$  di un generico punto la distribuzione della pressione è "**idrostatica**", cioè lineare:

$$p = \gamma h \quad (18)$$



Da notare inoltre che la distribuzione delle pressioni è del tutto indipendente dalla forma del recipiente, ciò è connesso con alcuni paradossi dell'idrostatica, il più noto dei quali è il **paradosso di Pascal**: la pressione sul fondo di una botte sormontata da un tubicino molto alto e pieno di liquido è la stessa che si ha in un serbatoio di grande volume a parità di affondamento.

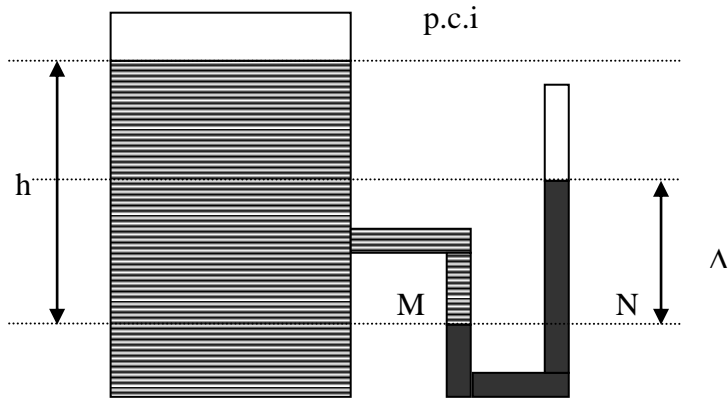
Se nello stesso recipiente si hanno diversi fluidi non miscibili tra loro le superfici di contatto dovranno all'equilibrio necessariamente essere delle isobare e quindi dei piani orizzontali (a meno dei fenomeni di capillarità); l'equilibrio sarà poi stabile se i fluidi di peso specifico maggiore sono disposti più in basso di quelli più leggeri.

## MISURE DI PRESSIONE.

Come si è detto, per conoscere la pressione di un fluido in equilibrio idrostatico basta individuare il suo piano dei carichi idrostatici relativi e ciò può essere facilmente fatto mediante un tubo trasparente, verticale o inclinato, collegato ad una estremità al serbatoio del quale si intende misurare la pressione e con l'altra estremità aperta in atmosfera. Tale dispositivo è detto **piezometro** in quanto individua la quota piezometrica.

In qualche altro caso può essere più conveniente individuare il piano dei carichi idrostatici assoluti. Per fare ciò basta disporre di un tubo trasparente sigillato ad un'estremità in modo che si possa creare il vuoto, tale è il **barometro di Torricelli**.

Più spesso, per motivi di praticità, specie se le pressioni sono elevate, si ricorre al **manometro**, costituito da un tubo ripiegato ad U e riempito di un liquido, solitamente mercurio, di peso specifico maggiore del fluido di cui si intende misurare la pressione

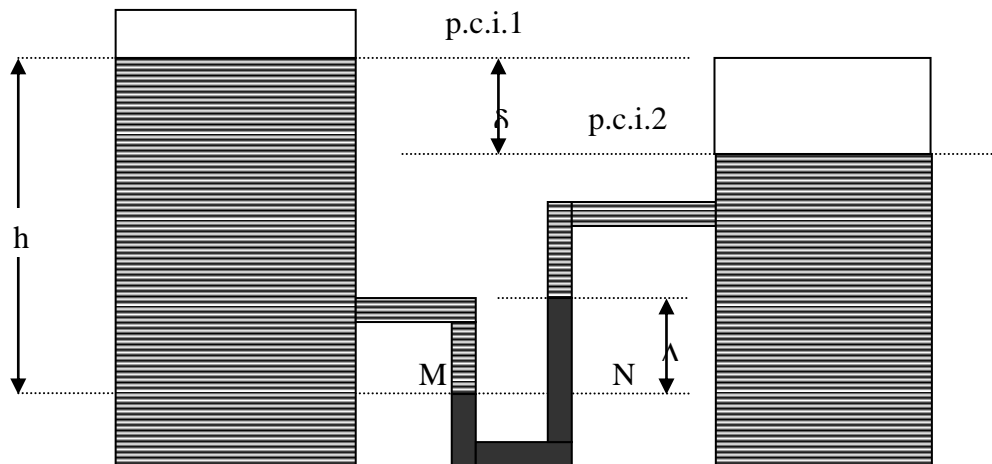


Indicando con  $\gamma$  il peso specifico del liquido nel serbatoio e con  $\gamma_m$  il peso specifico del fluido manometrico risulta:

