

---

# Gestione della soglia di Rivelazione

# Probabilità di falso allarme – soglia fissa

**Sotto l'ipotesi  $H_0$**  ( $a=0$ ) ho un Falso Allarme se

$$z = |\tilde{z}| = |d_f(t)| > T$$

Poiché  $d_f(t)$  è Gaussiana a valor medio nullo e varianza  $\sigma_d^2$  ( $\sigma_d^2 = \sigma_n^2$  se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p_z(z | H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{z > T | H_0\} = \int_T^{\infty} p_z(z | H_0) dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

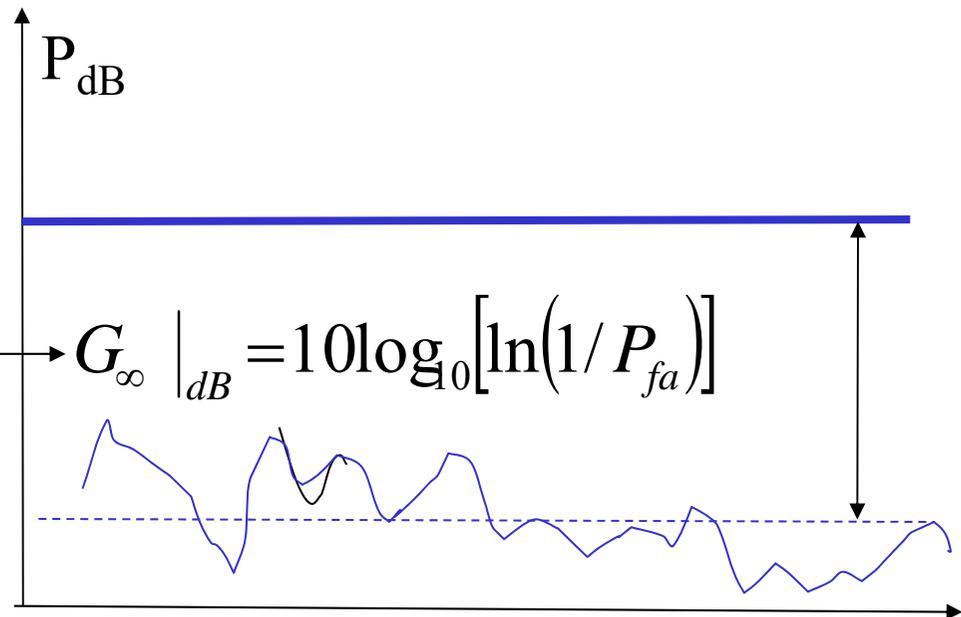
# Scelta della soglia fissa

$$P_{fa} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{T^2}{\sigma_d^2} = -\ln P_{fa}$$

$$T = \sigma_d \cdot \sqrt{-\ln P_{fa}}$$

$$T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa})$$

$$\sigma_d^2 \Big|_{dB}$$



Livello di potenza noto

Sistemi Radar

# Scelta della soglia – stima del disturbo

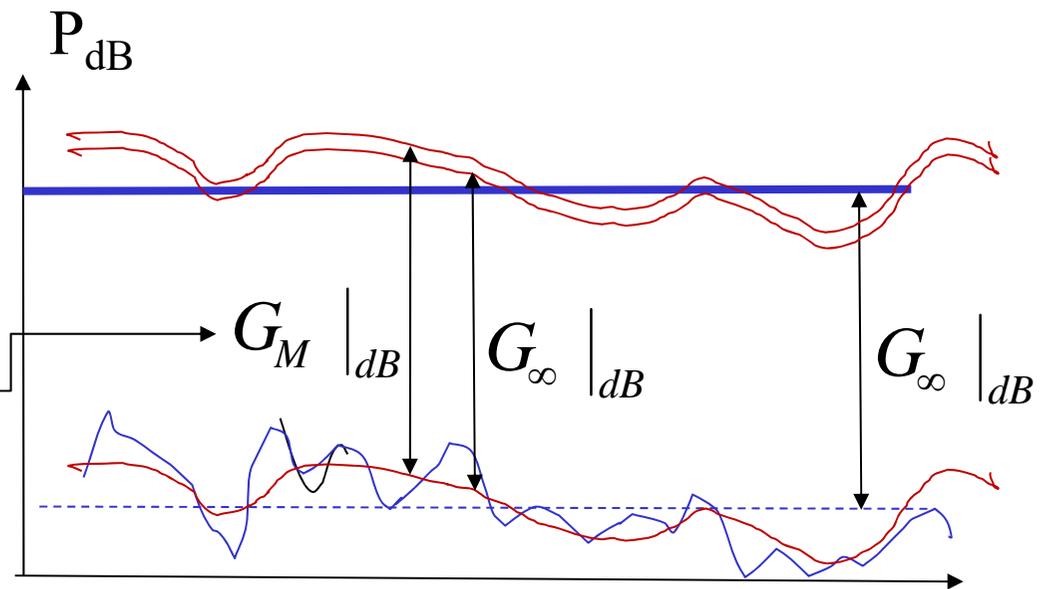
$$T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa}) \rightarrow G_\infty |_{dB}$$

