Compito A

1) Scomponendo il moto sui due assi si ha un moto uniforme sull'asse X con velocità pari a v_0 ed un moto uniformemente accelerato sull'asse Y:
   $X=v_0t$
   $Y=Y_0-1/2gt^2$
   Dalla seconda relazione si ricava che $t=(2Y_0/g)^{1/2}=2.67$ s
   Imponendo che la posizione d'impatto X_F con l'acqua avvenga ad una distanza maggiore di 5m per evitare l'impatto con gli scogli si ha:
   $v_0 = X_F/t = 1.87$ m/s quindi v_0 deve essere maggiore di 1.87 m/s.

2) Per il calcolo della velocità di fuga si usano considerazioni energetiche. Nello stato iniziale appena partita l'astronave possiede la seguente energia meccanica:
   E_i= Energia cinetica + energia potenziale Gravitazionale = $1/2m_AV_F^2 -Gm_AM_{Marte}/R_{Marte}$
   Con V_F velocità di fuga e $-Gm_AM_{Marte}/R_{Marte}$ l'energia potenziale di un corpo posto nel campo gravitazionale di Marte alla distanza R_{Marte}. Nelle condizioni finali l'astronave avrà velocità nulla (minima) ed energia potenziale nulla visto che è sfuggita al campo gravitazionale (d=infinita). Quindi eguagliando le due energie meccaniche si ha:
   $1/2m_AV_F^2 -Gm_AM_{Marte}/R_{Marte} = 0$ da cui $V_F=(2GM_{Marte}/RMarte)^{1/2}= 4977$ m/s

3) La quantità di moto totale del sistema è pari a $p_{tot}= 2m(v) – m(2v) = 0$ da cui la velocità del centro di massa $v_c = p_{tot}/M_{tot} =0$. Il momento angolare totale è definito come:
   J = 2m va + m 2v 2a = 6mva = 0.36 kg m/s.
   Per studiare l'urto possiamo applicare la conservazione del momento angolare rispetto al centro di massa dell'asta. Avremo quindi che il momento angolare iniziale J è pari ad Iω (con ω pari alla velocità angolare del sistema dopo l'urto completamente anelastico). Il momento di inerzia totale si calcola come la somma di quello dell'asta (rispetto al suo centro) e quelli delle masse m e 2m:
   $I=1/12\ 8m(6a)^2 + 2ma^2 + m(2a)^2 = 30\ ma^2 = 0.54$ kg m^2.
   Ponendo:
   Iω = 6mva si ottiene ω = v/5a = 0.66 rad/s.
   L'energia cinetica del sistema dopo l'urto è pari a:
   $E_k = 1/2\ I\omega^2 = 3/5\ mv^2 = 0.12$ J
4) Tutte le forze che agiscono sul cubo sono dirette lungo Z possiamo scrivere:
   $- P + F_{H20} + F_{Hg} = 0$.
   Ovvero la forza peso viene bilanciata dalla spinta di Archimede esercitata dall'acqua e dal mercurio.
   Definendo x_2 come la distanza tra la superficie di separazione di H20 e Hg e lo spigolo superiore del cubo ed x_1 la distanza tra la superficie di separazione di H20 e Hg e lo spigolo inferiore del cubo si avrà che le spinte di Archimede e la forza peso sono esprimibili Come:
   $\rho_{H20}\ L^2X_2\ g + \rho_{Hg}\ L^2X_1g - \rho_{Al}\ L^3g = 0$.
   Dove $X_1 + X_2 = L$.
   Si ricava dunque che $\rho_{H2}X_2 + \rho_{Hg}X_1 = \rho_{Al}\ L$. Si ottiene quindi $X_2 = L\ (\rho Hg - \rho Al)/(\rho Hg - \rho a)$ e $X_1 = L\ (\rho Al - \rho a)/(\rho Hg - \rho a)$. Si calcola quindi $X_1 = 1.35$ cm e $X_2 = 8.65$ cm.
   La distanza tra il baricentro del cubo e la supe rficie di separazione acqua mercurio sarà $d = L/2 - X_1 = 3.65$ cm

5) Trasformazione AB.
Questa trasformazione corrisponde ad un'espansione adiabatica libera, dunque il lavoro è nullo (l'espansione nel vuoto non richiede lavoro) il calore scambiato è nullo (la trasformazione è adiabatica). Dal primo principio $\Delta U=Q-W$ abbiamo:
$\Delta U_{AB} = 0$
quindi la trasformazione AB è anche isoterma, dato che per un gas ideale l'energia interna dipende solo da T: $T_A = T_B = 300K$.
Trasformazione BC.
Dato che la compressione è adiabatica, $Q_{BC} = 0$, quindi dal primo principio:
$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = nc_v(T_B - T_C) = nc_v(T_A - T_C)$
Risolvendo questa relazione rispetto a T_C si ottiene:
$T_C = T_A - W_{BC}/nc_v = 1288.96$ K
Ora, il volume dello stato C può essere ricavato dalla legge dei gas perfetti $p_CV_C = nRT_C$, utilizzando il fatto che $p_A = p_C$ dato che l'ultima trasformazione è isobara:
$V_C = nRT_C/p_A = 0.16\ m^3$