$$p_M = \gamma h = p_N = \gamma_m \Delta$$

$$h = \Delta \frac{\gamma_m}{\gamma} \quad (19)$$

che permette di trovare, mediante la lettura del manometro  $\Delta$ , il piano dei carichi idrostatici, anche quando non sia direttamente osservabile. Talvolta occorre conoscere la differenza di pressione tra due serbatoi contenenti lo stesso fluido; in tal caso si usa un tubo trasparente ripiegato ad U e contenente il fluido monometrico, collegato ai due serbatoi. Tale dispositivo è detto **manometro differenziale**.



$$p_M = \gamma h = p_N = \gamma_m \Delta + \gamma(h - \delta - \Delta)$$

$$\delta = \Delta \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} = \Delta \left( \frac{\gamma_m}{\gamma} - 1 \right) \quad (20)$$

Con piccole modifiche le (19) e (20) possono essere impiegate anche se il fluido manometrico è più leggero del fluido in misura, il che potrebbe essere utile per aumentare la sensibilità dello strumento, in tal caso il tubo ad U dovrà essere rovesciato. In idraulica si usano spesso manometri differenziali con aria in pressione ed il rapporto tra i pesi specifici dell'aria e dell'acqua può essere considerato pressoché nullo e quindi  $\delta \approx \Delta$ .

Per le misure di pressione si possono inoltre impiegare dispositivi meccanici, quali il manometro a molla Bourdon, e trasduttori elettrici di pressione, che altro non sono se non opportune modificazioni di microfoni, tali dispositivi sono in grado di misurare anche pressioni rapidamente variabili.

## SPINTE IDROSTATICHE SU SUPERFICI.

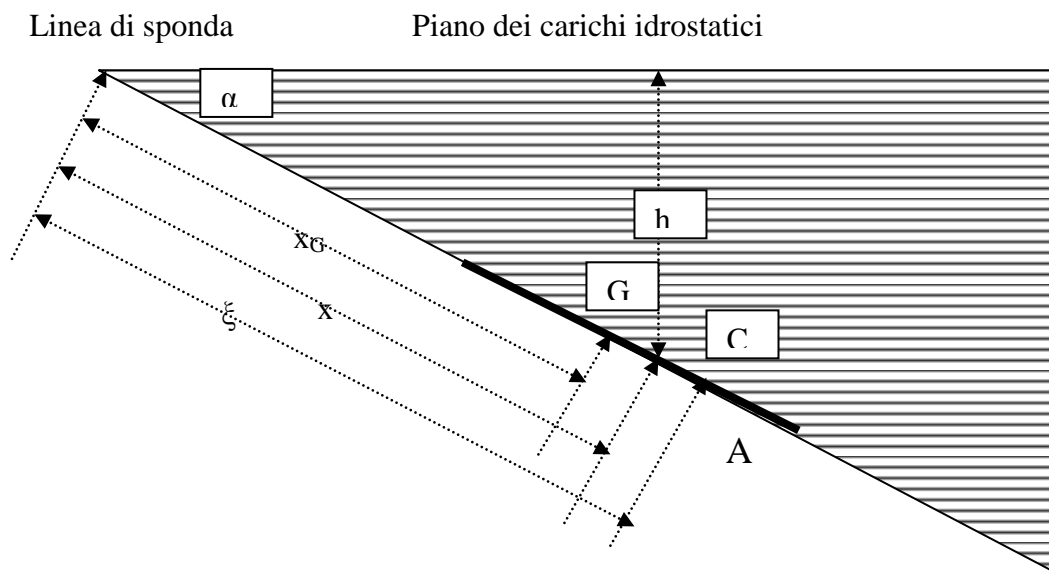
La spinta idrostatica su una superficie A, scomponibile in elementi dA di normale  $\mathbf{n}$ , è il vettore:

$$\vec{S} = \iint_A p \vec{n} \, dA = \iint_A \gamma h \vec{n} \, dA \quad (21)$$