$$\sigma_d^2 |_{dB}$$

Livello di potenza noto

$$T^2 = \hat{\sigma}_d^2 \cdot G_M$$
$$\hat{\sigma}_d^2 |_{dB}$$

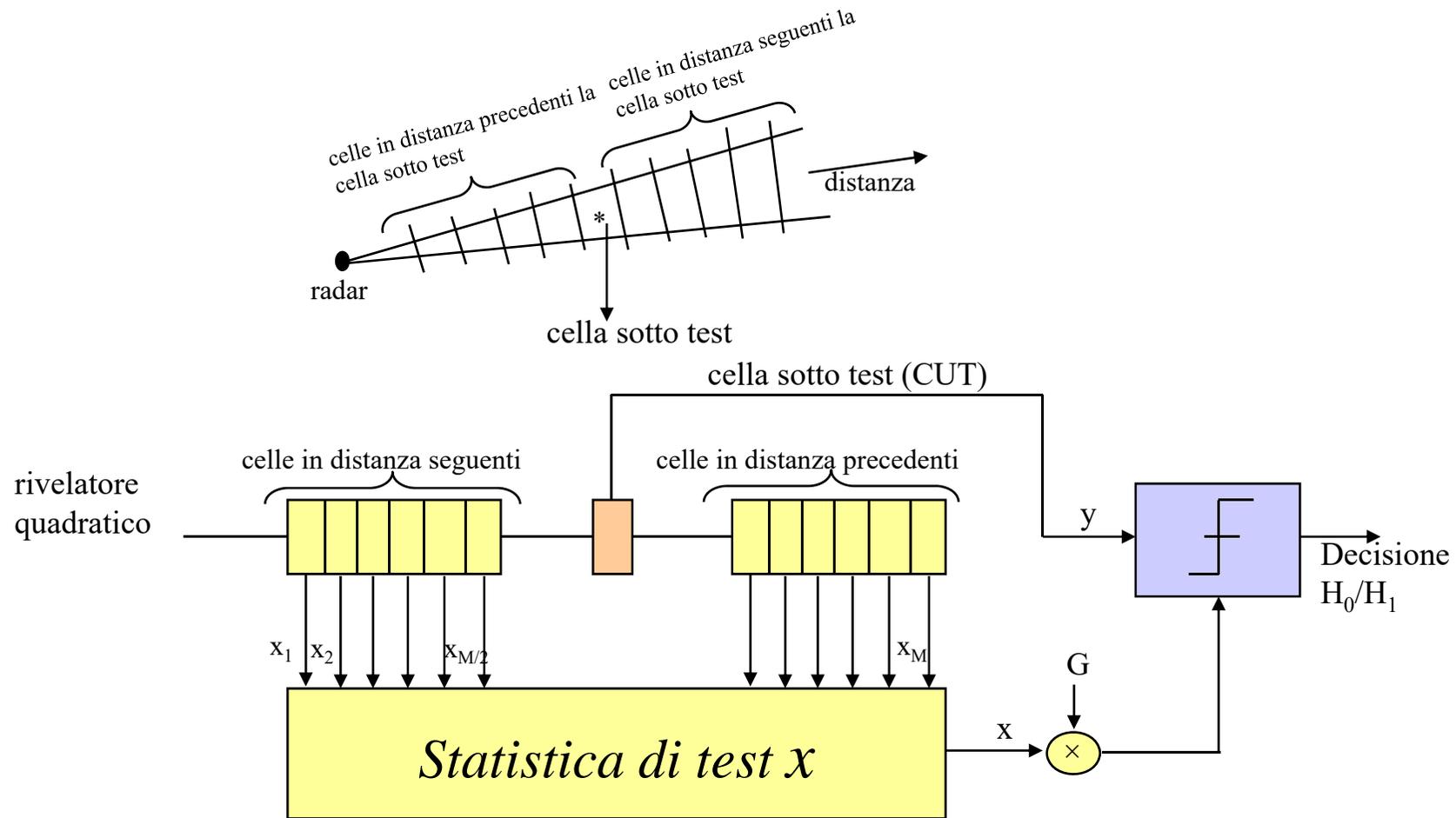
Livello di potenza stimato



# Incremento di $P_{fa}$ per stima disturbo

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 + \Delta)}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 - \Delta)}{\sigma_d^2}} = \frac{1}{2} e^{-G - \frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-G + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} = \\ &= e^{-G} \frac{1}{2} \left[ e^{-\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + e^{\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} \right] = e^{-G} \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 + 1 + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right] = \\ &= e^{-G} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

# Autogate (I)



$G =$  Guadagno che determina la  $P_{fa}$

# Autogate (II)

---

**Probabilità di falso allarme:** 
$$P_{fa} = \int_0^{\infty} \left[ \int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y / H_0) dy \right] p_x(x) dx$$

DDP della cella sotto test

DDP della statistica di test

**Probabilità di rivelazione:**

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[ \int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y / H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

# CA-CFAR (I)

## Statistica di test

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i = \frac{1}{M} x'$$

- Ipotesi: disturbo gaussiano

$$p_y(y/H_0) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i}{\sigma^2}} \quad x_i \geq 0, i = 1 \dots M \quad \Rightarrow$$

M variabili aleatorie  
indipendenti identicamente  
distribuite

Per l'ipotesi di indipendenza statistica:  
densità di probabilità = convoluzione delle singole  
densità

$$\Rightarrow p_{x'}(x') = p_{x_1}(x') * p_{x_2}(x') \dots * p_{x_M}(x')$$

Funzione caratteristica:

$$C_{x'}(u) = C_{x_1}(u) \cdot C_{x_2}(u) \cdot \dots \cdot C_{x_M}(u) = [C_{x_i}(u)]^M = \left[ \frac{1/\sigma^2}{1/\sigma^2 - ju} \right]^M$$

antitrasformando

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{x'}(x') = \frac{1}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{x'}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}} \quad x' \geq 0 \\ x = \frac{x'}{M} \Rightarrow p_x(x) = M p_{x'}(Mx) \end{array} \right.$$

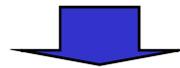
## Sistemi Radar

# CA-CFAR (II)

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \int_0^\infty \left[ \int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left( \frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}} dx = \\
 &= \int_0^\infty \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left( \frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M+G)} dx = \left( \frac{M}{M+G} \right)^M \int_0^\infty \frac{1}{(M-1)! \sigma^2} \left( \frac{z}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{z}{\sigma^2}} dz = \boxed{\left( 1 + \frac{G}{M} \right)^{-M}}
 \end{aligned}$$

$z=x(M+G)$

Integrale di una densità di probabilità



Fissato il tasso di falsi allarmi desiderato e fissato il valore di M resta fissato il valore da dare al guadagno G.



