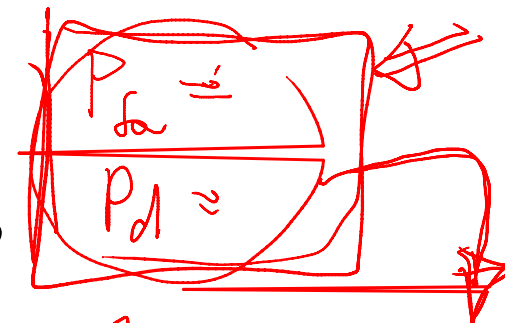


$P_{fa}, P_d, R_{max}, RCS, \text{Max blind range}$

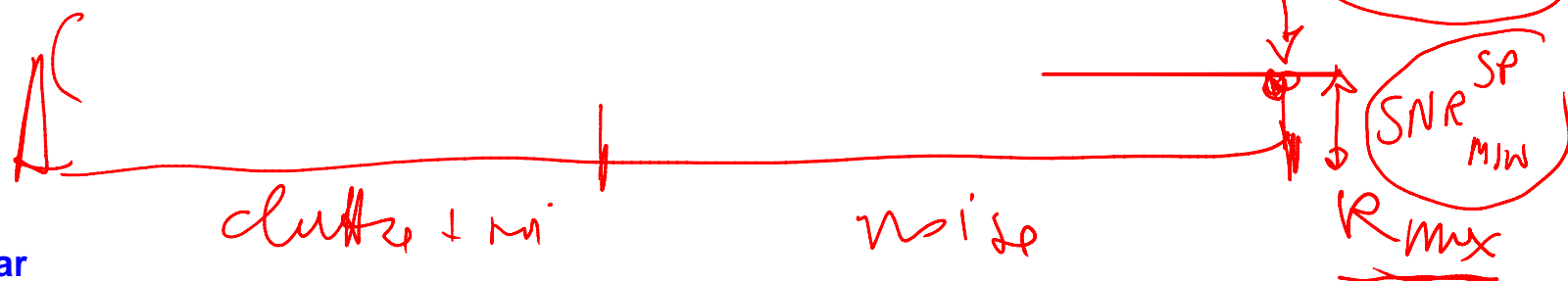
# Equazione Radar e filtro adattato

$$RCS = 10 m^2$$

Pierfrancesco Lombardo



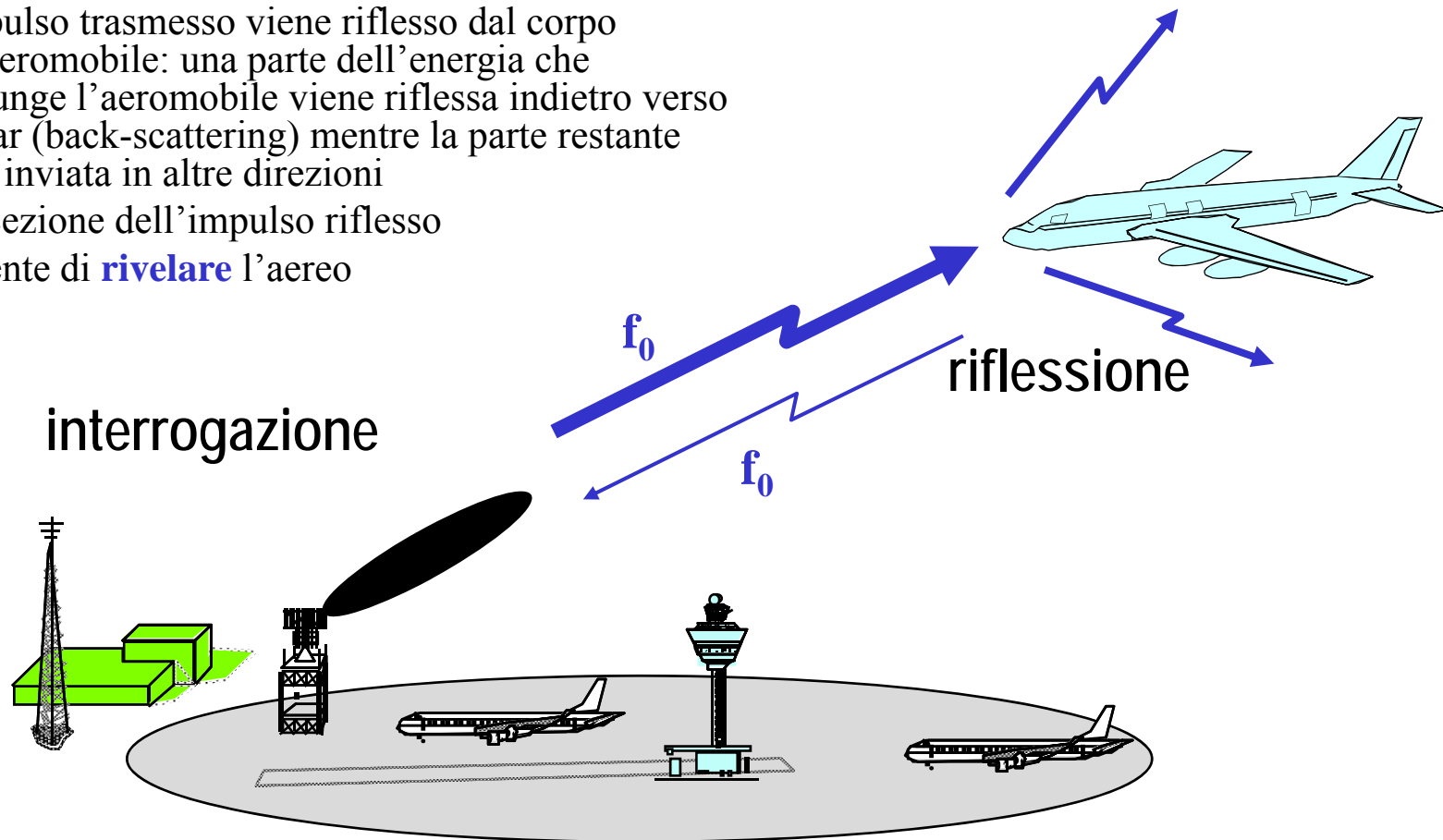
Sul single impulse mi serve  
con SNR minimo



# Il Radar Primario

- **Principio di funzionamento:**

- Il radar invia un impulso (ad esempio di forma rettangolare) su una frequenza portante assegnata
- L'impulso trasmesso viene riflesso dal corpo dell'aeromobile: una parte dell'energia che raggiunge l'aeromobile viene riflessa indietro verso il radar (back-scattering) mentre la parte restante viene inviata in altre direzioni
- La ricezione dell'impulso riflesso consente di **rivelare** l'aereo



