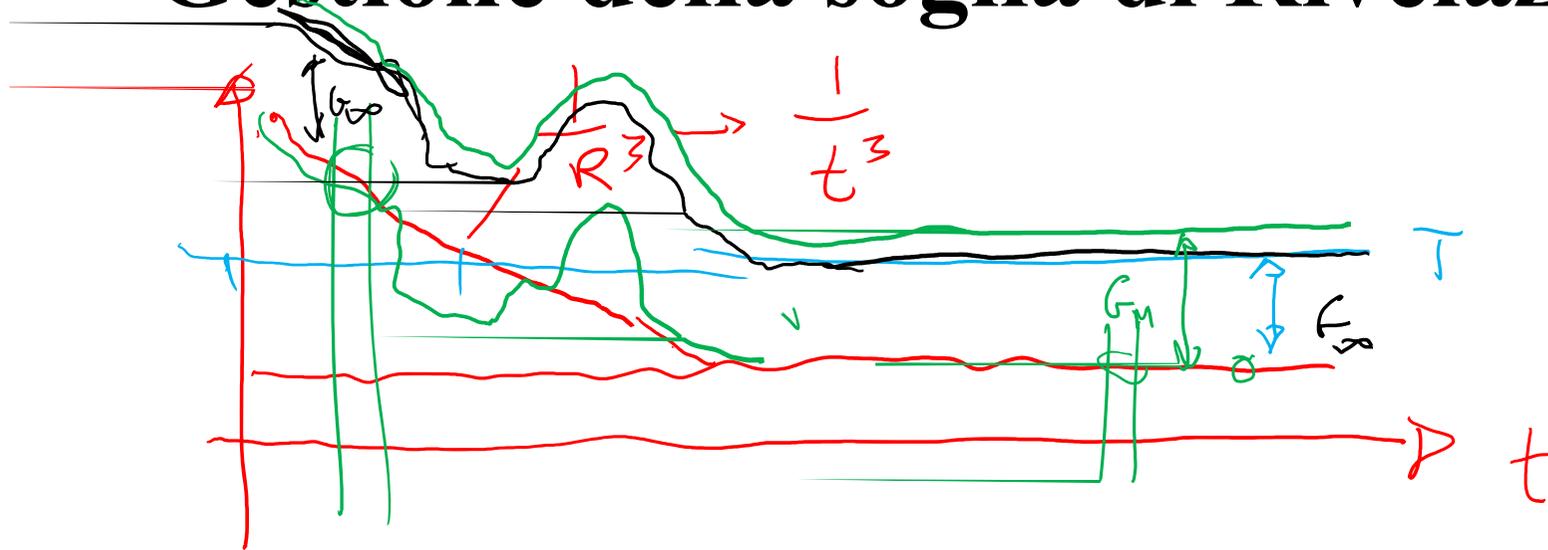

$$SCR = \frac{\sigma_t}{\sigma_0 \cdot A_c} \leftarrow$$

Gestione della soglia di Rivelazione



Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 ($a=0$) ho un Falso Allarme se

$$z = |\tilde{z}| = \underbrace{|d_f(t)|}_{> T} > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2\right\} \longrightarrow p_z(z | H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{z > T | H_0\} = \int_T^\infty p_z(z | H_0) dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

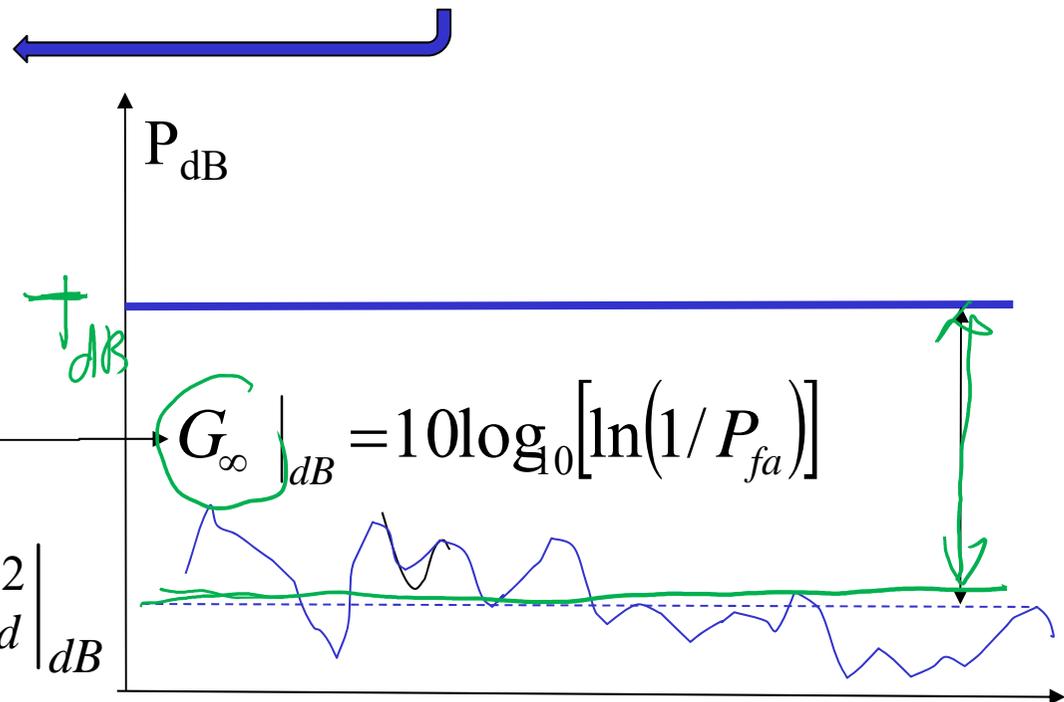
Scelta della soglia fissa

$$P_{fa} = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}} \quad \longrightarrow \quad \frac{T^2}{\sigma_d^2} = -\ln P_{fa}$$