Nel caso particolare che la superficie A sia piana il vettore  $\mathbf{n}$  è costante e la (21) può essere risolta scalarmene:

$$S = \iint_A p \, dA = \iint_A \gamma h \, dA = \gamma \iint_A h \, dA = \gamma h_G A = p_G A \quad (22)$$

avendo indicato con il pedice G le quantità calcolate nel baricentro geometrico della superficie A. Quanto poi alla direzione ed al verso di  $\mathbf{S}$ , sono gli stessi di  $\mathbf{n}$ . Si può concludere affermando che *la spinta su una superficie piana immersa in un fluido in equilibrio idrostatico è una forza normale a tale superficie e di intensità pari alla pressione nel baricentro geometrico della figura per la sua area*. Ci si può poi intuitivamente rendere conto che il **centro di spinta**, cioè il baricentro delle forze elementari, dovrà essere più in basso del centro geometrico, in quanto le aree elementari più affondate sono soggette a pressioni maggiori. Detta **linea di sponda** l'intersezione del piano dei carichi idrostatici con il piano della figura, si assuma su tale piano un sistema di riferimento cartesiano ortogonale in cui l'asse y coincida con la linea di sponda. Le coordinate  $\xi$  e  $\eta$  del centro di spinta debbono rispettare l'equilibrio dei momenti rispetto agli assi



$$S \xi = \iint_A p x \, dA = \iint_A \gamma h x \, dA = \gamma \sin \alpha \iint_A x^2 \, dA$$

$$S \eta = \iint_A p y \, dA = \iint_A \gamma h y \, dA = \gamma \sin \alpha \iint_A x y \, dA$$

gli integrali a secondo membro rappresentano rispettivamente il **momento di inerzia** I della superficie A rispetto alla linea di sponda ed il **momento centrifugo**  $I_{xy}$  di A rispetto ai due assi x ed y. La (12) può essere riscritta facendo comparire il **momento statico** M di A rispetto alla linea di sponda

$$S = \gamma h_G A = \gamma x_G A \sin \alpha = \gamma M \sin \alpha \quad (23)$$

In definitiva, introducendo il momento di inerzia  $I_0$  rispetto ad una parallela alla retta di sponda passante per il baricentro (teor. di Steiner), si ottengono le coordinate del centro di spinta:

$$\xi = \frac{I}{M} = \frac{I_0 + x_G^2 A}{M} = x_G + \frac{I_0}{M} \quad (24) \quad \eta = \frac{I_{xy}}{M} \quad (25)$$

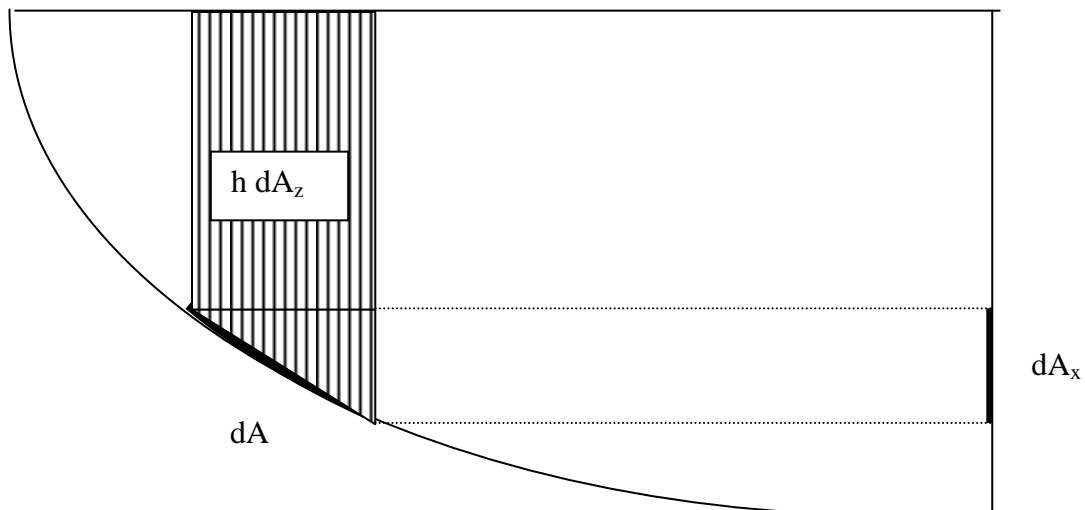
che ci mostrano che *il centro di spinta è sempre più basso del baricentro* (tranne nel caso di superficie orizzontale in cui i due punti coincidono) in quanto momento di inerzia e momento statico sono quantità sicuramente positive. Inoltre la posizione del centro di spinta è indipendente dall'inclinazione  $\alpha$ , essa è *invariante rispetto a rotazioni attorno alla retta di sponda*. Se tra le linee di massima pendenza ve ne è una di simmetria per la superficie A, *il centro di spinta giace su tale linea di simmetria*, in quanto ivi si annulla il momento centrifugo. Vale la pena di osservare che la relazione tra linea di sponda e centro di spinta è la stessa che intercorre tra *asse neutro e centro di applicazione della forza in una sezione pressoinflessa: una relazione di antipolarità rispetto all'ellisse centrale d'inerzia della sezione A*.