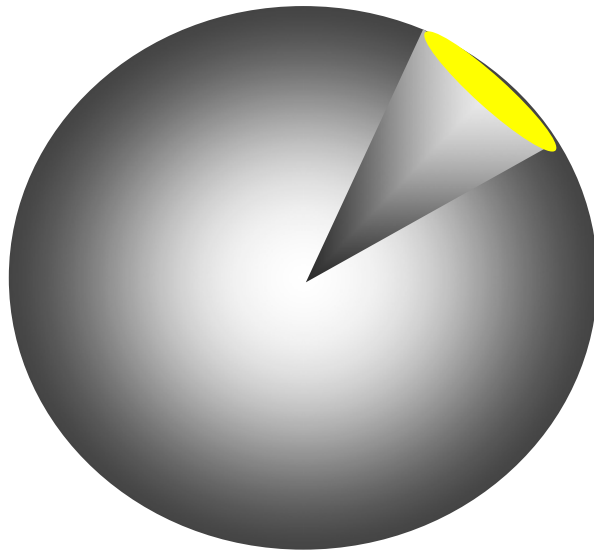
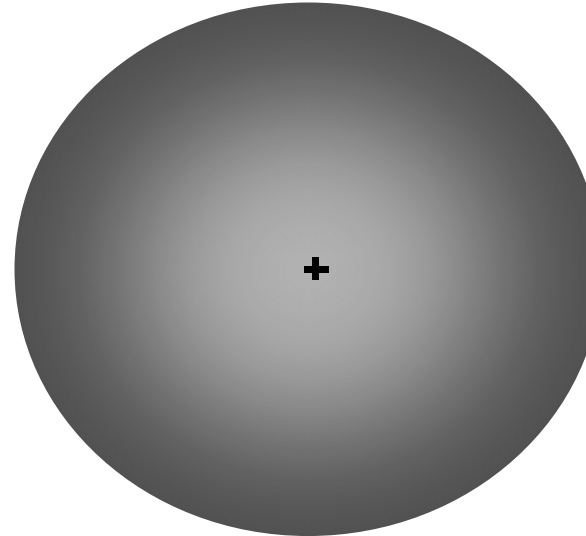
## Sistemi Radar

# Antenna isotropa e direttiva (I)

---

## ANTENNA OMNIDIREZIONALE

- Una **sorgente isotropa** irradia la potenza uniformemente in tutte le direzioni.
- La potenza irradiata si ripartisce uniformemente su sfere concentriche con centro sulla sorgente.

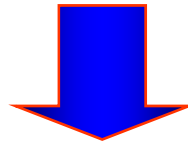


## ANTENNA DIRETTIVA

- L'antenna concentra la **potenza irradiata** in una **direzione preferenziale** o al contrario assorbe la potenza incidente proveniente da una data direzione.
- La potenza irradiata non è più distribuita in modo uniforme sulla sfera ma ci sono direzioni in cui la densità di potenza è maggiore rispetto al caso di antenna omnidirezionale.

# Antenna isotropa e direttiva (II)

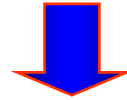
- **Guadagno d'antenna**
  - Potenza irradiata in una particolare direzione confrontata con quella irradiata in una qualunque direzione da un'antenna perfettamente omnidirezionale (antenna isotropa).
- **Antenne direttive concentrano l'energia in particolari direzioni ⇒ vantaggi&svantaggi**
  - Segnale ricevuto ha maggiore potenza.
  - Minore interferenza ad altri ricevitori.
  - Antenne più complesse.



- L'equazione radar pone in relazione la distanza radar-bersaglio e le caratteristiche del sistema radar (trasmettitore, ricevitore e antenna), del bersaglio e dell'ambiente circostante.
- L'equazione radar è utile sia alla determinazione della massima distanza alla quale il radar è in grado di “vedere” (portata radar) che alla progettazione e dimensionamento del sistema stesso.

# Equazione radar (I)

## Costruzione dell'equazione radar



a) radar → bersaglio a distanza R con antenna direttiva:

$$p_t(R, \phi, \theta) = \frac{P_t G(\phi, \theta)}{4\pi R^2}$$

$p_t(R, \phi, \theta)$  : densità di potenza a distanza R in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$P_t$  : potenza irradiata dall'antenna (potenza di picco).

$G(\phi, \theta)$  : guadagno d'antenna in direzione  $(\phi, \theta)$ .

b) potenza intercettata dal bersaglio con Radar Cross Section  $\sigma$  e reirradiata isotropicamente:

$$p_t(R, \phi, \theta) \sigma = \frac{P_t G(\phi, \theta)}{4\pi R^2}$$

$p_t(R, \phi, \theta)$  : densità di potenza a distanza R in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$P_t$  : potenza irradiata dall'antenna (potenza di picco).

$G(\phi, \theta)$  : guadagno d'antenna in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$\sigma$  : Radar Cross Section (RCS) del bersaglio.