$$T = \sigma_d \cdot \sqrt{-\ln P_{fa}}$$

$$T^2 = \sigma_d^2 \cdot \ln(1/P_{fa})$$

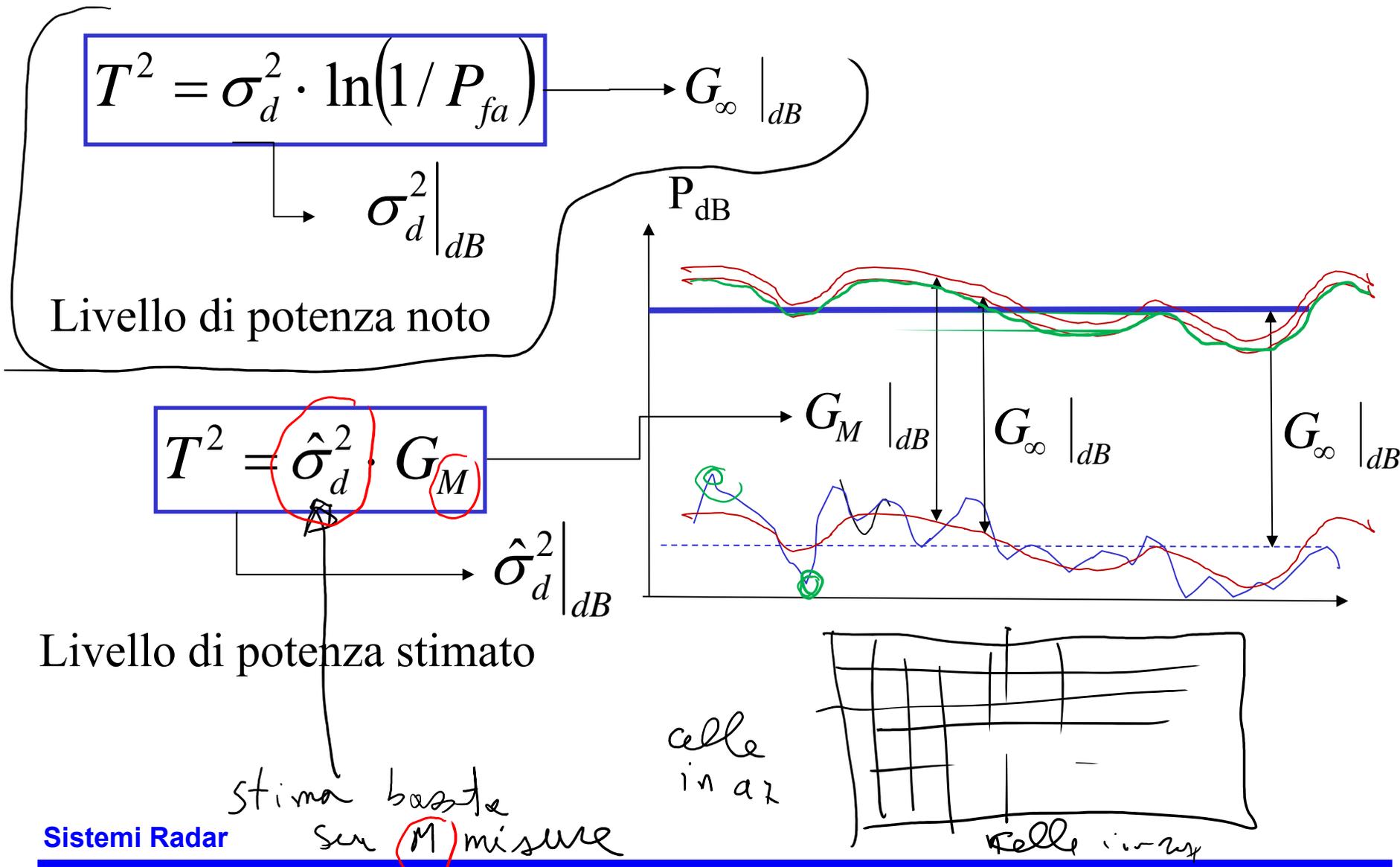
$$\sigma_d^2 \Big|_{dB}$$



Livello di potenza noto

Sistemi Radar

Scelta della soglia – stima del disturbo



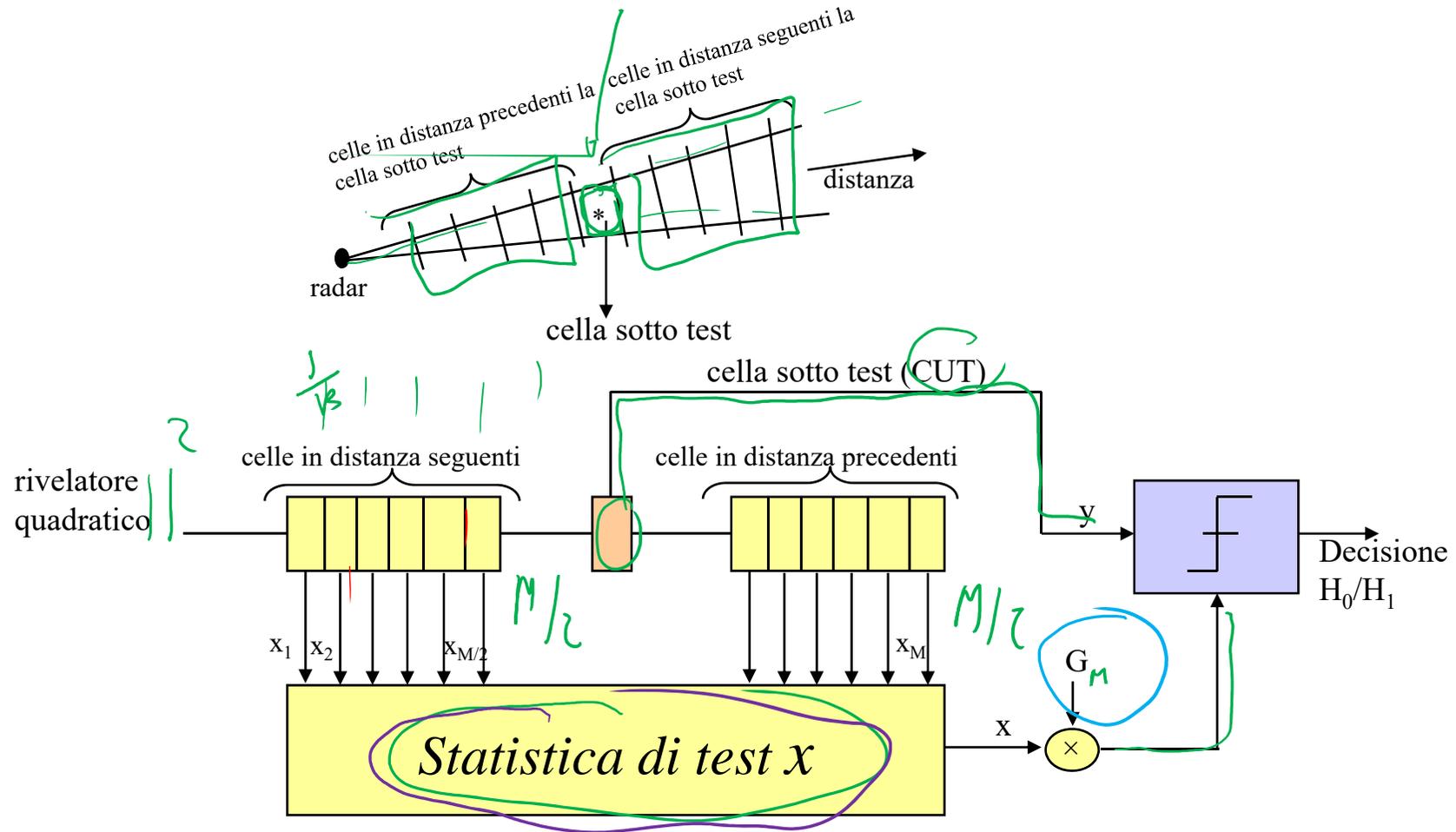
Incremento di P_{fa} per stima disturbo

$$\begin{aligned}
 P_{fa} &= \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 + \Delta)}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-\frac{G(\sigma_d^2 - \Delta)}{\sigma_d^2}} = \frac{1}{2} e^{-G \frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + \frac{1}{2} e^{-G + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} = \\
 &= e^{-G} \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} + e^{\frac{G\Delta}{\sigma_d^2}} \right] = e^{-G} \frac{1}{2} \left[1 - \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 + 1 + \frac{G\Delta}{\sigma_d^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right] = \\
 &= e^{-G} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{G\Delta}{\sigma_d^2} \right)^2 \right]
 \end{aligned}$$

$\rightarrow P_R$
 $\rightarrow P_R = e^{-\frac{I^2}{\sigma_d^2}} = e^{-\frac{G_0 G_d}{\sigma_d^2}} = e^{-G_d}$

$G_d = \ln(1/P_R)$

Autogate (I)



$G =$ Guadagno che determina la P_{fa}

Autogate (II)

P_{fa}
 $\int_{T_z}^{\infty} P_y(y/H_0) dy$ $y = z^2$
 $T_z = G \cdot x$
 $T_z = G \cdot \sigma_d^2$

Probabilità di falso allarme:

$$P_{fa} = \int_0^{\infty} \left[\int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y/H_0) dy \right] p_x(x) dx$$

$P_{fa} = \int_0^{\infty} P_{fa}(x) p_x(x) dx$

DDP della cella sotto test

DDP della statistica di test

Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^{\infty} \left[\int_{G \cdot x}^{\infty} p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

CA-CFAR (I)