Tornando al caso generale di **spinta idrostatica su una superficie curva** la (11) può scomporsi nelle tre componenti

$$S_x = \iint_A p \cos nx \, dA = \iint_{A_x} p \, dA_x = p_x A_x = \gamma h_x A_x \quad (26)$$

$$S_y = \iint_A p \cos ny \, dA = \iint_{A_y} p \, dA_y = p_y A_y = \gamma h_y A_y \quad (27)$$

$$S_z = \iint_A p \cos nz \, dA = \iint_A p \, dA_z = \gamma \iint_A h \, dA_z = \gamma W \quad (28)$$



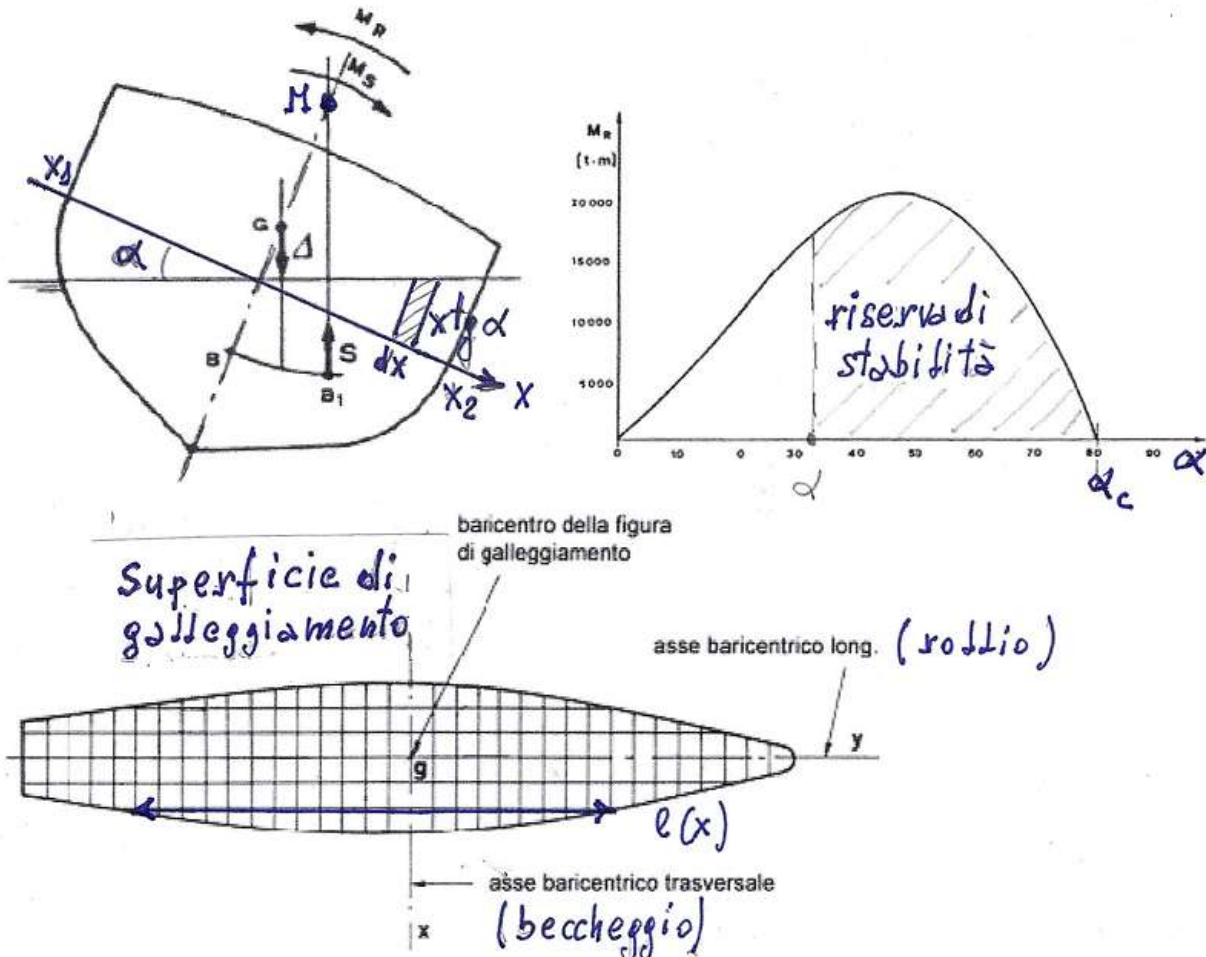
in quanto i termini  $dA_x$ ,  $dA_y$ ,  $dA_z$  rappresentano le proiezioni dell'area elementare  $dA$  sui tre piani coordinati, e quindi **le due componenti orizzontali della spinta** sono ricondotte al calcolo delle **spinte sulle superfici piane verticali normali agli assi x ed y** e che si ottengono proiettando la superficie di partenza sui piani suddetti; tali superfici sono state indicate con  $A_x$  ed  $A_y$  ed i loro baricentri con  $h_x$  ed  $h_y$  rispettivamente. Nell'eseguire le proiezioni bisogna fare attenzione alla molteplicità delle figure ottenute. Valgono poi tutte le considerazioni circa il centro di spinta relativo alle figure piane. Infine l'integrale che compare nella (28) altro non è che **il peso del volume di fluido compreso tra la superficie in questione ed il piano dei carichi idrostatici** e delimitato lateralmente da un cilindro a direttrici verticali. Anche per la componente verticale della spinta occorre fare attenzione alla molteplicità delle figure che si ottengono.