# Equazione radar (II)

c) bersaglio a distanza R→radar:

$$p_r(R, \phi, \theta) = \frac{P_t G(\phi, \theta)}{4\pi R^2} \frac{\sigma}{4\pi R^2}$$

$p_r(R, \phi, \theta)$  : densità di potenza al radar dalla distanza R in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$P_t$  : potenza irradiata dall'antenna (potenza di picco).

$G(\phi, \theta)$  : guadagno d'antenna in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$\sigma$  : radar cross section bersaglio.

d) potenza intercettata dall'antenna:

$$P_r(R, \phi, \theta) = \frac{P_t G(\phi, \theta)}{4\pi R^2} \frac{\sigma}{4\pi R^2} A_e(\phi, \theta)$$

$P_r(R, \phi, \theta)$  : potenza al radar dalla distanza R in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$P_t$  : potenza irradiata dall'antenna (potenza di picco).

$G(\phi, \theta)$  : guadagno d'antenna in direzione  $(\phi, \theta)$ .

$\sigma$  : radar cross section bersaglio.

$A_e(\phi, \theta)$  : area efficace d'antenna in direzione  $(\phi, \theta)$ .

# Equazione radar (III)

Guadagno:

$$G = A_e \times \frac{4\pi}{\lambda^2}$$

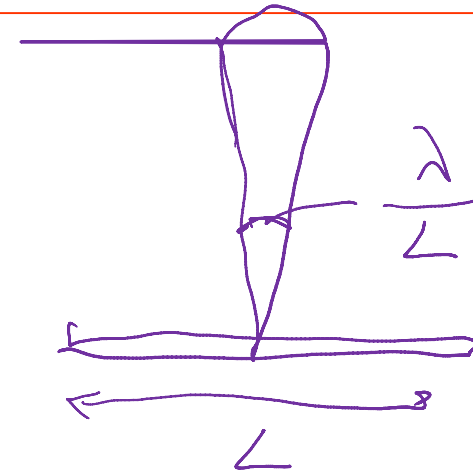
Area  
equivalente:

$$A_e = \eta \times A_g$$

$$A_e = G \cdot \frac{\lambda^2}{4\pi}$$

$$G = \eta \times A_g \times \frac{4\pi}{\lambda^2}$$

$$P_r(R, \phi, \theta) = \frac{P_t G^2(\phi, \theta) \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4}$$



# Portata Radar (I)

---

•La **portata radar**  $R_{\max}$  (maximum radar range) è la distanza oltre la quale il bersaglio non può essere rivelato: questa condizione si verifica quando l'eco ricevuta ha potenza pari al minimo livello rivelabile ( $P_r = S_{\min}$ ).

$$R_{\max} = \left[ \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 S_{\min}} \right]^{1/4}$$



# Portata radar (II)

- Il segnale ricevuto è costituito dalla somma del segnale utile (eco dal bersaglio di interesse) e dal rumore termico del ricevitore (sempre presente: trascurati al momento disturbi provenienti dall'esterno)

$$P_n = kT_0BF$$

$P_n$ : potenza rumore rx riportata in antenna;  
 $k$ : costante di Boltzmann;  
 $T_0$ : 290K;  
 $B$ : banda del ricevitore;  
 $F$ : figura di rumore del ricevitore;

RAPPORTO SEGNALE-  
RUMORE

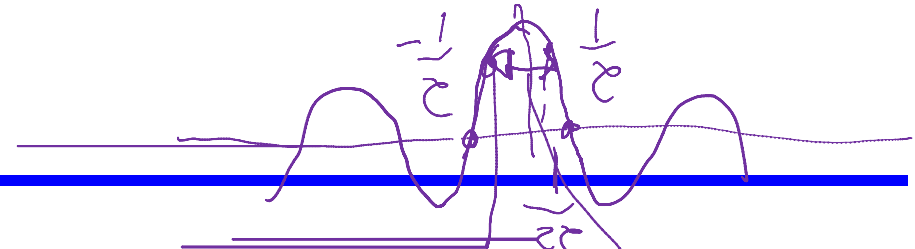
$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_r}{P_n} = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4 kT_0 BF}$$