Cell Average $|\tilde{x}_v|^c$

Statistica di test

$$x = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M x_i = \frac{1}{M} x'$$

ddp exp

- Ipotesi: disturbo gaussiano

$$p_y(y/H_0) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} \quad y \geq 0$$

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x_i}{\sigma^2}} \quad x_i \geq 0, i = 1 \dots M$$



M variabili aleatorie
indipendenti identicamente
distribuite

Per l'ipotesi di indipendenza statistica:
densità di probabilità = convoluzione delle singole
densità



$$p_{x'}(x') = p_{x_1}(x') * p_{x_2}(x') \dots * p_{x_M}(x')$$

Funzione caratteristica:

$$C_{x'}(u) = C_{x_1}(u) \cdot C_{x_2}(u) \cdot \dots \cdot C_{x_M}(u) = [C_{x_i}(u)]^M = \left[\frac{1/\sigma^2}{1/\sigma^2 - ju} \right]^M$$



antitrasformando

$$p_{x'}(x') = \frac{1}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{x'}{\sigma^2} \right)^{M-1} e^{-\frac{x'}{\sigma^2}} \quad x' \geq 0$$

$$x = \frac{x'}{M} \Rightarrow p_x(x) = M p_{x'}(Mx)$$

Sistemi Radar

CA-CFAR (II)

$$\int_0^{\infty} p_x(x) dx = 1$$

$$P_{fa} = \int_0^{\infty} \left[\int_{Gx}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}} dx =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{M}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M+G)} dx = \left(\frac{M}{M+G}\right)^M \int_0^{\infty} \frac{1}{(M-1)! \sigma^2} \left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{z}{\sigma^2}} dz = \left(1 + \frac{G}{M}\right)^{-M}$$

$$z = x(M+G)$$

Integrale di una densità di probabilità

$$P_{fa} = \left(1 + \frac{G}{M}\right)^{-M}$$

$$\left(\frac{M}{M+G}\right)^M = \left(\frac{1}{\frac{M+G}{M}}\right)^M$$

Fissato il tasso di falsi allarmi desiderato e fissato il valore di M resta fissato il valore da dare al guadagno G.

$$G = M \left[P_{fa}^{-1/M} - 1 \right]$$

From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento

Probabilità di falso allarme dipende solo da G e da M ed è indipendente dal livello del disturbo \Rightarrow **CFAR: Constant False Alarm Rate** indipendente da variazioni spaziali o temporali del livello del disturbo (la soglia si adatta a variazioni spaziali e/o temporali di σ^2).

Sistemi Radar

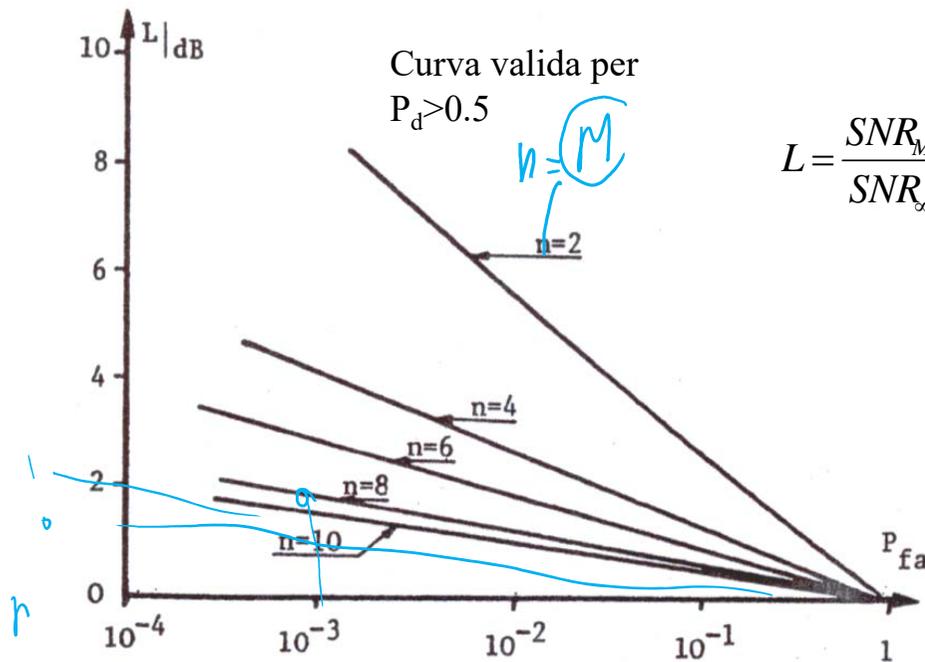
CA-CFAR (III)

$e^{-\frac{Gx}{r}}$ P_d

- Probabilità di rivelazione:

$$P_d = \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

- soglia fluttuante → perdite in sensibilità (tutto va come se ci fosse una soglia fissa più un rumore additivo dovuto alla fluttuazione della stima)



$$L = \frac{SNR_M}{SNR_\infty}$$

Perdite in sensibilità: rapporto tra SNR richiesto in presenza di soglia stimata adattivamente da M campioni (SNR_M) e SNR richiesto in presenza di soglia fissa (SNR_∞).

Fissato il livello di falso allarme le perdite sono tanto minori quanto maggiore è M ($M=\infty$ equivale a disturbo noto).

$$p_d = e^{-G}$$

$$p_d = \left(1 + \frac{G}{M}\right)^{-M}$$

$$G = \ln(1/p_d)$$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{G}{M}\right)^{-M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{G}{M}\right)^M \right]^{-1} = e^{-G}$$

$$\left[\left(1 + \frac{G}{M}\right)^M \right]^{-1} = e^{-G}$$

$$\lim_{X \rightarrow a} \left(1 + \frac{a}{X}\right)^X = e^a$$

CA-CFAR (IV)

- Probabilità di rivelazione:

Bersaglio Swerling I - II

$$P_d = \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty p_y(y/H_1) dy \right] p_x(x) dx$$

Handwritten: $P_d = P_{fa} \frac{1}{1+SNR}$

$$P_d = \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2 + \sigma_T^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} p_x(x) dx =$$

