
Proprietà della Funzione di Ambiguità

Pierfrancesco Lombardo

Funzione di ambiguità (VII)

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi\nu t} dt \right|$$

– Proprietà della Funzione di Ambiguità

(assumendo che l'energia di $s_0(t)$ sia unitaria)

1. Massimo in (0,0)

$$|\chi(\tau, \nu)| \leq |\chi(0,0)| = 1$$

2. Volume Costante

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = 1$$

3. Simmetria rispetto all'origine

$$|\chi(-\tau, -\nu)| = |\chi(\tau, \nu)|$$

4. Modulazione lineare di frequenza

$$\begin{aligned} s_0(t) &\Leftrightarrow |\chi(\tau, \nu)| \\ s_0(t) e^{j\pi k t^2} &\Leftrightarrow |\chi(\tau, \nu - k\tau)| \end{aligned}$$

Funzione di ambiguità (VIII)

- **Proprietà #1 della Funzione di Ambiguità:** Massimo in (0,0)

Dalla disuguaglianza di Schwartz;

$$|\chi(\tau, \nu)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi \nu t} dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi \nu t}|^2 dt$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_0^*(t + \tau)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi \nu t}|^2 dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t + \tau)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t)|^2 dt = \chi^2(0,0) = 1 \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$



$$|\chi(\tau, \nu)| \leq |\chi(0,0)| = 1$$

Funzione di ambiguità (IX)

- **Proprietà #2 della Funzione di Ambiguità:** Volume costante

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi\nu t} dt \right|^2 d\tau d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_0(t_1) s_0^*(t_1 + \tau) e^{j2\pi\nu t_1} dt_1 \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} s_0^*(t_2) s_0(t_2 + \tau) e^{-j2\pi\nu t_2} dt_2 \right] d\tau d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t_1) s_0^*(t_1 + \tau) e^{j2\pi\nu t_1} s_0^*(t_2) s_0(t_2 + \tau) e^{-j2\pi\nu t_2} dt_1 dt_2 d\tau d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t_1) s_0^*(t_1 + \tau) s_0^*(t_2) s_0(t_2 + \tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\nu(t_1 - t_2)} d\nu \right] dt_1 dt_2 d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t_1) s_0^*(t_1 + \tau) s_0^*(t_2) s_0(t_2 + \tau) \delta(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t_1) s_0^*(t_1 + \tau) s_0^*(t_1) s_0(t_1 + \tau) dt_1 d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t_1)|^2 |s_0(t_1 + \tau)|^2 dt_1 d\tau = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t_1)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t_1 + \tau)|^2 d\tau \right] dt_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |s_0(t_1)|^2 dt_1 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\chi(\tau, \nu)|^2 d\tau d\nu = 1
 \end{aligned}$$

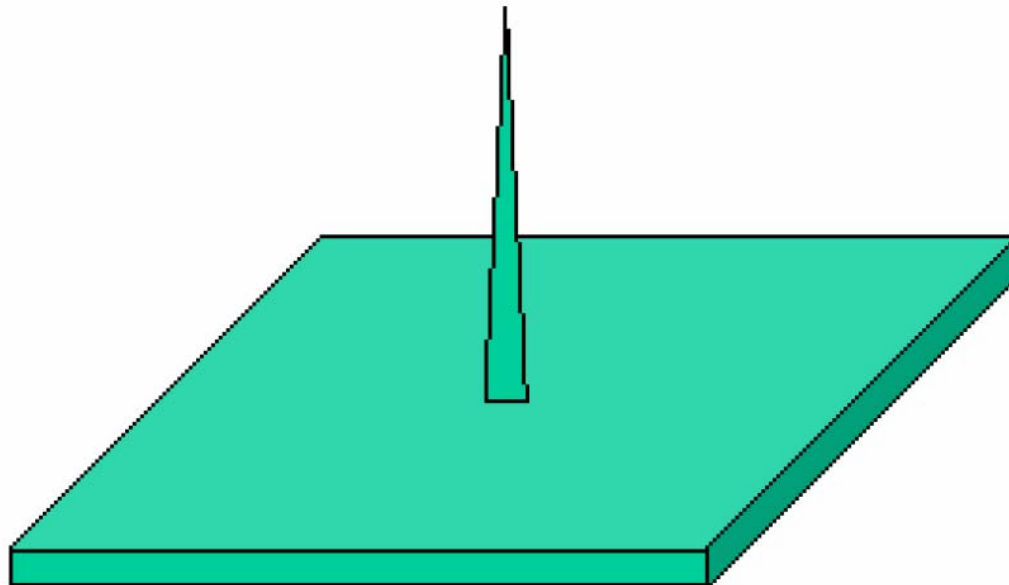
Sistemi Radar

Funzione di ambiguità (X)