- La portata radar  $R_{\max}$  può essere definita in funzione del minimo rapporto S/N,  $(S/N)_{\min}$ , che consente un'opportuna rivelazione:

$$R_{\max} = \left[ \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 \cdot kT_0 BF \cdot (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

PORTATA RADAR

# Equazione Radar (IV)



**Varie forme dell'Equazione Radar**

L'equazione radar, e di conseguenza l'espressione della portata, può essere particolarizzata in dipendenza delle applicazioni

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_r}{P_n} = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi R^2)^2 k T_0 B F}$$

1 Si suppose di aver fissato il massimo valore del guadagno d'antenna G (vincolo la larghezza del fascio e quindi la risoluzione angolare): utilizzando  $G=4\pi A_e/\lambda^2$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 R^4 k T_0 B F} \rightarrow R_{\max} = \left[ \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma}{(4\pi)^3 k T_0 B F (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

*B piccola = τ lungo*

Preferibili le basse frequenze

2 Si suppose di aver fissato il massimo valore dell'area geometrica e quindi efficace d'antenna  $A_e$ : utilizzando  $A_e = \lambda^2 G / 4\pi$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_t A_e^3 \sigma}{4\pi R^4 \lambda^2 k T_0 B F} \rightarrow R_{\max} = \left[ \frac{P_t A_e^2 \sigma}{4\pi \lambda^2 k T_0 B F (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

Preferibili le alte frequenze

*(P\_p · τ)*

## Sistemi Radar

# Equazione Radar (V)

---

**Fattori di perdita**

$$R_{\max} = \left[ \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 k T_0 B F (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

Portata radar nello spazio libero  
⇒ unico disturbo considerato: rumore termico del RX.

La portata radar effettiva è diversa da quella predetta nel caso ideale (propagazione nello spazio libero & disturbo≡rumore termico del RX): i fattori che contribuiscono a modificare la portata sono

- fattori di perdita dovuti al sistema radar (TX/RX);
- fattori di perdita dovuti a propagazione in atmosfera;
- fenomeni di propagazione anomala (multipath);
- curvatura della superficie terrestre (orizzonte radar);

Inglobando l'effetto di tutti questi fenomeni in un fattore di perdita L, l'espressione della portata nel caso reale diviene:

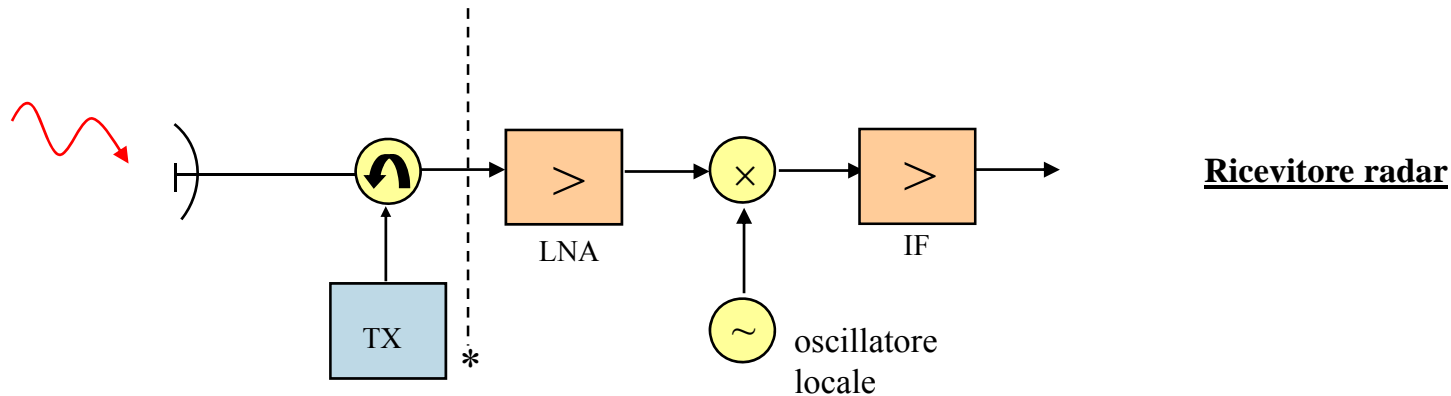
$$R_{\max} = \left[ \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi)^2 k T_0 B F L (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