Compito B

1) Scomponendo il moto sui due assi si ha un moto uniforme sull'asse X con velocità pari a v_0 ed un moto uniformemente accelerato sull'asse Y:
   $X_A=v_0t$
   $Y=Y_0-1/2gt^2$
   Dalla prima relazione si ricava che $t=X_A/v_0=1.33$ s
   Imponendo nella posizione d'impatto $Y_F =0$ dalla seconda relazione si ha:
   $0 = Y_0-1/2gt^2 = Y_0-1/2g(X_A/v_0)^2 = 8.7$m

2) Sul pianeta Marte abbiamo l'equilibrio tra la forza peso del marziano e la forza elastica:
   $GmM_M/R_M^2=-kX$
   All'arrivo sulla terra la nuova condizione di equilibrio sara'
   $GmM_T/R_T^2=-kX_1$
   Essendo la massa del marziano la stessa nei due casi risolviamo rispetto m ed eguagliamo:
   $kXR_M^2/(GM_M) = kX_1R_T^2/(GM_T)$ risolvendo rispetto a M_T si ha:

   $M_T= X_1R_T^2M_M/(XR_M^2) = 5.791x10^{24}$ kg
   Indipendente dal valore della costante k della molla.

3) Quando il corpo è totalmente immerso in acqua la tensione sul filo è data dalla differenza tra il peso del corpo e la spinta di Archimede. All'equilibrio si ha:
   $-mg + S_A + T = 0$ da cui $T = \rho_SL^3g-\rho_{H2O}L^3g = \rho_S-\rho_{H2O} =1.5$ T
   Quando il corpo inizia ad emergere la tensione sul filo aumenta per effetto della ridotta spinta di Archimede e si può scrivere per $T=T_{MAX}$:
   $T_{MAX} = \rho_SL^3g-\rho_{H2O}L^2h_{imm}g$ da cui risolvendo rispetto ad h_{imm} si ha:
   $h_{imm} = (\rho_SL-T_{MAX})/\rho_{H2O} = 0.4$ m
   quando la parte immersa è inferiore a 0.4 m la fune si rompe. Il volume emerso massimo è pertanto pari a:
   $V_{eme}=L^2(L-h_{imm}) = 0.6m^3$

4) Dovendosi conservare il momento angolare (non essendoci forze esterne) si avrà:
$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$ con $I_1 = 1/2MR^2$ ed $I_2 = (1/2MR^2+mR^2+mR^2)$.
La velocità angolare del sistema finale si calcola come:
$\omega_2 = \omega_1 I_1/I_2 = \omega_1 MR^2/2(1/2MR^2 + 2mR^2) = \omega_1 M/(M+4m)$ e quindi ω_2 =4.67 rad/s.
Per calcolare la variazione percentuale di energia cinetica dovremo
calcolare $1/2\omega_2^2 I_2 / 1/2\ \omega_1^2\ I_1$ e quindi $\omega_2^2 I_2/\omega_1^2\ I_1$. Utilizzando $\omega_2 = \omega_1 I_1/I_2$ si ottiene:
$(M / (M + 4m))^2$ x $(M+4m)/M$ ottenendo per il rapporto tra le energie cinetiche il valore
$M / (M + 4m)$ = 93.5%. L'aggiunta delle due masse fa diminuire l'energia cinetica totale del sistema.

5) La trasformazione AB è isoterma quindi $\Delta U=0$ per il primo principio Q=W il calore è assorbito per permettere al gas di espandersi quindi positivo quindi:

$$L_{AB} = nRT_A \ln(V_B/V_A)$$

Essendo l'ultima trasformazione isocora il volume $V_A=V_C$ mentre V_B può essere calcolato usando la legge di Boyle:
$P_AV_A=P_BV_B$ da cui $V_B=P_AV_A/P_B$
quindi si ha:
$L_{AB}=Q_{AB}$=17288.5 J.

La trasformazione BC è isobara ed è una contrazione $V_B>V_C$ quindi il lavoro fatto dal sistema è in questo caso negativo e vale $L_{BC}=P\Delta V$ = -12500 J.
Il calore scambiato vale:
$Q_{BC} = nC_P(T_C-T_B)$ per cui dobbiamo ricavare T_C dalla I legge di Gay-Lussac:
$V_B/T_B=V_C/T_C$ da cui $T_C=T_BV_C/V_B$ = 150K da cui si ricava che:
Q_{BC} = -31185J.

Compressione isocora CA. Il gas ora viene compresso a V costante, riportandolo al valore
iniziale di P quindi $L_{CA}=P\Delta V=0$.
La compressione avviene riscaldando il gas, quindi, fornendogli una certa quantità (positiva) di calore Q_{CA}. Se il gas recupera i valori iniziali di volume e pressione, deve recuperare anche il valore della temperatura, per cui T_A = 300 K e ΔT_{CA} = 150.
Calcoliamo il calore, ricordando la relazione di Mayer secondo cui $c_P-c_V = R$
$c_V = c_P - R$ = 12.48 J/mK
$Q_{CA} = n\ c_V\ \Delta T$ = 18720 J
In tal caso, il riscaldamento isocoro ha prodotto solamente un'innalzamento dell'energia interna pari al calore fornito.
Infine, il lavoro totale prodotto dal ciclo sarà:
$L_{TOT} = L_{AB} + L_{BC} + L_{CA}$ = 17288.5-12500 + 0 = 4788.5 J