– Funzione di Ambiguità ideale

Thumbtack:

- Picco stretto sia in Doppler sia in range
- Piedistallo (“necessario” per rispettare il Volume costante)



Funzione di ambiguità (XI)

- **Proprietà #3 della Funzione di Ambiguità:** Simmetria rispetto all'origine

Ricordando che il modulo di una funzione coincide con il modulo della funzione coniugata :

$$\begin{aligned} |\chi(-\tau, -\nu)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t-\tau) e^{-j2\pi\nu t} dt \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0^*(t) s_0(t-\tau) e^{j2\pi\nu t} dt \right| = \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0^*(t'+\tau) s_0(t') e^{j2\pi\nu(t'+\tau)} dt' \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t') s_0^*(t'+\tau) e^{j2\pi\nu t'} dt' \right| = |\chi(\tau, \nu)| \end{aligned}$$



$$|\chi(-\tau, -\nu)| = |\chi(\tau, \nu)|$$

Funzione di ambiguità (XII)

– **Proprietà #4 della Funzione di Ambiguità:** Modulazione lineare di frequenza

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi\nu t} dt \right|$$

$$|\chi_1(\tau, \nu)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) e^{j\pi k t^2} s_0^*(t + \tau) e^{-j\pi k (t + \tau)^2} e^{j2\pi\nu t} dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{-j\pi k \tau^2} e^{-j2\pi k \tau t} e^{j2\pi\nu t} dt \right| =$$

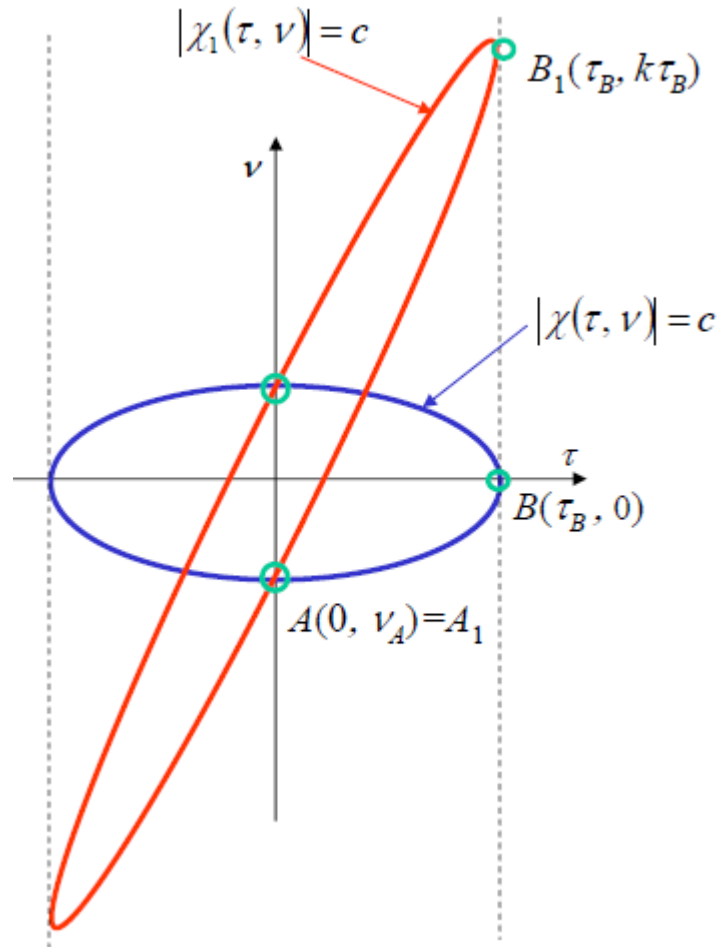
$$= \left| e^{-j\pi k \tau^2} \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi(\nu - k\tau)t} dt \right| =$$

$$= \left| \int_{-\infty}^{\infty} s_0(t) s_0^*(t + \tau) e^{j2\pi(\nu - k\tau)t} dt \right| = |\chi(\tau, \nu - k\tau)|$$

$$\begin{array}{l} \longleftrightarrow \\ \longleftrightarrow \end{array} \begin{array}{l} s_0(t) \quad \Leftrightarrow \quad |\chi(\tau, \nu)| \\ s_0(t) e^{j\pi k t^2} \quad \Leftrightarrow \quad |\chi(\tau, \nu - k\tau)| \end{array}$$