*From: D. Pastina, F. Colone  
Telerilevamento*

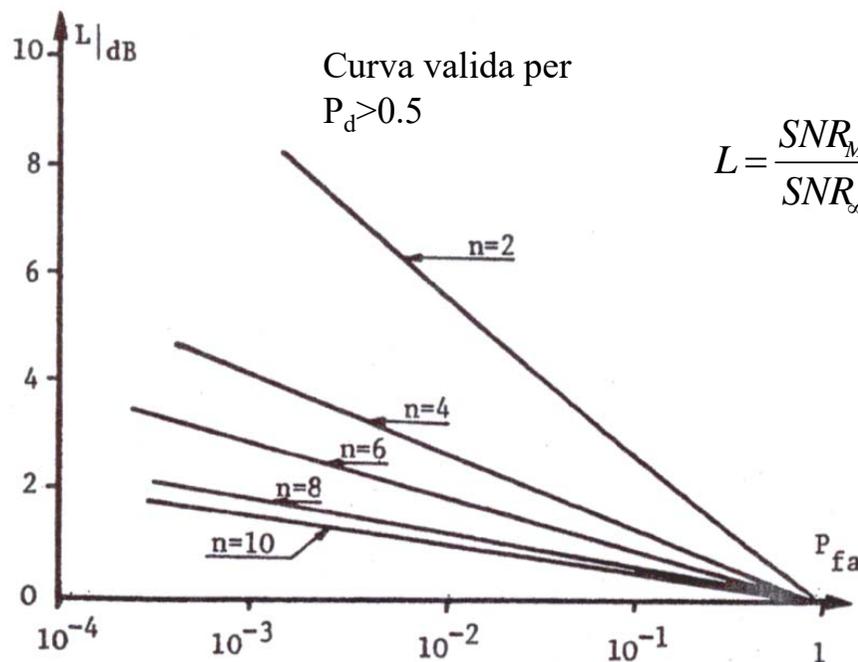
Probabilità di falso allarme dipende solo da G e da M ed è indipendente dal livello del disturbo  $\Rightarrow$  **CFAR: Constant False Alarm Rate** indipendente da variazioni spaziali o temporali del livello del disturbo (la soglia si adatta a variazioni spaziali e/o temporali di  $\sigma^2$ ).

# CA-CFAR (III)

- Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[ \int_{G_x}^{\infty} p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

- soglia fluttuante → perdite in sensibilità (tutto va come se ci fosse una soglia fissa più un rumore additivo dovuto alla fluttuazione della stima)



Perdite in sensibilità: rapporto tra SNR richiesto in presenza di soglia stimata adattivamente da M campioni ( $SNR_M$ ) e SNR richiesto in presenza di soglia fissa ( $SNR_{\infty}$ ).

Fissato il livello di falso allarme le perdite sono tanto minori quanto maggiore è M ( $M=\infty$  equivale a disturbo noto).



# CA-CFAR (IV)

- Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[ \int_{Gx}^{\infty} p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

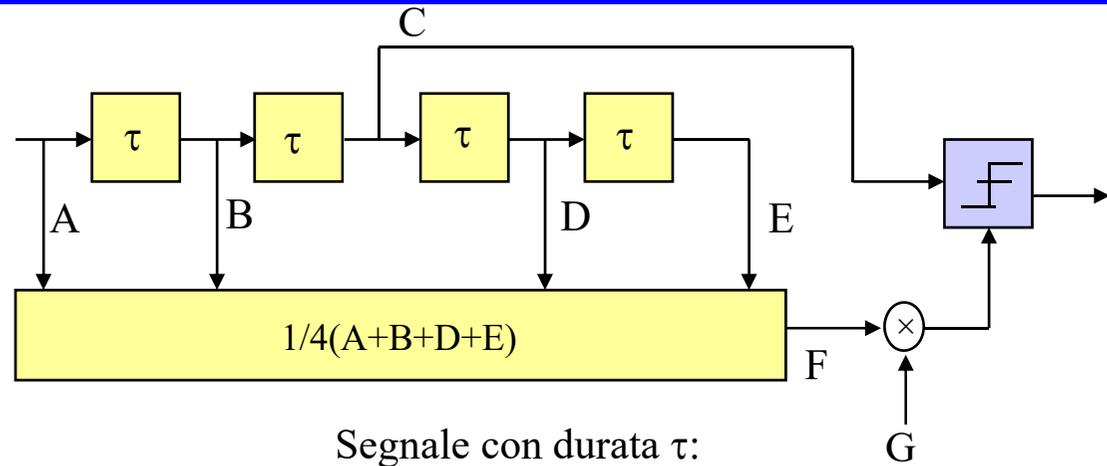
Bersaglio Swerling I - II

$$\begin{aligned}
 P_d &= \int_0^{\infty} \left[ \int_{Gx}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2 + \sigma_T^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} p_x(x) dx = \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} \frac{M}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{M}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{Mx}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2} \left( M + \frac{G}{1 + \sigma_T^2/\sigma^2} \right)} dx = \\
 &= \left( \frac{M}{M + G/(1 + SNR)} \right)^M \int_0^{\infty} \frac{1}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{z}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{z}{\sigma^2}} dz = \left( 1 + \frac{G}{M(1 + SNR)} \right)^{-M}
 \end{aligned}$$