In particolare per un corpo immerso si ottiene il celeberrimo risultato di Archimede: *“un corpo immerso riceve una spinta verso l'alto pari al peso del volume di fluido spostato”*. Allo stesso risultato si può giungere in maniera più intuitiva applicando l'equazione di **equilibrio statico dei fluidi in forma globale**, cioè la (2) integrata ad un volume finito qualsiasi  $W$ , dette  $\vec{G}$  la risultante delle forze di massa che agiscono sul volume in questione, e  $\vec{\Pi}$  la risultante delle spinte verso l'interno del volume risulta (teor. di Green)

$$-\iiint_W \rho \vec{F} \, dW - \iiint_W \nabla p \, dW = \iiint_W \rho \vec{g} \, dW + \iint_A p \vec{n} \, dA = \vec{G} + \vec{\Pi} = 0 \quad (29)$$

L'equazione globale dell'equilibrio statico (18) può tornare utile in molti casi applicativi, quali il calcolo delle spinte su superfici geometricamente complicate il cui contorno giace su un piano.

Con riferimento alle navi ed ai natanti al loro peso viene dato il nome di **dislocamento** ed insiste sul baricentro della nave. La parte immersa della nave viene detta **carena** o **opera viva** in contrapposizione alla parte emersa dello scafo detta **opera morta**. L'intersezione della nave con il piano di galleggiamento è detta **superficie di galleggiamento**. All'equilibrio la spinta di Archimede eguaglia il dislocamento della nave ed il centro di carena B ed il baricentro della nave G giacciono sulla stessa verticale. Se tale equilibrio fosse instabile la più piccola perturbazione porterebbe al capovolgimento del natante, mentre se fosse indifferente la vita a bordo diverrebbe insostenibile. Occorre pertanto che tale equilibrio sia stabile.