Sistemi Radar

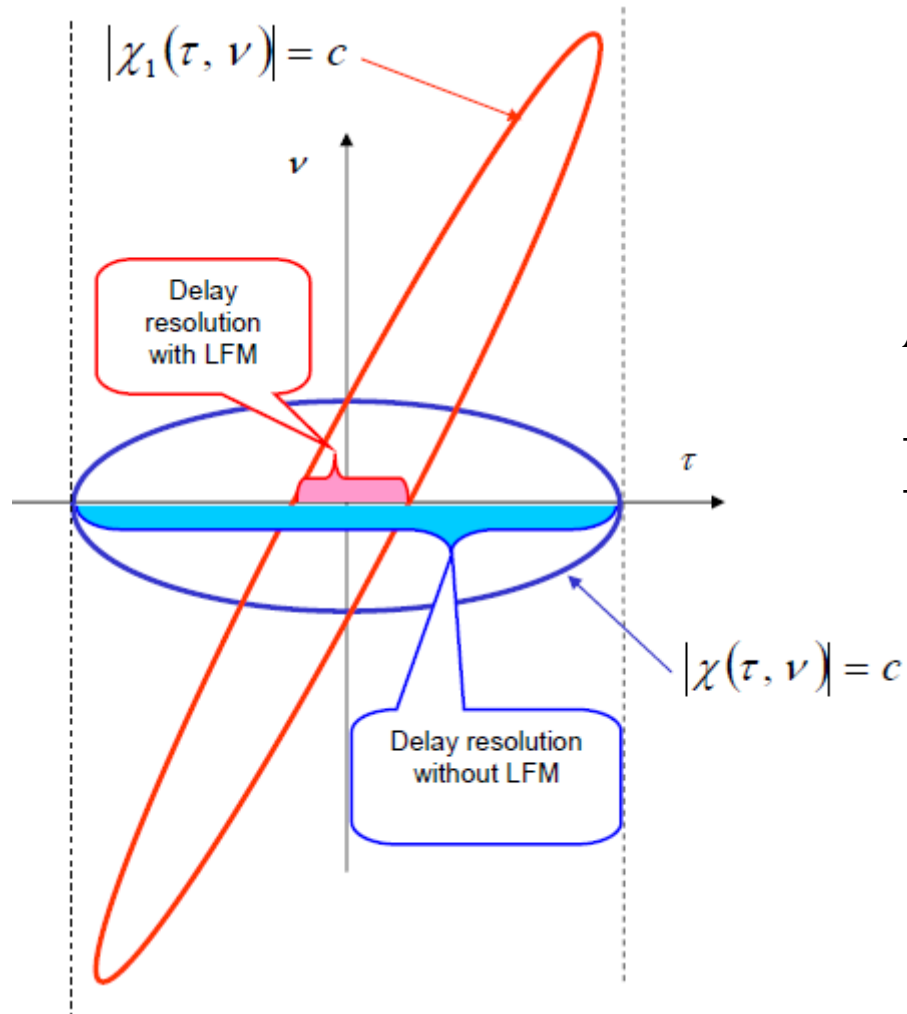
Funzione di ambiguità (XIII)



$$|\chi_1(\tau_b, k\tau_b)| = |\chi(\tau_b, k\tau_b - k\tau_b)| = |\chi(\tau_b, 0)|$$

$$|\chi_1(\tau, \nu)| = |\chi(\tau, \nu - k\tau)|$$

Funzione di ambiguità (XIV)



$$|\chi_1(\tau, \nu)| = |\chi(\tau, \nu - k\tau)|$$

Aggiunta di modulazione lineare di frequenza:

- Incremento della banda di frequenza
- Riduzione della finestra in distanza

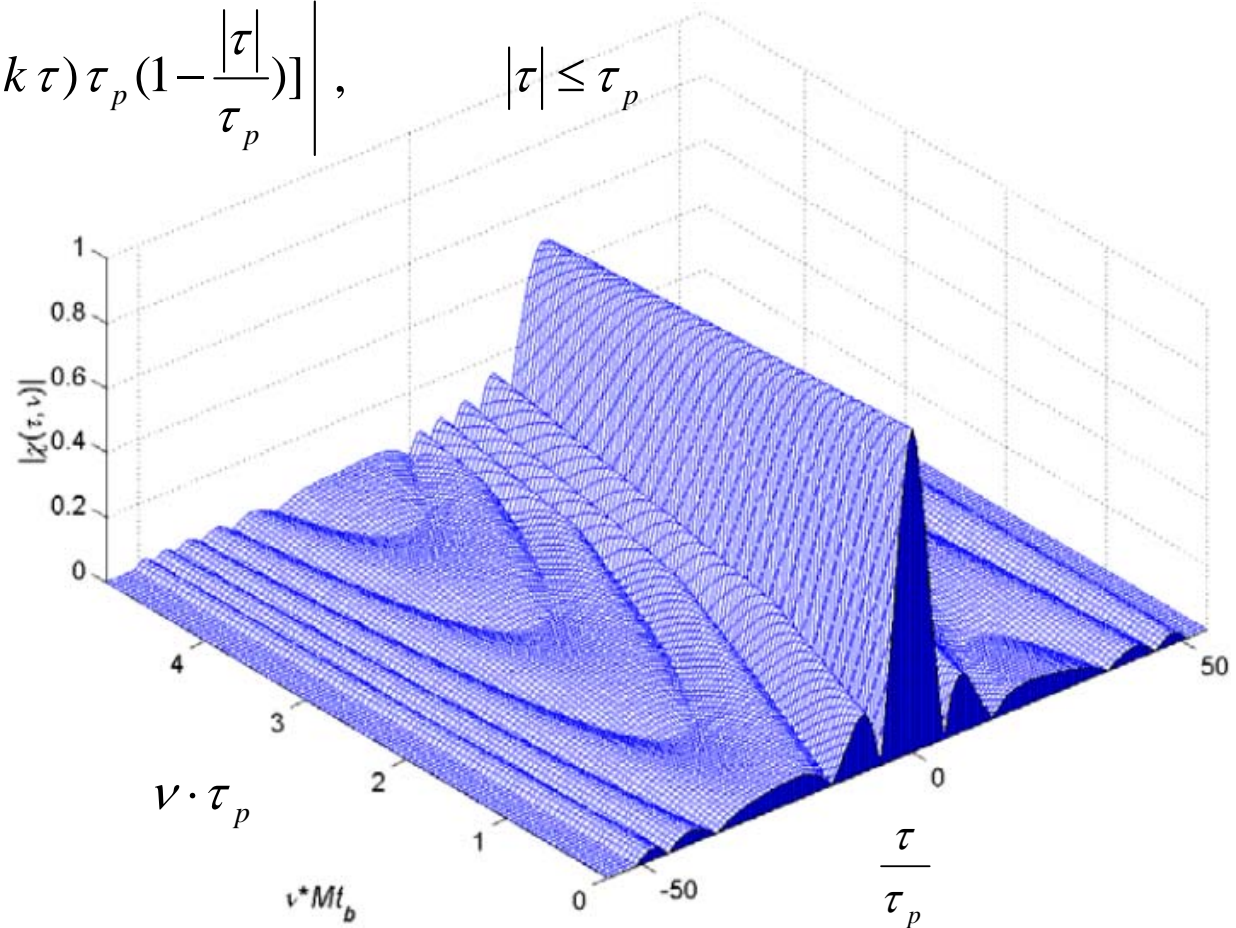
Funzione di ambiguità del Chirp (I)

- **Funzione di Ambiguità:**
Chirp con inviluppo rettangolare

$$s_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_p}} \text{rect}_{\tau_p}(t) e^{j\pi k t^2}$$

$$|\chi(\tau, \nu)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \text{sinc}[\pi(\nu - k\tau)\tau_p \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right)] \right|, \quad |\tau| \leq \tau_p$$

Partendo dalla FA dell'impulso non modulato e usando la proprietà #4:



Funzione di ambiguità del chirp (II)