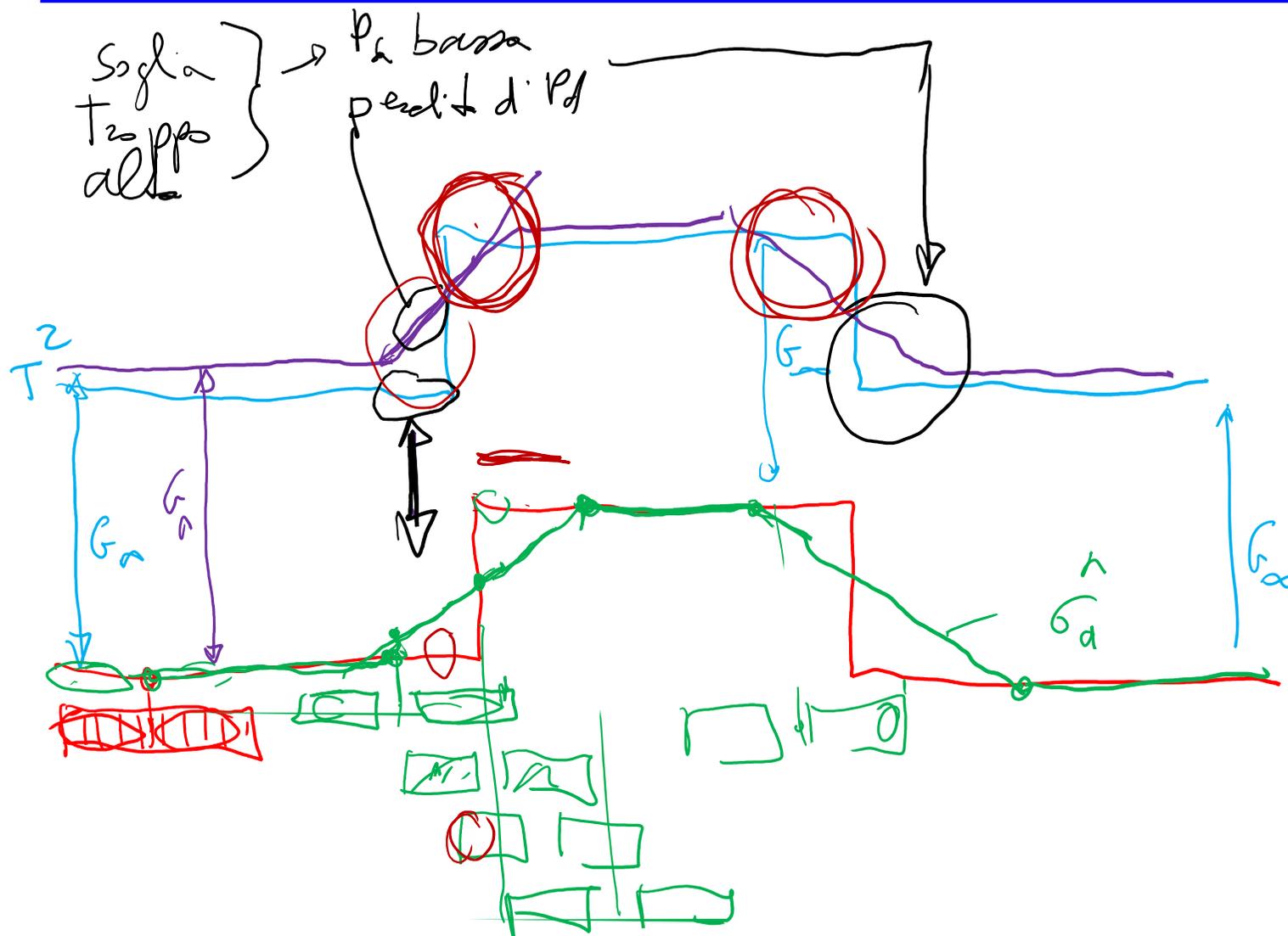
$$\int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} \frac{M}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{Mx}{\sigma^2}} dx = \int_0^\infty \frac{M}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{Mx}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2} \left(M + \frac{G}{1 + \sigma_T^2/\sigma^2}\right)} dx =$$

$$= \left(\frac{M}{M + G/(1+SNR)}\right)^M \int_0^\infty \frac{1}{(M-1)!} \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{z}{\sigma^2}\right)^{M-1} e^{-\frac{z}{\sigma^2}} dz = \left(1 + \frac{G}{M(1+SNR)}\right)^{-M}$$

Handwritten: = 2

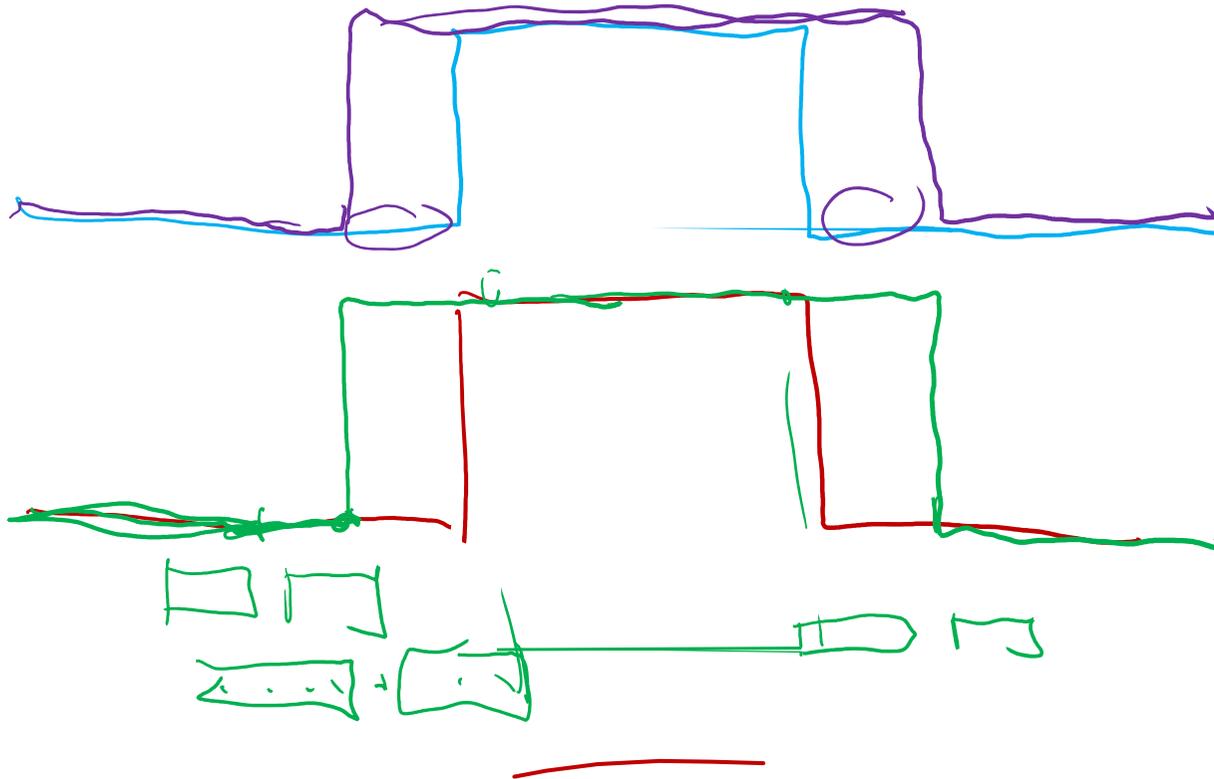
Handwritten: $\lim_{M \rightarrow \infty}$

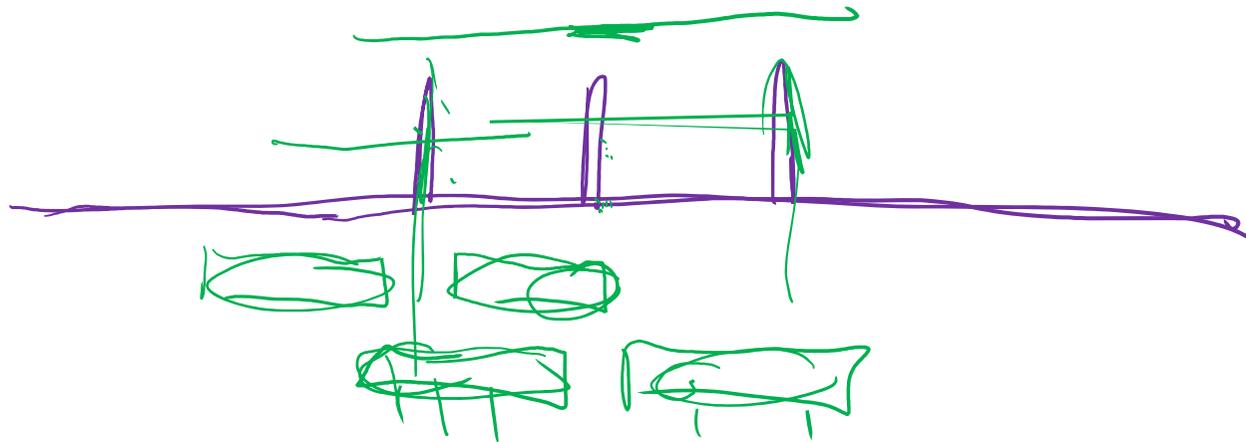
Handwritten: $e^{-\frac{G}{1+SNR}} = (P_{fa})^{\frac{1}{1+SNR}}$