Avvenuta la rotazione il volume di carena W e quindi la spinta di  $\gamma W$  restano gli stessi in modulo, ma cambia la forma della carena, il centro di spinta si porta da B in B' che, per galleggianti simmetrici, si trova ancora nel piano di figura. Per piccoli angoli di sbandamento  $\alpha$  il luogo dei centri di spinta B si può approssimare con un cerchio il cui centro si trova sull'intersezione della verticale per B' con l'asse BG in un punto M detto **metacentro**; l'equilibrio è stabile se il metacentro è più alto del baricentro ed il momento di richiamo vale

$$M_R = \gamma W \overline{MG} \sin \alpha = \gamma W (\overline{MB} - \overline{GB}) \sin \alpha = \gamma \int_{x_1}^{x_2} x l(x) x t g \alpha dx \cong \gamma W \left( \frac{I}{W} - \overline{GB} \right) \sin \alpha \quad (29)$$

Il raggio metacentrico MB è pari al momento d'inerzia della sezione di galleggiamento diviso il volume della carena. Il tipico andamento del **diagramma di stabilità** è quello riportato in figura; l'area racchiusa fra la curva e l'asse delle ascisse individua la **riserva di stabilità** che indica la resistenza che la nave può opporre alle cause sbandanti, ovvero il lavoro che i momenti sbandanti devono compiere per il capovolgimento della nave. L'angolo  $\alpha_c$  rappresenta l'angolo oltre il quale l'equilibrio diviene instabile. Un semplice modo per aumentare la stabilità consiste nel zavorrare la nave fino a portare il baricentro al disotto del centro di carena, come avviene col bulbo delle barche a vela, ed in tal caso l'equilibrio è stabile per qualsiasi angolo di sbandata e la barca non potrà mai scuffiare.

Il caso più critico è quello del **rollio**, cioè l'oscillazione attorno ad un asse longitudinale in direzione prua-poppa, cui corrisponde il momento di inerzia minimo ed il metacentro più basso, mentre il momento di inerzia massimo corrisponde al **beccheggio**.

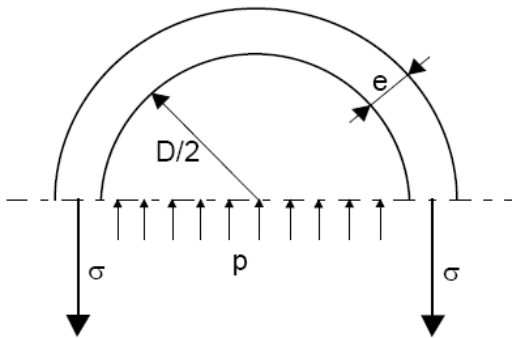
## FORMULA DI MARIOTTE PER TUBI SOTTILI.

Nel caso in cui il tubo sia sottoposto ad elevata pressione si possono trascurare le variazioni di pressione con la quota, il che equivale a trascurare il peso del fluido nell'equilibrio globale (29). In tale approssimazione la spinta che agisce sulla superficie curva del semitubo è la stessa che sulla superficie di un suo piano diametrale. Preso uno spezzone di tubo lungo  $dL$  di spessore molto piccolo (almeno un cinquantesimo del diametro) in modo da poter ritenere la sollecitazione di trazione uniformemente ripartita su tale spessore, con i simboli in figura,

$$2\sigma e dL = pD dL$$

ossia

$$e = \frac{pD}{2\sigma} \quad (30)$$



La formula di Mariotte (30) può essere interpretata come il minimo spessore da dare al tubo in corrispondenza della massima sollecitazione normale  $\sigma$  ammissibile.

## STATICA DEI FLUIDI COMPRIMIBILI.

### Liquidi comprimibili.

Lungo la verticale locale l'equilibrio statico di un fluido comprimibile è

$$\frac{dp}{dz} + \rho g = 0 \quad (1)$$

L'equazione di stato per l'acqua, o più in generale per un liquido debolmente comprimibile, può essere posta nella forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\rho}{\varepsilon} = \frac{1}{c^2}, \quad \text{con } \varepsilon = 2 \times 10^9 \text{ N m}^{-2}, \quad c = 1400 \text{ m s}^{-1} \quad (2)$$

dove la derivata andrebbe calcolata in maniera adiabatica, ma, stante l'elevata conducibilità dell'acqua, può essere intesa in forma isoterma. La (2) integrata fornisce

$$\rho = \rho_0 \exp \frac{p}{\varepsilon} \quad \text{con } \rho_0 = \rho(p=0) \quad (3)$$

che sostituita nella (1) ed integrata, indicando con  $h = z_0 - z$  l'affondamento rispetto alla superficie libera in cui, come è consuetudine dell'idraulica, si è posto  $p = 0$

$$p = -\varepsilon \ln \left[ 1 - \frac{\gamma_0 (z_0 - z)}{\varepsilon} \right] = \gamma_0 h \left[ 1 + \frac{\gamma_0 h}{2\varepsilon} + \dots \right], \quad \text{con } \gamma_0 = \rho_0 g = 10^4 \text{ N m}^{-2} \quad (4)$$

Nella Fossa delle Marianne si ha un aumento della pressione del 5% rispetto all'idrostatica. La distribuzione idrostatica può pertanto ritenersi più che valida nelle acque costiere dove la deviazione da essa risulterà inferiore di almeno 2 ordini di grandezza di quella ora calcolata. Infine nella maggior parte dei fenomeni costieri la distribuzione idrostatica resta con buona approssimazione valida anche in molti casi dinamici.