Funzione di Ambiguità: Chirp con involuppo rettangolare

$$s_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_p}} \text{rect}_{\tau_p}(t) e^{j\pi k t^2}$$

$$|\chi(\tau, 0)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \text{sinc}\left[\pi k \tau \tau_p \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right)\right] \right|, \quad |\tau| \leq \tau_p$$

Primo nullo

$$\pi k \tau \tau_p \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right) = \pi$$

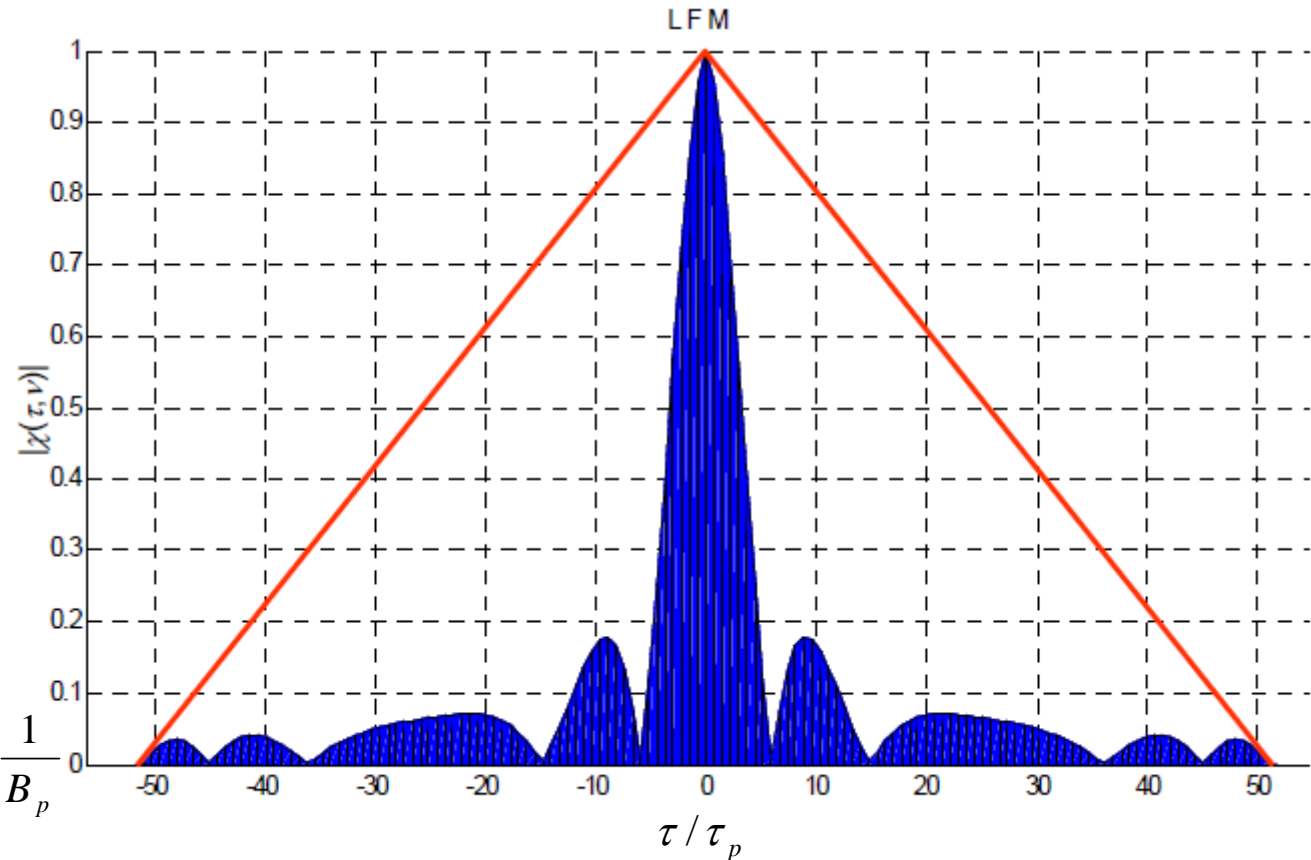
$$\tau \tau_p - \tau^2 = \frac{1}{k}$$

$$\tau^2 - \tau \tau_p + \frac{1}{k} = 0$$

$$\tau = \frac{\tau_p}{2} - \sqrt{\frac{\tau_p^2}{4} - \frac{1}{k}}$$

$$= \frac{\tau_p}{2} - \frac{\tau_p}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{k\tau_p^2}}$$

$$\approx \frac{\tau_p}{2} - \frac{\tau_p}{2} \left(1 - \frac{2}{k\tau_p^2}\right) = \frac{1}{k\tau_p} = \frac{1}{B_p}$$