A seguito della non idealità la portata reale può essere anche la metà di quella ideale.

## Sistemi Radar

---

# Fattori di perdita TX/RX



La figura di rumore del RX è valutata in genere a partire dal primo elemento attivo della catena ricevente (a valle del punto \*: a partire dal Low Noise Amplifier-LNA): vanno quindi considerate le seguenti ulteriori perdite

- potenza di rumore captata dall'antenna (dipende dalla frequenza e dal modo di funzionamento dell'antenna-puntamento cielo/terra);
- perdite dovute all'antenna: non tutta la potenza incidente è fornita al RX (già tenute in conto dall'uso del guadagno in potenza anziché della direttività);
- perdite dovute al giunto rotante, alla linea di tx che connette antenna al RX e al duplexer che disaccoppia TX e RX;

⇒ valutazione della  $F_{tot}$  e inserimento nella equazione radar.

# Matched filtering (I)

---

- If the radar transmission is coherent, it is possible to transmit a long duration pulse (with the advantage of reduced peak power) and compress the echoes received to resemble the echoes from a very short pulse (with the advantages of good range resolution).

## *Matched filter characteristics*

- 1) A matched filter gives the best possible Signal/Noise power ratio (S/N) at Receiver output. This S/N ratio is proportional to the energy contained in the signal waveform.
- 2) A receiver can be matched to a transmitted waveform by making its impulse response the time reverse of that waveform.  
i.e.  $y(t)_{\text{FILTER}} = s^*(-t)_{\text{SIGNAL}}$  it follows that:  $Y(\omega)_{\text{FILTER}} = S^*(\omega)_{\text{SIGNAL}}$   
(Receiver frequency response is complex conjugate of transmit signal spectrum)
- 3) The output waveform of a matched filter receiver is the delayed autocorrelation of the transmitted signal waveform.

# Matched filtering (II)

---

$s(t)$  Input signal

$h(t)$  Impulse response

$y(t)$  Output signal

$t_1$  time of maximum

Signal output power at time  $t_1$

$$P_{S_{out}} = |y(t_1)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} Y(f) e^{j2\pi f t_1} df \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f) H(f) e^{j2\pi f t_1} df \right|^2$$

Noise output power

$$N_{out} = \int_{-\infty}^{+\infty} N(f) |H(f)|^2 df$$

With noise power spectral density  $N(f)$

# Matched filtering (III)

---

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{1}{2} \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_1} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(f)|H(f)|^2 df} \quad \longrightarrow \quad \left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_1} df \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}$$
$$N(f) = \frac{N_0}{2}$$

Schwartz inequality:

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} \leq \frac{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \right) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df \right)}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{E}{N_0}$$

# Matched filtering (IV)

$$\left. \frac{S}{N} \right|_{out} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_1} df \right|^2}{N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{E}{N_0}$$

Obtained for

$$H(f) = G \cdot S^*(f)e^{-j2\pi ft_1}$$

$$h(t) = G \cdot s^*(t_1 - t)$$

$$N_{out} = N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = G^2 N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df = G^2 E_s N_0$$

$$|y(t_1)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft_1} df \right|^2 = G^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df \right|^2 = G^2 |E_s|^2$$

To maintain output noise power level equal to input use  
 - especially important in digital matched filter  
 implementation to use bit dynamics