Sistemi Radar

GO-CFAR

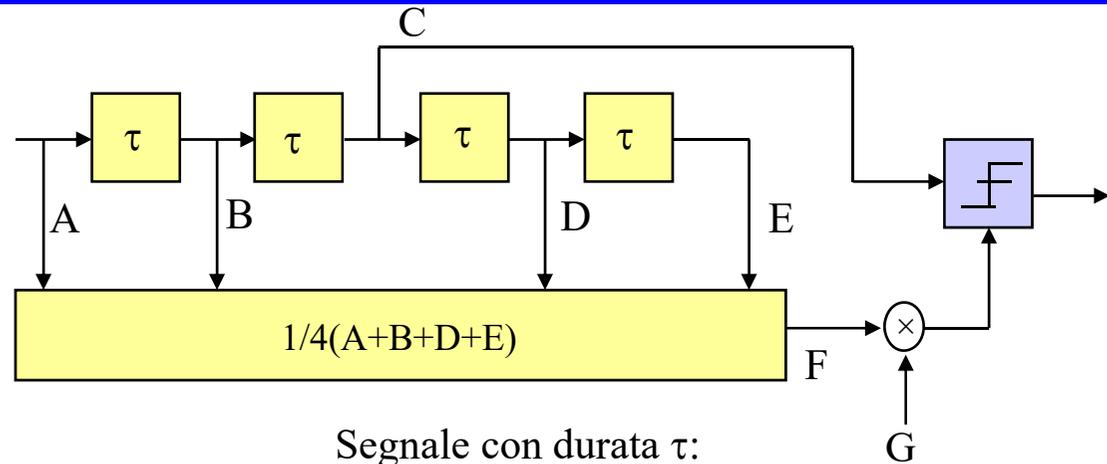




CA-CFAR (V)

Problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento

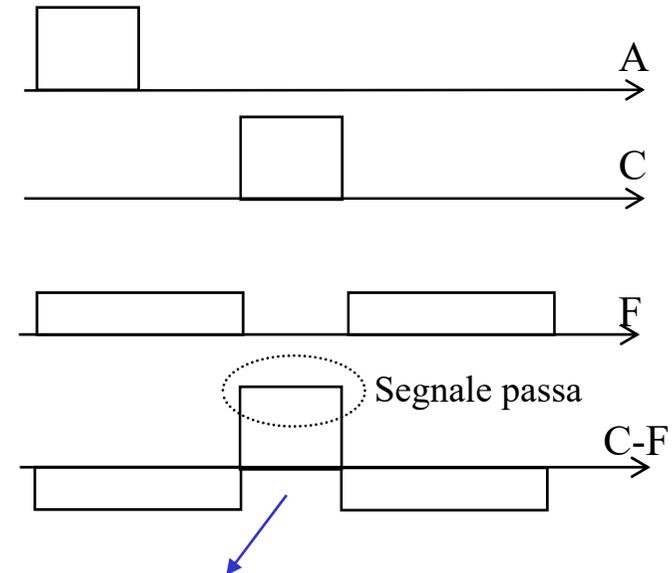
From: D. Pastina, F. Colone
Telerilevamento



Interferenza con durata 5τ :



Segnale con durata τ :

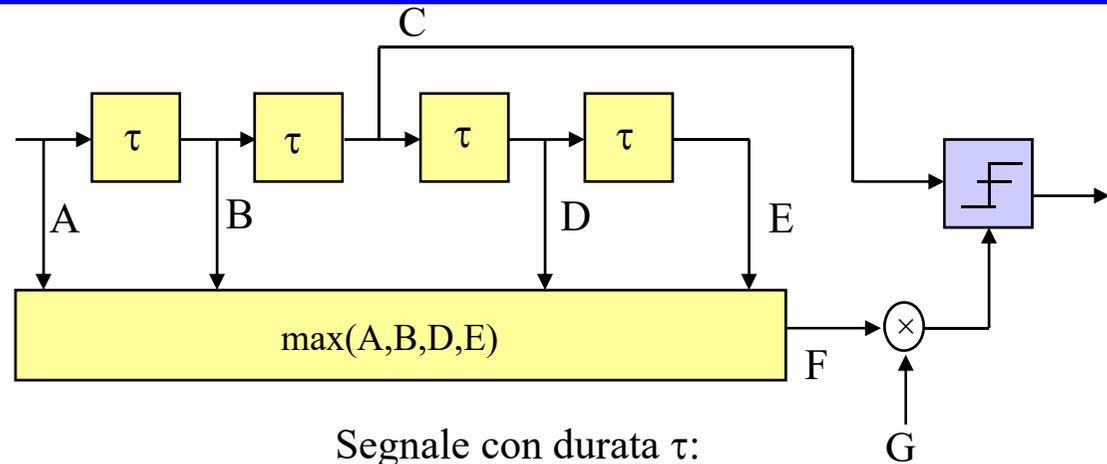


Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

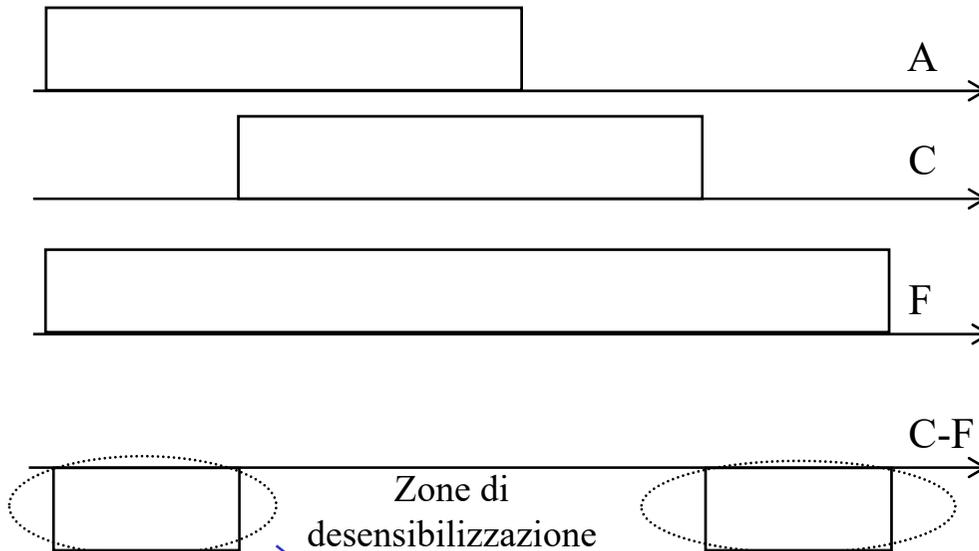
Sistemi Radar

GO-CFAR

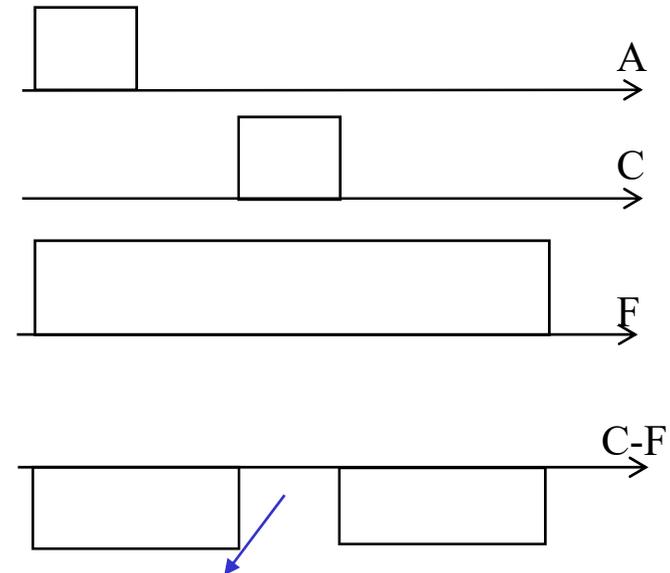
Greatest Of (GO) affronta il problema dei transitori: presenza di zone di desensibilizzazione o accecamento