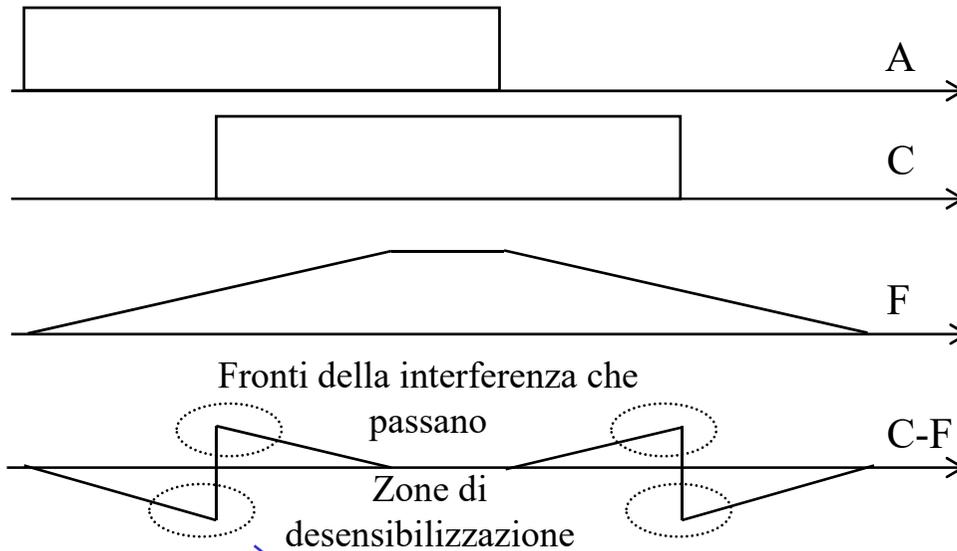
# CA-CFAR (V)

Problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento

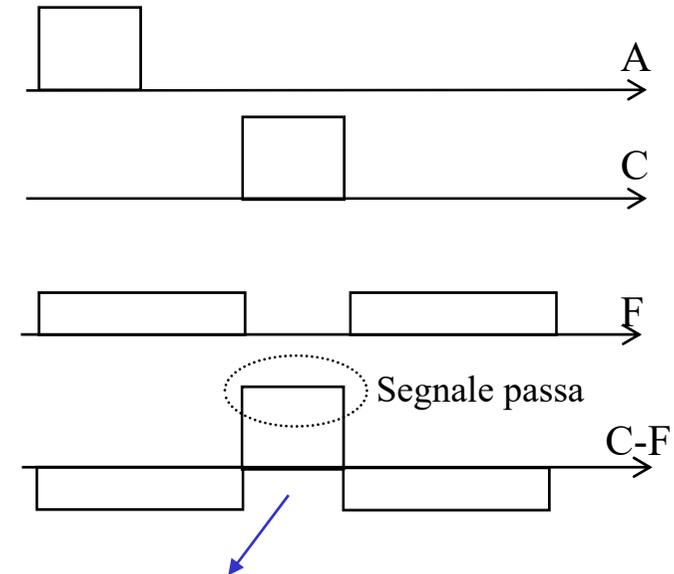
From: D. Pastina, F. Colone  
Telerilevamento



Interferenza con durata  $5\tau$ :



Segnale con durata  $\tau$ :