Sistemi Radar

Funzione di ambiguità del chirp (III)

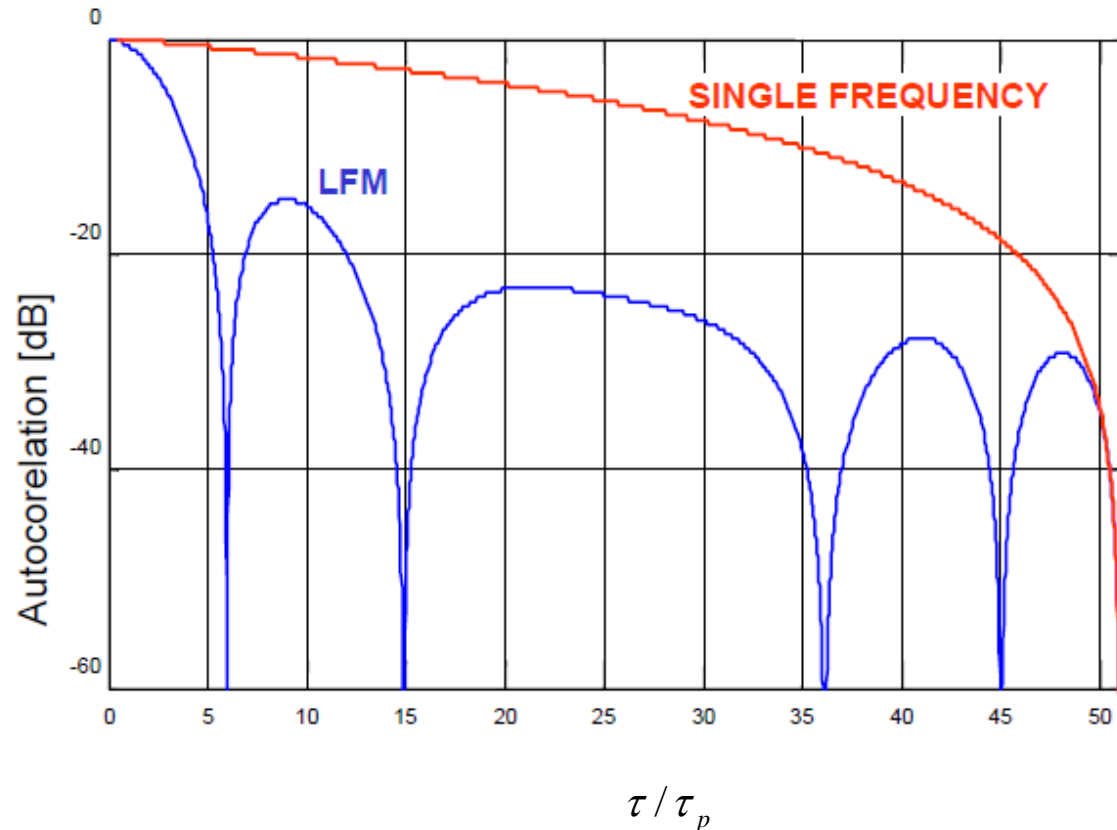
Funzione di Ambiguità: Chirp con involuppo rettangolare

$$s_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_p}} \text{rect}_{\tau_p}(t) e^{j\pi k t^2}$$

$$|\chi(\tau, 0)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \text{sinc}\left[\pi k \tau \tau_p \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right)\right] \right|, \quad |\tau| \leq \tau_p$$

Rapporto di compressione

$$\frac{\tau_p}{1} = k \tau_p^2 = B_p \tau_p$$



Funzione di ambiguità del chirp (IV)

Funzione di Ambiguità: Chirp con involuppo rettangolare

$$s_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau_p}} \text{rect}_{\tau_p}(t) e^{j\pi k t^2}$$

$$|\chi(\tau, 0)| = \left| \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right) \text{sinc}\left[\pi k \tau \tau_p \left(1 - \frac{|\tau|}{\tau_p}\right)\right] \right|, \quad |\tau| \leq \tau_p$$

Accoppiamento
fra ritardo e
Doppler usando
LFM