Interferenza con durata 5τ :



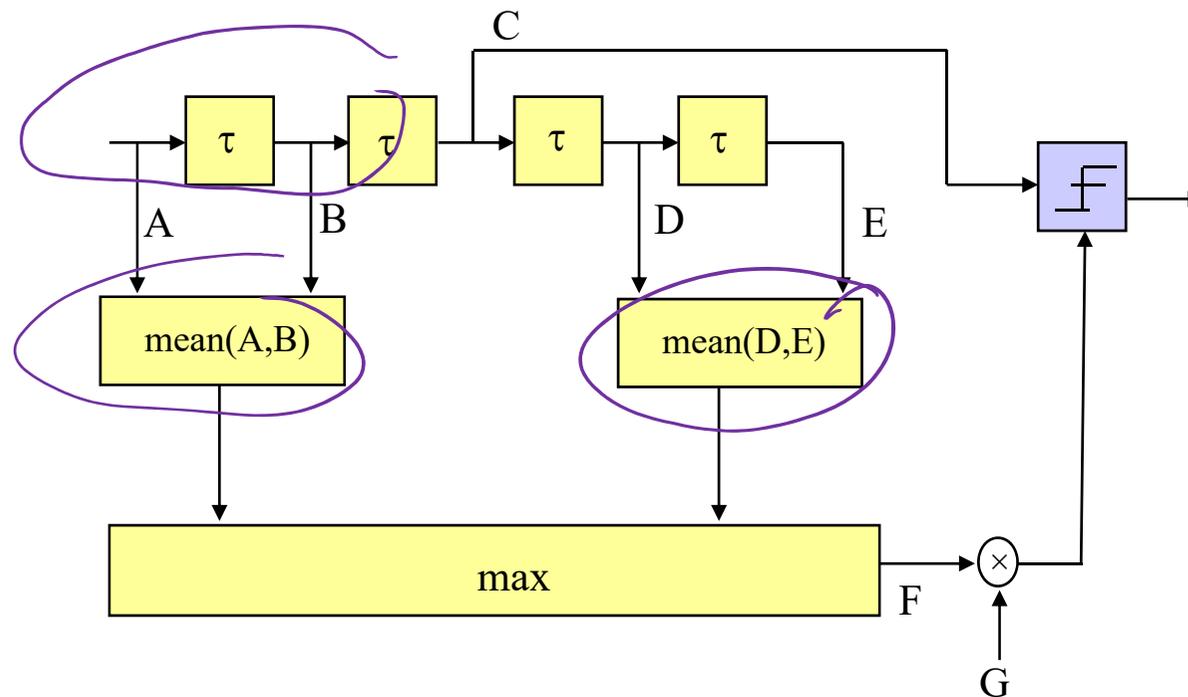
Segnale con durata τ :



Se il segnale precede l'interferenza il fronte di segnale può venire a trovarsi all'interno della zona di desensibilizzazione e il bersaglio viene perso.

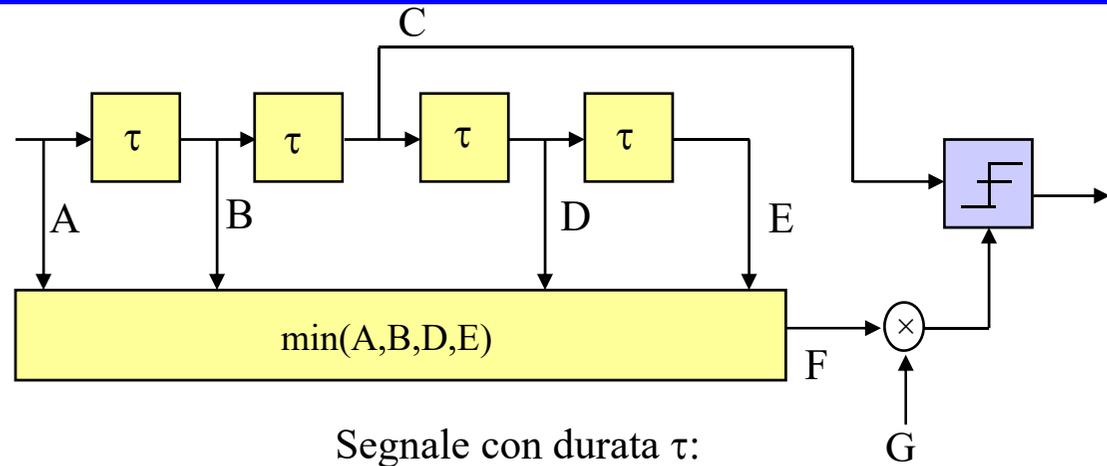
CAGO-CFAR

Compromesso fra CA e GO

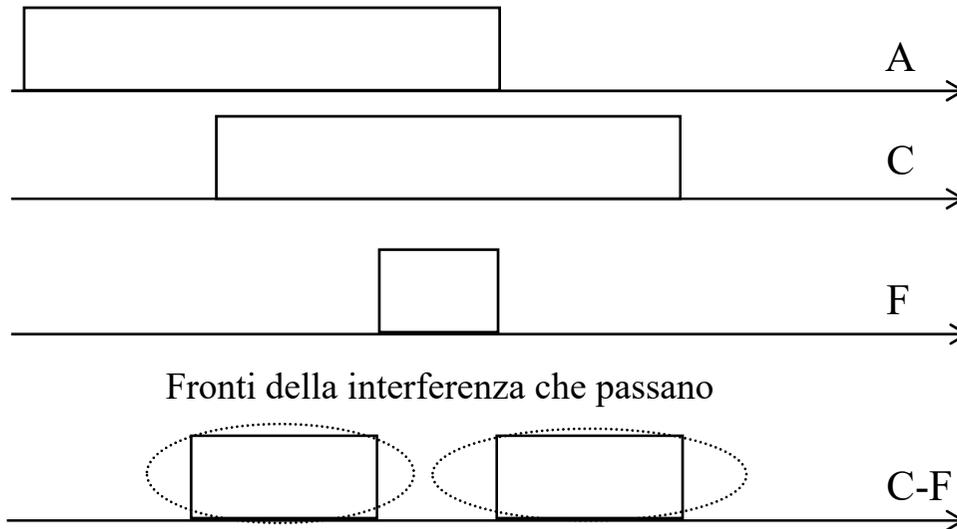


SO-CFAR

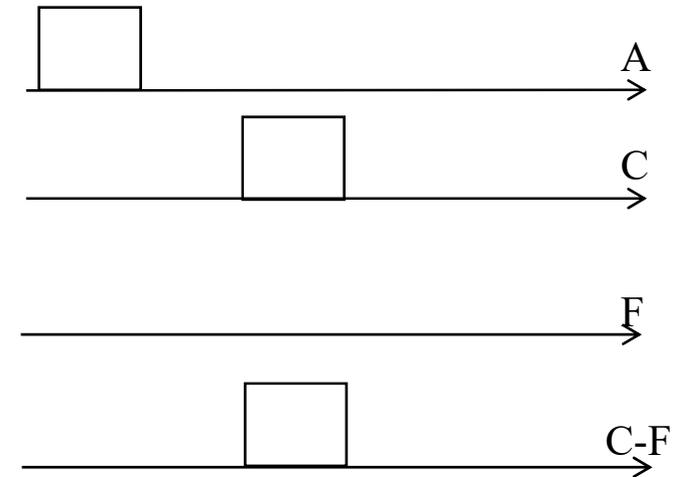
Smallest Of (SO) affronta il problema dei bersagli multipli