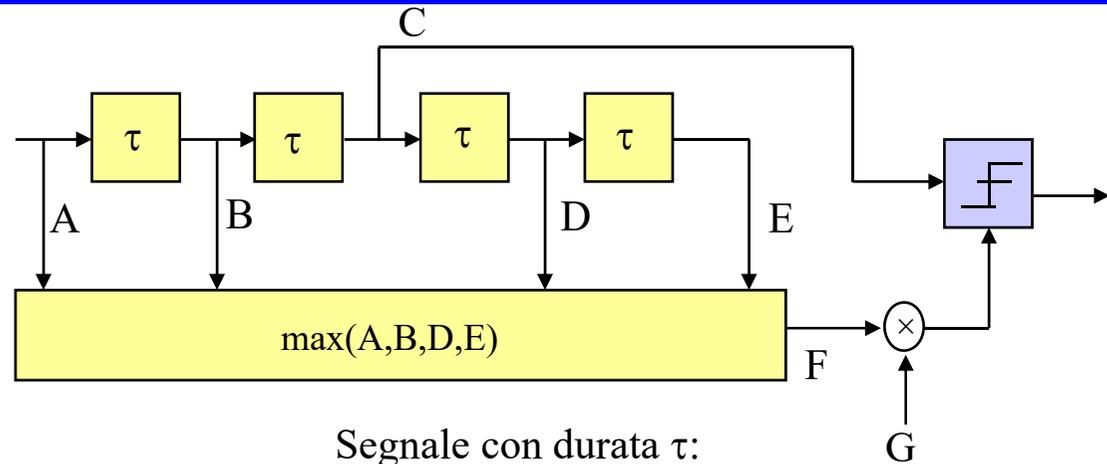


Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

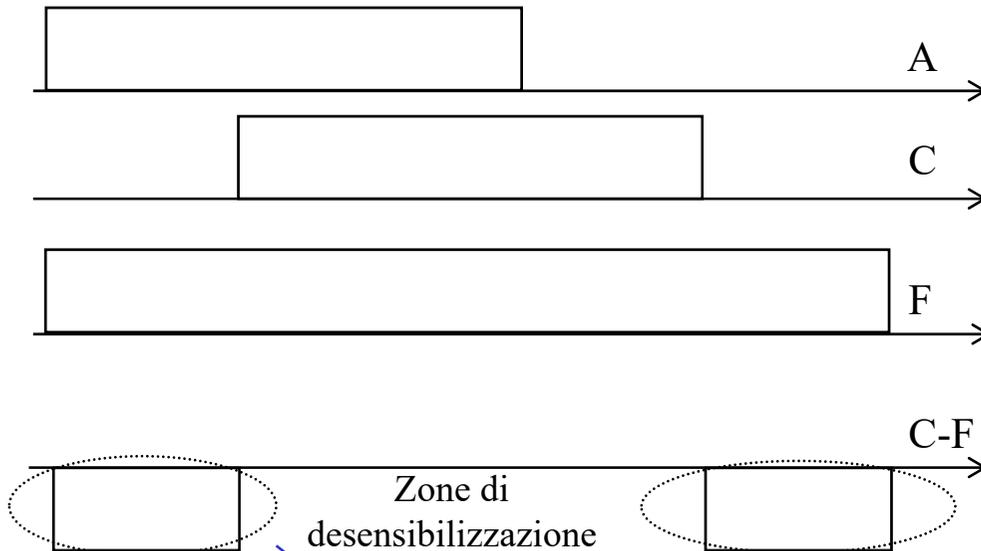
Sistemi Radar

# GO-CFAR

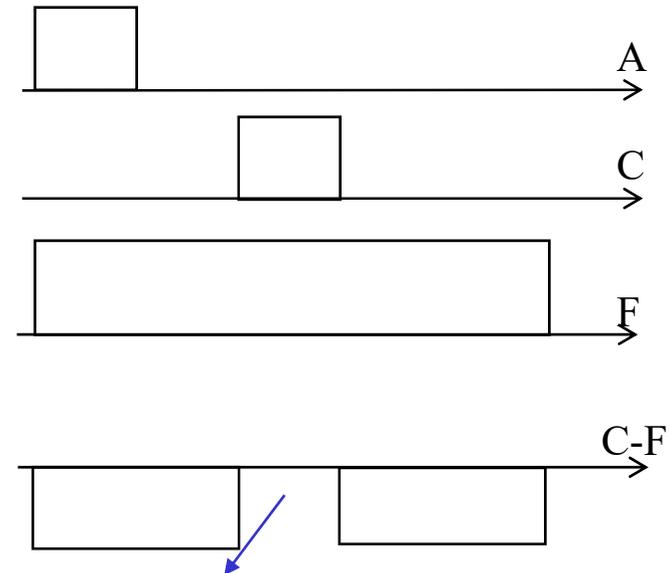
Greatest Of (GO) affronta il problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento



Interferenza con durata  $5\tau$ :



Segnale con durata  $\tau$ :

