TENSORI. (G. Ricci Curbastro, T. Levi Civita, 1901)

Tensore di ordine n nello spazio euclideo reale a 3 dimensioni è un ente reale dipendente da n indici variabili da 1 a 3, composto quindi da 3^n componenti reali, **invariante rispetto ad un cambiamento di base** (o di riferimento). Assegnare un tensore equivale quindi a fornire le sue componenti

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

in un dato sistema di riferimento, e la legge di trasformazione nel passare dal riferimento delle u_i a quello delle $u_j(u_i)$

$$\overline{A_{j_1 j_2 \cdots j_n}} = A_{i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{\partial u_{i_1}}{\partial u_{j_1}} \frac{\partial u_{i_2}}{\partial u_{j_2}} \cdots \frac{\partial u_{i_n}}{\partial u_{j_n}}$$

Per l' esattezza la definizione data riguarda i **tensori cartesiani** invarianti per trasformazioni di base ortogonale, più in generale occorrerebbe distinguere tra le componenti coovarianti del tensore, che si trasformano come le coordinate, e le componenti controvarianti, che si trasformano in maniera opposta (occorre moltiplicare per le derivate delle nuove coordinate rispetto alle vecchie).

Gli **scalari** sono **tensori di ordine zero**, i **vettori** sono **tensori di ordine uno**.

Un tensore si dice **simmetrico** rispetto ad una coppia di indici se scambiando tra loro i due indici il tensore non cambia, mentre se cambia di segno si dirà **emisimmetrico** rispetto ai due indici; se un tensore è simmetrico rispetto a tutte le possibili coppie di indici il tensore si dice simmetrico senza specificare altro, analogamente nel caso emisimmetrico.

Si definiscono alcune operazioni tra tensori per le quali si può facilmente verificare che sono operazioni **invarianti** (definiscono cioè un nuovo tensore indipendentemente dal sistema di riferimento in cui si opera).

Addizione tra tensori dello stesso ordine. E' la somma delle componenti omologhe ed il risultato è un tensore dello stesso ordine:

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_n} + B_{i_1 i_2 \cdots i_n} = C_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

che gode di tutte le usuali proprietà della somma (i tensori di ordine n costituiscono un gruppo commutativo rispetto alla somma; il tensore nullo è quello che ha tutte le componenti nulle).

Moltiplicazione per uno scalare, è un tensore dello stesso ordine di quello di partenza

$$\lambda\ A_{i_1 i_2 \cdots i_n} = B_{i_1 i_2 \cdots i_n}$$

ed è un' operazione invariante che gode delle stesse proprietà del prodotto di uno scalare per un vettore.

Moltiplicazione esterna tra un tensore di ordine m ed un tensore di ordine n è il tensore di ordine m+n che si ottiene eseguendo tutti i possibili prodotti tra le componenti:

$$A_{i_1 i_2 \cdots i_m} + B_{j_1 j_2 \cdots j_n} = C_{i_1 i_2 \cdots i_m j_1 j_2 \cdots j_n} = C_{h_1 h_2 \cdots m+n}$$

Contrazione tra una coppia di indici è l'operazione che consiste nell'assegnare lo stesso nome ad i due indici e sommare quindi rispetto all'indice muto che così si ottiene. E' un'operazione invariante in quanto equivale alla moltiplicazione esterna per il **tensore del secondo ordine di Kronecker**

$$A_{i_1 i_2 \ldots h \ldots k \ldots i_n} \delta_{hk} = B_{j_1 j_2 \ldots j_{n-2}}$$

ed il risultato è un tensore di ordine n-2.

Moltiplicazione interna tra tensori è il risultato di una moltiplicazione esterna seguita da una o più contrazioni (etrambe le operazioni sono invarianti). Ad esempio il prodotto scalare tra due vettori

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \, b_j \, \delta_{ij} = a_i \, b_i = c$$

è un tensore di ordine 1+1-2=0, cioè uno scalare.

Tensore del terzo ordine di Ricci è il tensore così definito: $\varepsilon_{ijk}=1$ se ijk è una permutazione pari (ovvero una permutazione ciclica) della permutazione fondamentale 123, $\varepsilon_{ijk}=-1$ se è una permutazione dispari ed $\varepsilon_{ijk}=0$ in tutti gli altri casi (cioè nei casi in cui vi è un indice ripetuto). Per l'esattezza ε_{ijk} è uno pseudotensore cartesiano in quanto per esso sono lecite soltanto quelle trasformazioni cartesiane che mutano una terna destrogira in un'altra destrogira, il determinante della trasformazione deve valere +1, se vale -1 il tensore di Ricci si inverte.

Il **prodotto vettoriale tra due vettori**, può essere espresso in termini tensoriali come:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad ; \quad c_i = \varepsilon_{ijk} \, a_j \, b_k$$

Il **prodotto scalare tra un vettore ed un tensore del secondo ordine** è il prodotto esterno seguito da una contrazione tra l'indice del vettore ed il secondo indice del tensore (equivale al prodotto righe per colonne tra vettori riga e matrici 3x3) e dà luogo ad un tensore 1+2-2=1, cioè ad un vettore:

$$\vec{a} \cdot \underline{\underline{B}} = \vec{c} \quad ; \quad a_i \, b_{jh} \, \delta_{ih} = a_i \, b_{ji} = c_j$$

Sotto questo profilo i tensori del secondo ordine possono essere visti come **operatori lineari** che mutano una classe di vettori in un'altra classe di vettori. Nelle applicazioni è questa la proprietà più interessante dei tensori del secondo ordine che spesso viene assunta come loro definizione.