Interferenza con durata 5τ :

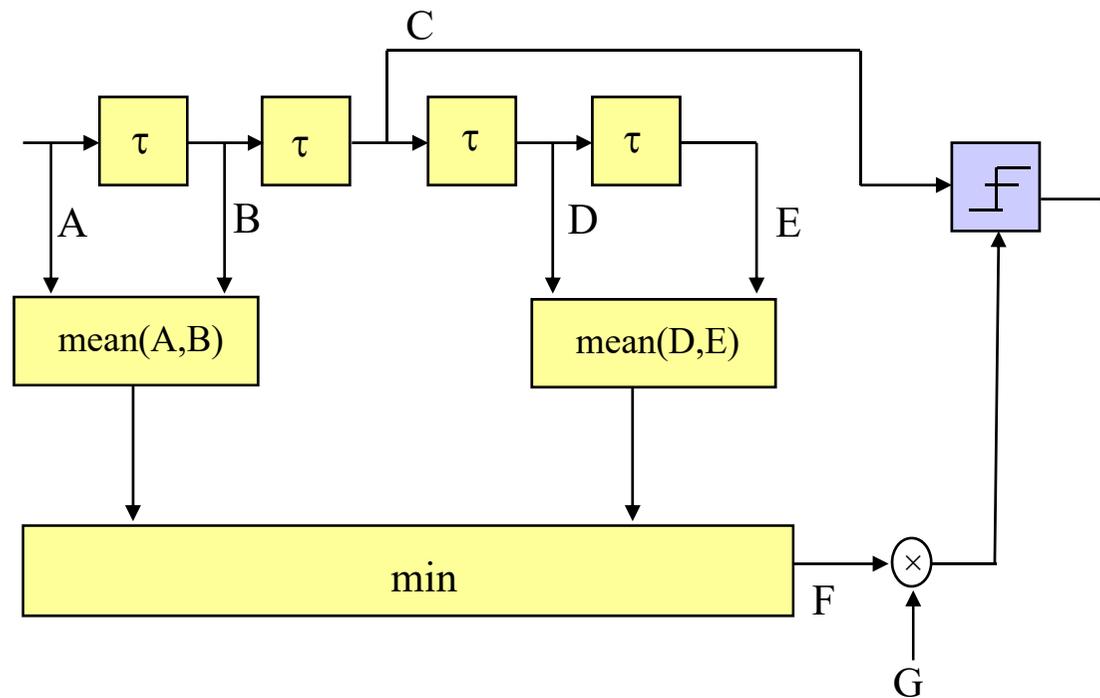


Segnale con durata τ :



CASO-CFAR

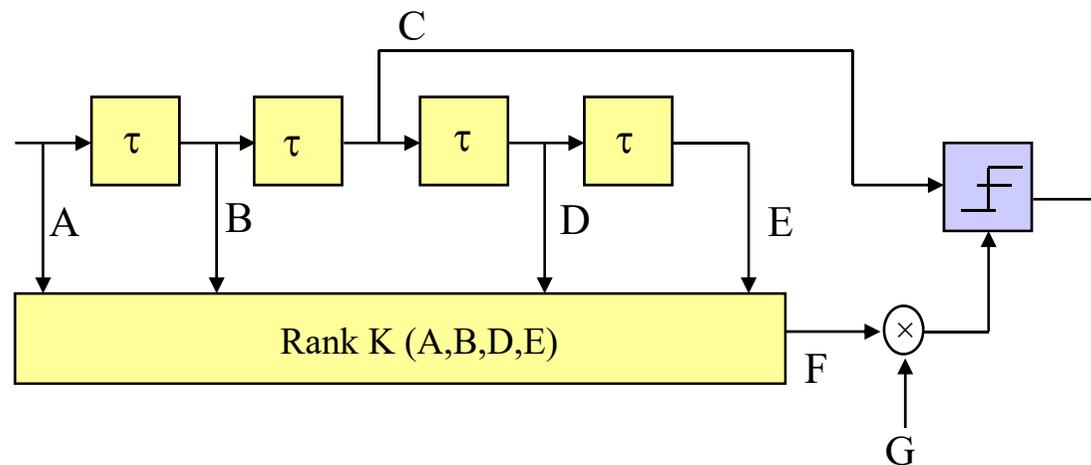
Compromesso fra CA e SO



OS-CFAR

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

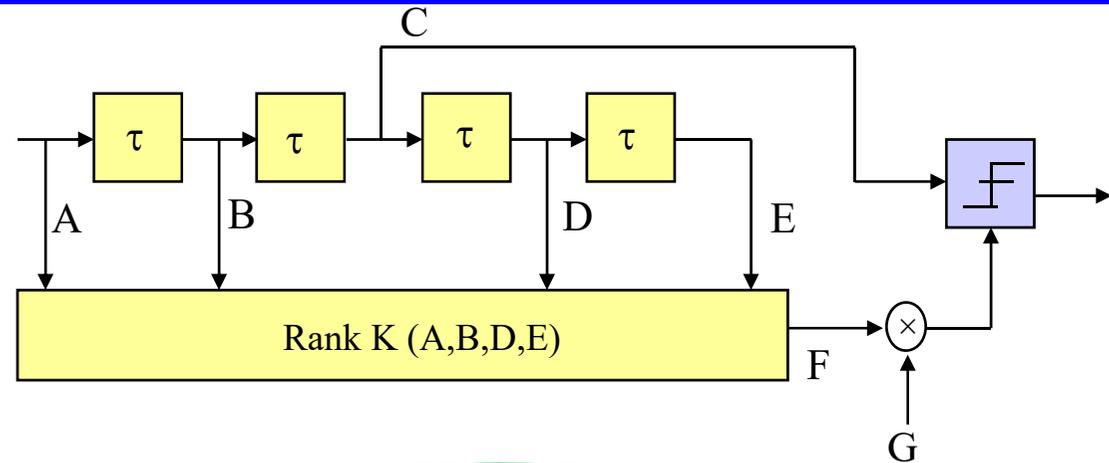
$K=M \rightarrow \text{GO}$

$K=1 \rightarrow \text{SO}$

OS-CFAR (I)

Order-Statistics (OS) CFAR:

Ordinare le celle in base alla loro ampiezza e di utilizzare come soglia la K-esima (dal basso)



E' generalizzazione di GO e SO:

$K=M \rightarrow GO$

$K=1 \rightarrow SO$

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} [P(x)]^{K-1} [1-P(x)]^{M-K} p(x)$$

$$p(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$P(x) = \int_0^x p(x') dx' = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

$$p_x(x) = p_K(x) = K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma}(M-K)} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{x}{\sigma}}$$

OS-CFAR (II)

$$\begin{aligned} P_{fa} &= \int_0^{\infty} \left[\int_{Gx}^{\infty} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} p_x(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{Gx}{\sigma^2}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+G)} dy = \\ &= K \binom{M}{K} \frac{(M-K+G)!(K-1)!}{(M+G)!} = \frac{(M-K+G)! M!}{(M+G)!(M-K)!} \end{aligned}$$

OS-CFAR (III)

Swerling I-II

$$\begin{aligned}
 P_d &= \int_0^\infty \left[\int_{Gx}^\infty \frac{1}{\sigma^2 + \sigma_T^2} e^{-\frac{y}{\sigma^2 + \sigma_T^2}} dy \right] p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} p_x(x) dx = \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} \frac{1}{\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}} dx = \\
 &= \int_0^\infty e^{-\frac{Gx}{\sigma^2(1+SNR)}} K \binom{M}{K} \left[1 - e^{-\frac{x}{\sigma^2}} \right]^{K-1} e^{-\frac{x}{\sigma^2}(M-K)} de^{-\frac{x}{\sigma^2}} = K \binom{M}{K} \int_0^1 [1-y]^{K-1} y^{(M-K+\frac{G}{1+SNR})} dy = \\
 &= K \binom{M}{K} \frac{\left(M - K + \frac{G}{1+SNR} \right)! (K-1)!}{\left(M + \frac{G}{1+SNR} \right)!} = \frac{\left(M - K + \frac{G}{1+SNR} \right)! M!}{\left(M + \frac{G}{1+SNR} \right)! (M-K)!}
 \end{aligned}$$

Clutter Map CFAR (I)

- **Autogate:**

- Opera in range assumendo omogeneità
- richiede poca memoria

- **Clutter map:** usa gli stessi schemi per la stima del livello di clutter, ma usando campioni della stessa cella in scan successivi:

- Non richiede omogeneità in range
- richiede una occupazione di memoria molto maggiore
- richiede stazionarietà dello scenario osservato (radar fissi o con moto compensabile)
- tipicamente la soluzione CA è adeguata poichè non ci sono transitori da gestire.