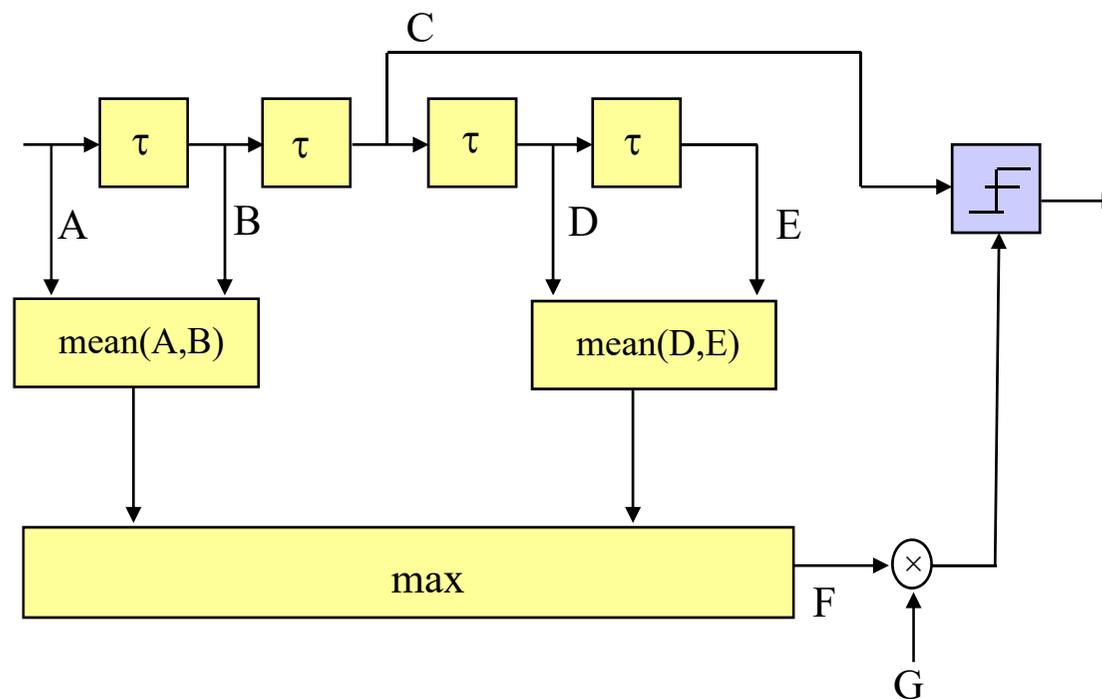


Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

**Sistemi Radar**

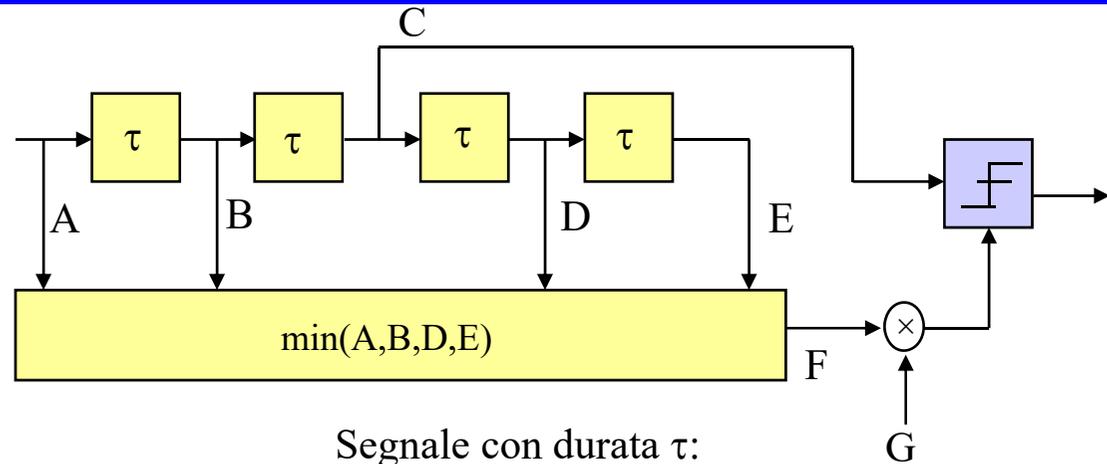
# CAGO-CFAR

Compromesso fra CA e GO

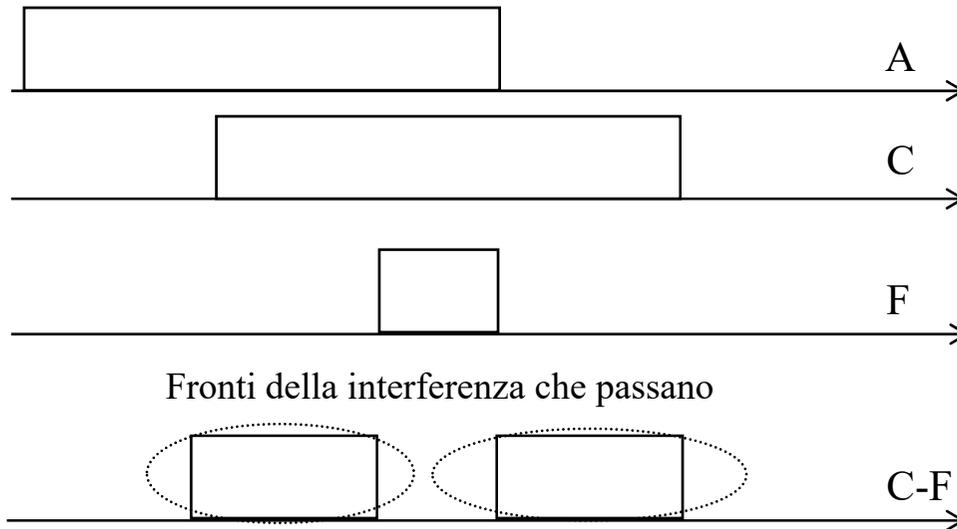


# SO-CFAR

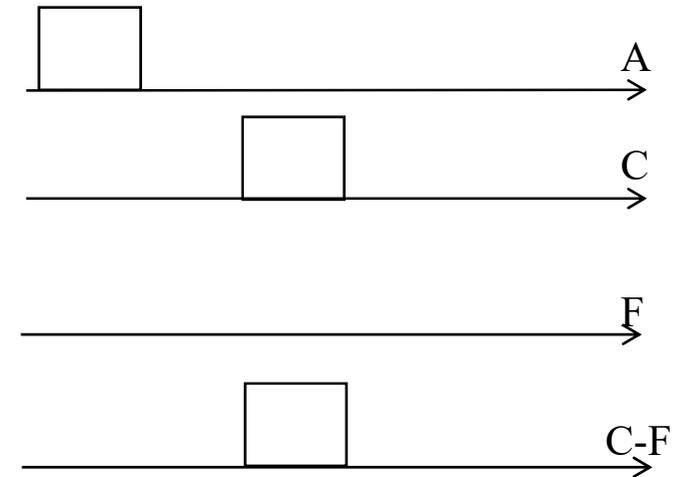
Smallest Of (SO) affronta il problema dei bersagli multipli



Interferenza con durata  $5\tau$ :