Scomposizione di un tensore del secondo ordine in un tensore simmetrico ed uno emisimmetrico. Basta porre:

$$a_{ij} = \tfrac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \tfrac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

come nell'algebra delle matrici:

$$\underline{\underline{A}} = \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T) + \tfrac{1}{2}(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}^T)$$

il tensore del secondo ordine, dipendente da $3^2=9$ componenti è stato scomposto in un primo addendo simmetrico, dipendente da 6 parametri, e in un secondo, emisimmetrico, dipendente da 3 parametri (6+3=9).

Autovalori ed autovettori di un tensore simmetrico del secondo ordine.

Dato il tensore a_{ij}, ad ogni direzione dello spazio definita dal versore n_j corrisponde il vettore $v_i=n_j a_{ij}$ che in genere non sarà parallelo al vettore di partenza n_j. Si dice che la direzione individuata dal versore n_j è una **direzione principale** del tensore a_{ij} se essa viene trasformata in una direzione parallela:

$$v_i = n_j\, a_{ij} = \lambda\, n_i \quad ; \quad n_j (a_{ij} - \lambda\, \delta_{ij}) = 0$$

che ammette soluzioni non banali se:

$$| a_{ij} - \lambda\, \delta_{ij} | = 0$$

Che sviluppata dà l'**equazione caratteristica** del tensore

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0$$

dove I_1, I_2, I_3 sono gli **invarianti lineare, quadratico** e **cubico** del tensore a_{ij}:

$$I_1 = traccia(a_{ij}) = a_{ii}$$
$$I_2 = \tfrac{1}{2}(a_{ii}\, a_{jj} - a_{ij}\, a_{ji})$$
$$I_3 = \det(a_{ij}) = | a_{ij} |$$

Se il tensore di partenza è **simmetrico** l'equazione caratteristica ammette 3 soluzioni reali dette **autovalori** o **valori principali** del tensore. In corrispondenza di ogni autovalore vi è un **autovettore** o **vettore principale n** che definisce una **direzione principale** del tensore in questione. Nel caso che i 3 autovalori siano distinti si dimostra che le 3 direzioni principali sono mutuamente ortogonali; assumendo le 3 direzioni principali come riferimento cartesiano il tensore assume la forma:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Nel caso $\lambda_2 = \lambda_3$ tutte le direzioni del piano normale ad $\mathbf{n}_1$ sono principali; nel caso che tutti e 3 gli autovalori siano coincidenti tutte le direzioni dello spazio sono principali ed il tensore è **isotropo**; in qualunque riferimento si ha:

$$\underline{\underline{A}} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad a_{ij} = \lambda\, \delta_{ij}$$

Tensori isotropi sono quelli le cui componenti restano invarianti ad ogni cambiamento di riferimento. Gli scalari, cioè i tensori di ordine 0, sono tutti isotropi. Non vi sono vettori isotropi, ad eccezione del vettore nullo. I tensori isotropi del secondo ordine sono tutti e solo i multipli del δ di Kronecker. I tensori isotropi del terzo ordine sono tutti e soli i multipli del tensore di Ricci. I tensori isotropi del quarto ordine sono dati da tutte le possibili combinazioni lineari dei prodotti esterni di δ.

Campi tensoriali sono quelli in cui in ogni punto $x_i \varepsilon W$ volume di R_3 ed in ogni istante $t \varepsilon T$ intervallo dell'asse dei tempi R è definita la quantità tensoriale $A(x_i,t)$ invariante rispetto a cambiamenti di riferimento sia spaziale che temporale. Il campo tensoriale si dice stazionario se non dipende esplicitamente dal tempo, ed uniforme se non dipende esplicitamente dal punto.

Derivata di un tensore di ordine n rispetto alle coordinate è il tensore di ordine n+1:

$$\frac{\partial A_{i_1 i_2 \dots i_n}}{\partial x_j} = A_{i_1 i_2 \dots i_n, j}$$

e valgono le usuali proprietà delle derivate. Si possono generalizzare alcuni degli operatori già visti, ad esempio il gradiente di un vettore v_i è il tensore del secondo ordine $v_{i,,j}$, mentre la divergenza del tensore del secondo ordine a_{ij} è il tensore del primo ordine, cioè il vettore $a_{ij,h}\delta_{jh}=a_{ij,j}$.

Si possono altresì generalizzare i teoremi già visti sui campi vettoriali, si ha ad esempio, con i soliti simboli, il teorema di Gauss:

$$\iiint_W A_{i_1 i_2 \dots i_n, j}\, dW = \iint_S A_{i_1 i_2 \dots i_n}\, n_j\, dS$$

Nel caso ad esempio di tensori del secondo ordine:

$$\iiint_W \nabla \cdot \underline{\underline{A}}\, dW = \iint_S \vec{n} \cdot \underline{\underline{A}}\, dS$$