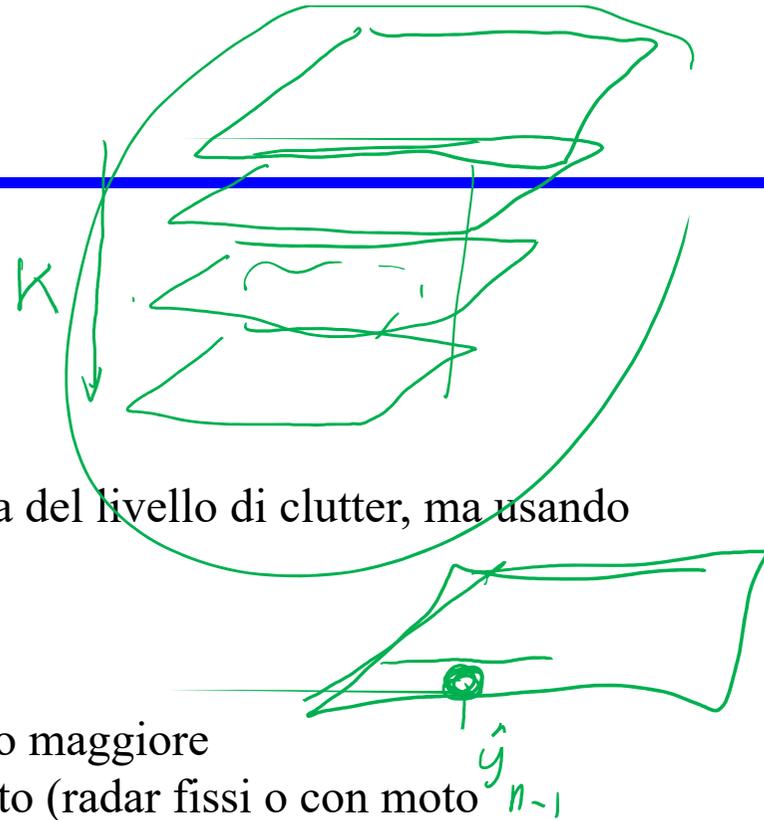
-Per ridurre la memoria la “media mobile” del CA può essere sostituita con una media di altro tipo che non richieda di memorizzare tutti gli M scan usati:

“exponential smoothing”

$K=16$

$$\hat{y}_n(k) = (1-W) \hat{y}_{n-1}(k) + W z_n(k)$$

$\frac{15}{16}$ \uparrow $\frac{1}{16}$



LOG-FTC

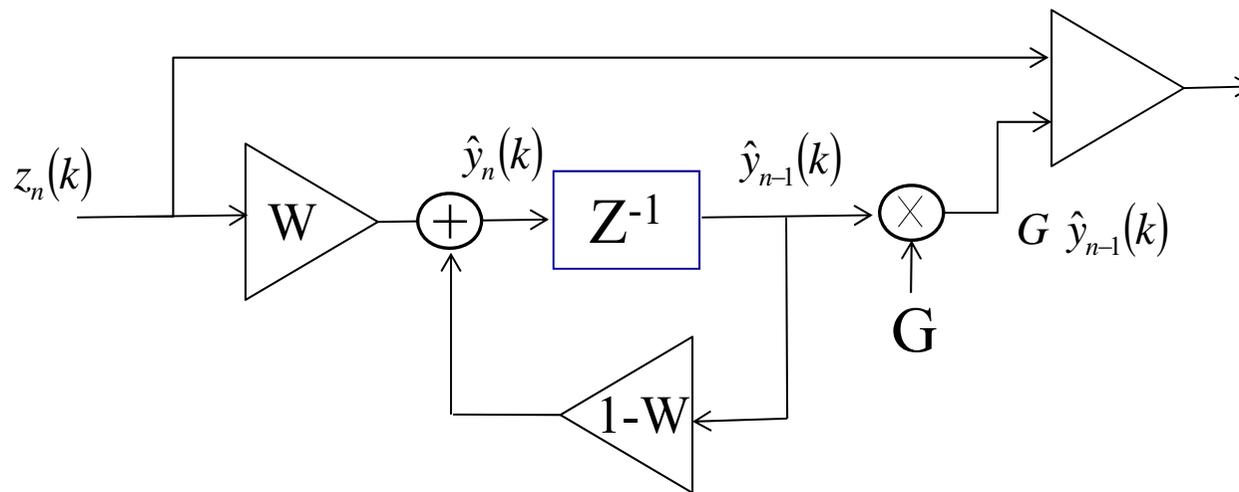
- Il canale logaritmico può essere usato come dispositivo normalizzatore di potenza (funzione simile ad un autogate)
- Il logaritmo trasforma fattore di scala moltiplicativo (livello di potenza) in fattore additivo, cioè alterazione del valore medio
- Se si rimuove (sottrae o elimina) il valore medio si ottiene intrinsecamente una caratteristica CFAR rispetto alla potenza media
- Ad esempio circuito derivatore: Fast Time Constant **FTC**:
 - la derivata elimina il valor medio e risulta CFAR
 - semplice realizzazione con circuito RC derivatore in sistemi a bassissimo costo

Clutter Map CFAR (II)

-Per ridurre la memoria la “media mobile” del CA può essere sostituita con una media di altro tipo che non richieda di memorizzare tutti gli M scan usati:
“exponential smoothing”

$$\hat{y}_n(k) = (1-W) \hat{y}_{n-1}(k) + W z_n(k)$$

$W=0$ assenza di CFAR
 $W \rightarrow 1$ media molto lunga



$$\hat{y}_n = W \sum_{j=0}^{\infty} (1-W)^j z_{n-j}$$

Clutter Map CFAR (III)

-Prestazioni per M alto

$$P_{fa} = \frac{1}{\prod_{m=0}^M [1 + GW(1-W)^m]} \quad M \rightarrow \infty$$

-Si ha migliore convergenza riscrivendo le formule di sopra come:

$$P_{fa} = \frac{1}{1 + \sum_{m=0}^M \prod_{k=0}^m \frac{GW(1-W)^k}{1 + (1-W)^{k+1}}} \quad M \rightarrow \infty$$

Clutter Map CFAR - Detection (III)

-Prestazioni per M alto

$$P_d = \frac{1}{\prod_{m=0}^M \left[1 + \frac{G}{1+SNR} W(1-W)^m \right]} \quad M \rightarrow \infty$$

-Si ha migliore convergenza riscrivendo le formule di sopra come:

$$P_d = \frac{1}{1 + \sum_{m=0}^M \prod_{k=0}^m \frac{G}{1+SNR} \frac{W(1-W)^k}{1+(1-W)^{k+1}}} \quad M \rightarrow \infty$$

Clutter Map CFAR (III)