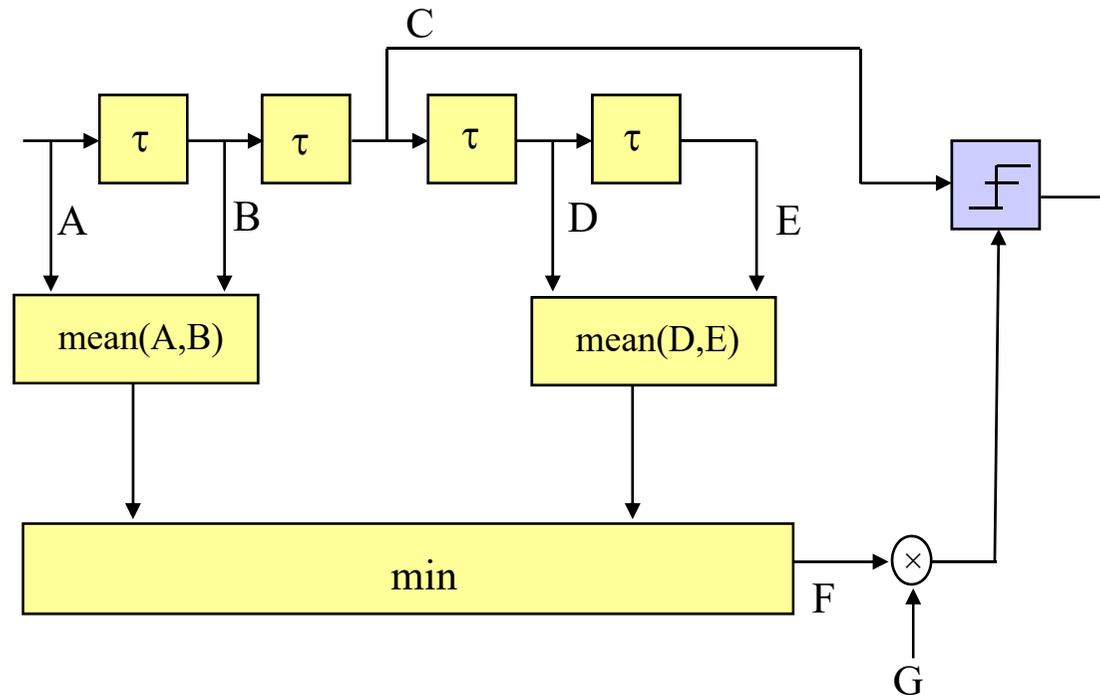


Segnale con durata  $\tau$ :



# CASO-CFAR

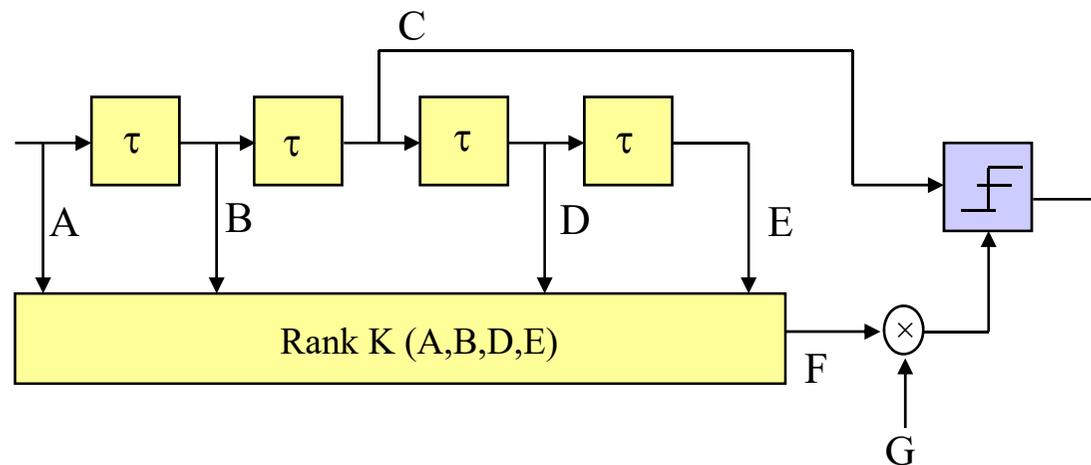
Compromesso fra CA e SO



# OS-CFAR

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

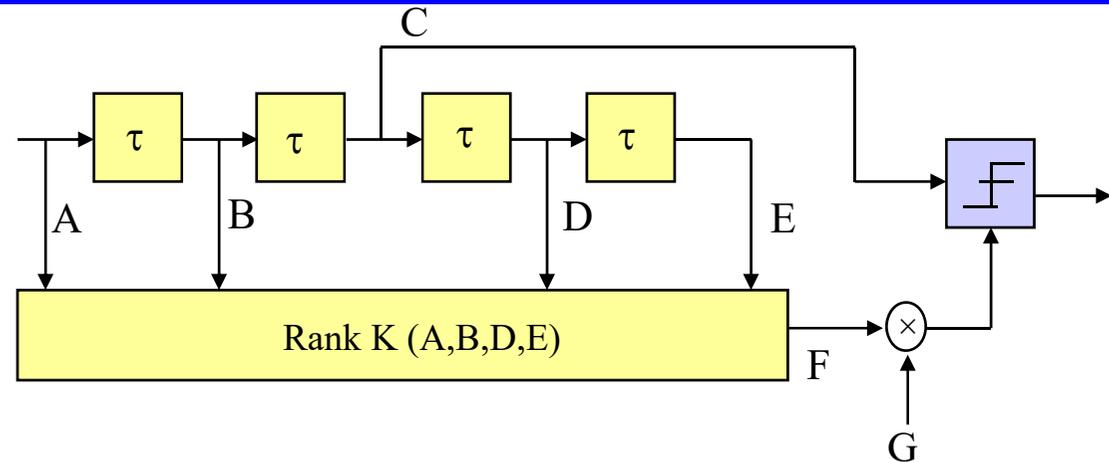
$K=M \rightarrow GO$

$K=1 \rightarrow SO$

# OS-CFAR (I)

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e di utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

$K=M \rightarrow GO$

$K=1 \rightarrow SO$

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} [P(x)]^{K-1} [1-P(x)]^{M-K} p(x)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}} \quad P(x) = \int_0^x p(x') dx' = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma}(M-K)} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

# OS-CFAR (II)

---

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_0^{\infty} \left[ \int_{Gx}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+G)} dy = \\ &= K \binom{M}{K} \frac{(M-K+G)!(K-1)!}{(M+G)!} = \frac{(M-K+G)! M!}{(M+G)!(M-K)!} \end{aligned}$$