### ATMOSFERA STATICA.

In una atmosfera secca statica si può applicare la legge dei gas perfetti. Indicando con il pedice "0" le grandezza alla quota  $z = 0$  del livello del mare si ha



$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{T}{T_0} \quad (5)$$

che insieme all'equazione di equilibrio statico (1) non è ora sufficiente a rendere determinato il problema, in quanto si è introdotta la nuova variabile T "temperatura assoluta". L'equilibrio energetico, sotto l'ipotesi dell'assenza di scambi di calore, porta all'equazione dell'adiabatica. Poiché le osservazioni sperimentali non sempre collimano con i risultati che si otterrebbero con tale procedimento si preferisce utilizzare una più generale trasformazione detta **trasformazione politropica**

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n \quad (6)$$

che generalizza il caso dell'adiabatica con un esponente generico; per i gas biatomici, che costituiscono il 99% dell'aria, l'adiabatica corrisponde al caso  $n = 1.4$ . Sostituendo la politropica (20) nell'equilibrio statico (14), integrando e ricavando la temperatura con l'equazione di stato (19) si trova:

$$\begin{aligned} p &= p_0 \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right]^{\frac{n}{n-1}} \\ \rho &= \rho_0 \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right]^{\frac{1}{n-1}} \\ T &= T_0 \left[ 1 - \frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{p_0} z \right] \end{aligned} \quad \text{con} \quad \begin{aligned} p_0 &= 1.013 \text{ bar} \\ \rho_0 &= 1.225 \text{ kg m}^{-3} \\ T_0 &= 288.15^\circ \text{ K} \end{aligned} \quad \begin{aligned} z_0 &= \frac{p_0}{\rho_0 g} = 8400 \text{ m} \\ z_{\max} &= z_0 \frac{n}{n-1} \\ \frac{\partial T}{\partial z} &= -\frac{n-1}{n} \frac{T_0}{z_0} \end{aligned} \quad (8)$$

- per  $n$  tendente all'infinito si otterrebbe un'atmosfera idrostatica, un "mare d'aria" di profondità 8400 m che avvolge la terra;
- per  $n = 1.4$  si ha un'atmosfera adiabatica con un gradiente termico verticale di circa  $10^\circ \text{ K/km}$  e con un'altezza di circa 28 km;
- per  $n = 1.2$  si ha l'atmosfera politropica assunta come **atmosfera standard** della **troposfera** dall'International Civil Aviation Organization, cui corrisponde il gradiente termico statisticamente più frequentemente misurato, di circa  $6^\circ \text{ K/km}$  ed un'altezza teorica di circa 48km, che è ben al di là del campo di applicazione di tale modello. E' da notare che il gradiente termico della politropica conferisce stabilità statica all'atmosfera secca, ma può già essere al limite della stabilità in presenza di umidità;
- per  $n = 1$  si ottiene un'atmosfera isoterma illimitata superiormente, che meglio simula gli alti strati dell'atmosfera, dove peraltro lo schema del continuo non è più applicabile;
- infine per  $n$  minore di 1 si presenta il fenomeno dell'inversione termica.

Per una visione qualitativa di tali fenomeni e per le figure si consiglia di consultare il sito web della NASA: [http://fas.org/irp/imint/docs/rst/Sect14/Sect14\\_1a.html](http://fas.org/irp/imint/docs/rst/Sect14/Sect14_1a.html)

## EQUILIBRIO RELATIVO.

Con tale espressione viene tradizionalmente indicato in idraulica il caso di un **liquido in quiete in un riferimento non inerziale**. Il fluido è sottoposto oltre che al proprio peso anche alle forze (per unità di volume) d'inerzia  $\rho \mathbf{A}$  dovute al trascinarsi, l'equilibrio statico diviene quindi

$$\rho(\vec{g} - \vec{A}) = \nabla p \quad (1)$$

formalmente identica all'equazione di Eulero, anche se con un diverso significato, in quanto il fluido è immobile, o, se si preferisce, è animato da un moto rigido, ed  $\mathbf{A}$  è un dato del problema. L'equilibrio relativo (1) può sussistere solo se il campo delle forze di trascinarsi è conservativo e detto  $U$  il gradiente dell'accelerazione risulta

$$\begin{aligned} \nabla \left( z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U}{g} \right) &= 0 \\ z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U}{g} &= \text{cost} \quad (2) \end{aligned}$$

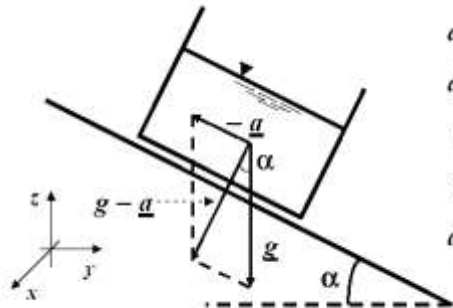
le superfici isobariche

$$z + \frac{U}{g} = \cos t \quad (3)$$

coincidono con le superfici equipotenziali del campo di forze complessivo, dovuto sia al peso che all'inerzia del trascinamento.

**ESEMPIO: serbatoio che cade senza attrito lungo un piano inclinato.**

Con i simboli in figura.



$$a_y = -g \sin \alpha \cos \alpha; a_z = g \sin \alpha \sin \alpha;$$

$$dp = (\partial p / \partial y) dy + (\partial p / \partial z) dz$$

$$dp = -\rho a_y dy - \rho (g + a_z) dz$$

$$dp = \rho g \sin \alpha \cos \alpha dy - \rho (g + g \sin \alpha \sin \alpha) dz$$

$$dp = 0 \Rightarrow dz / dy = -(\sin \alpha \cos \alpha) / \sin^2 \alpha = -\operatorname{tg} \alpha$$

$$z + y \operatorname{tg} \alpha = \text{costante}$$

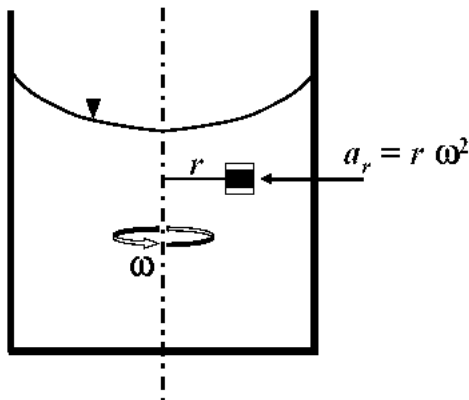
**Superfici isobariche**

sono piani paralleli al piano inclinato, tra queste vi è anche la superficie libera. Poiché alla forza di massa (per unità di massa)  $g$  del campo gravitazionale si è ora sostituita una forza costante di modulo costante  $g \cos \alpha$ , la pressione varia linearmente lungo la normale al piano inclinato

$$p = h \cos \alpha \quad (4)$$

indicando, come al solito, con  $h$  l'affondamento rispetto alla superficie libera, dove si è posto  $p=0$ . In particolare quando  $\alpha=90^\circ$  la pressione è ovunque nulla, ed è quanto si verifica nei getti liberi.

**ESEMPIO: centrifuga.**



con i simboli in figura.

$$U = -\frac{1}{2} \omega^2 r^2 + \cos t$$

$$z + \frac{p}{\gamma} - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \cos t$$

le superfici isobariche

$$z - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \cos t = z_0$$

sono paraboloidi di rotazione

In ogni punto agisce una forza di massa normale alle superfici isobariche pari alla risultante del peso e della forza centrifuga, tanto più grande quanto maggiore è la velocità di rotazione e la distanza dall'asse. Su tale principio si basano le centrifughe per la separazione in tempi rapidi di elementi di diversa densità.

Nel caso di recipienti chiusi si possono avere depressioni al centro tanto più forti quanto maggiore è la velocità di rotazione fino a raggiungere la pressione assoluta nulla con la conseguente rottura della vena fluida e l'innescio della cavitazione. Fenomeno da tener presente in tutti i casi di fluidi in forte rotazione quali pompe centrifughe, eliche etc.