# OS-CFAR (III)

---

## Swerling I-II

$$\begin{aligned}
 P_d &= \int_0^\infty \left[ \int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2 + \sigma_T^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} K \binom{M}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx = \\
 &= \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} K \binom{M}{K} \left[ 1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+\frac{G}{1+SNR})} dy = \\
 &= K \binom{M}{K} \frac{\left( M - K + \frac{G}{1+SNR} \right)! (K-1)!}{\left( M + \frac{G}{1+SNR} \right)!} = \frac{\left( M - K + \frac{G}{1+SNR} \right)! M!}{\left( M + \frac{G}{1+SNR} \right)! (M-K)!}
 \end{aligned}$$

# LOG-FTC

---

- Il canale logaritmico può essere usato come dispositivo normalizzatore di potenza (funzione simile ad un autogate)
- Il logaritmo trasforma fattore di scala moltiplicativo (livello di potenza) in fattore additivo, cioè alterazione del valore medio
- Se si rimuove (sottrae o elimina) il valore medio si ottiene intrinsecamente una caratteristica CFAR rispetto alla potenza media
- Ad esempio circuito derivatore: Fast Time Constant **FTC**:
  - la derivata elimina il valor medio e risulta CFAR
  - semplice realizzazione con circuito RC derivatore in sistemi a bassissimo costo

# Clutter Map CFAR (I)

---

- **Autogate:**
  - Opera in range assumendo omogeneità
  - richiede poca memoria
- **Clutter map:** usa gli stessi schemi per la stima del livello di clutter, ma usando campioni della stessa cella in scan successivi:
  - Non richiede omogeneità in range
  - richiede una occupazione di memoria molto maggiore
  - richiede stazionarietà dello scenario osservato (radar fissi o con moto compensabile)
  - tipicamente la soluzione CA è adeguata poichè non ci sono transitori da gestire.
- Per ridurre la memoria la “media mobile” del CA può essere sostituita con una media di altro tipo che non richieda di memorizzare tutti gli M scan usati:  
“exponential smoothing”

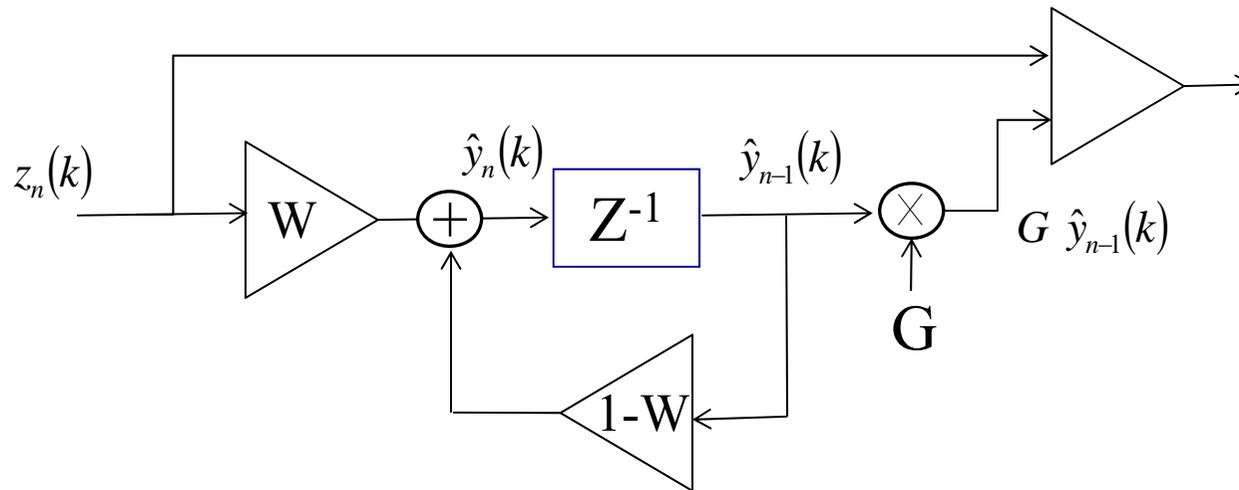
$$\hat{y}_n(k) = (1-W) \hat{y}_{n-1}(k) + W z_n(k)$$

# Clutter Map CFAR (II)

-Per ridurre la memoria la “media mobile” del CA può essere sostituita con una media di altro tipo che non richieda di memorizzare tutti gli M scan usati:  
“exponential smoothing”

$$\hat{y}_n(k) = (1-W) \hat{y}_{n-1}(k) + W z_n(k)$$

$W=0$  assenza di CFAR  
 $W \rightarrow 1$  media molto lunga



$$\hat{y}_n = W \sum_{j=0}^{\infty} (1-W)^j z_{n-j}$$

# Clutter Map CFAR (III)

---

-Prestazioni per M alto

$$P_{fa} = \frac{1}{\prod_{m=0}^M [1 + GW(1-W)^m]} \quad M \rightarrow \infty$$

-Si ha migliore convergenza riscrivendo le formule di sopra come:

$$P_{fa} = \frac{1}{1 + \sum_{m=0}^M \prod_{k=0}^m \frac{GW(1-W)^k}{1 + (1-W)^{k+1}}} \quad M \rightarrow \infty$$

# Clutter Map CFAR - Detection (III)

---

-Prestazioni per M alto

$$P_d = \frac{1}{\prod_{m=0}^M \left[ 1 + \frac{G}{1+SNR} W(1-W)^m \right]} \quad M \rightarrow \infty$$

-Si ha migliore convergenza riscrivendo le formule di sopra come:

$$P_d = \frac{1}{1 + \sum_{m=0}^M \prod_{k=0}^m \frac{G}{1+SNR} \frac{W(1-W)^k}{1+(1-W)^{k+1}}} \quad M \rightarrow \infty$$

# Clutter Map CFAR (III)