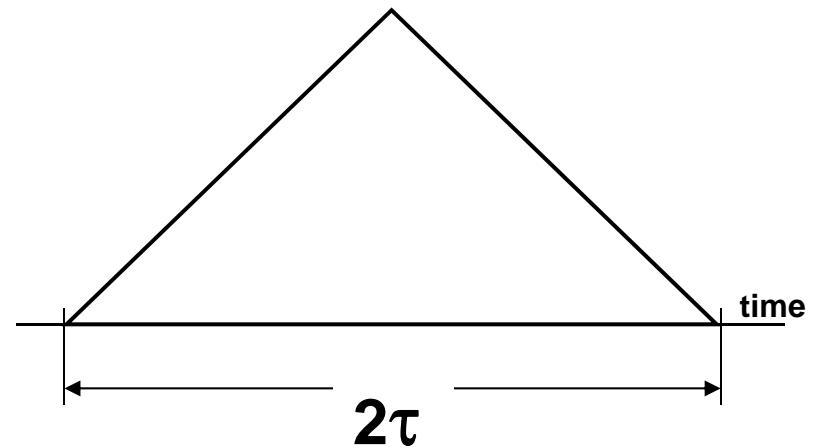
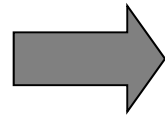
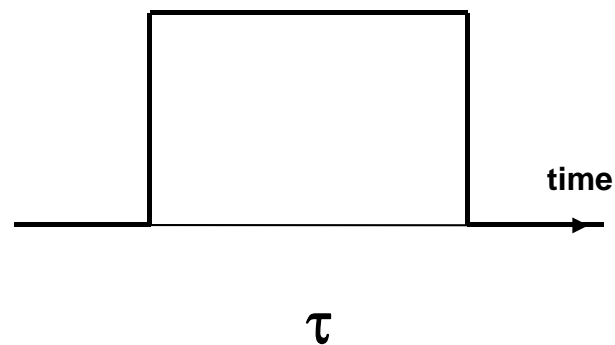
$$G^2 E_s = 1$$

$$\Rightarrow G = \sqrt{E_s}$$

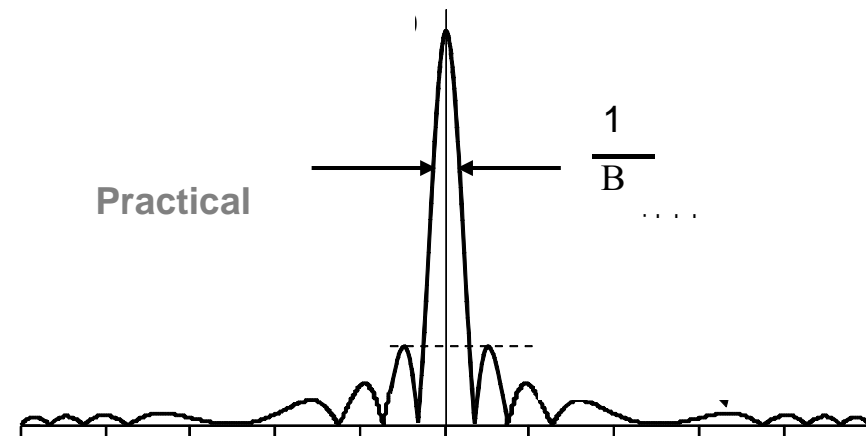
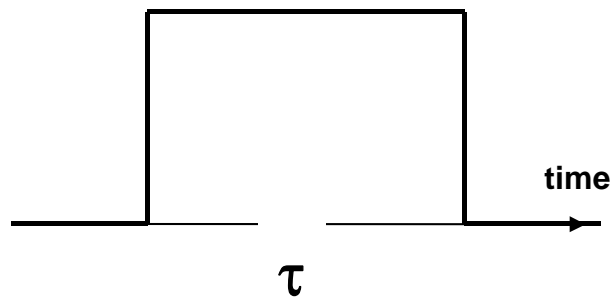


# Matched filtering (V)

Non-modulated Rectangular pulse:

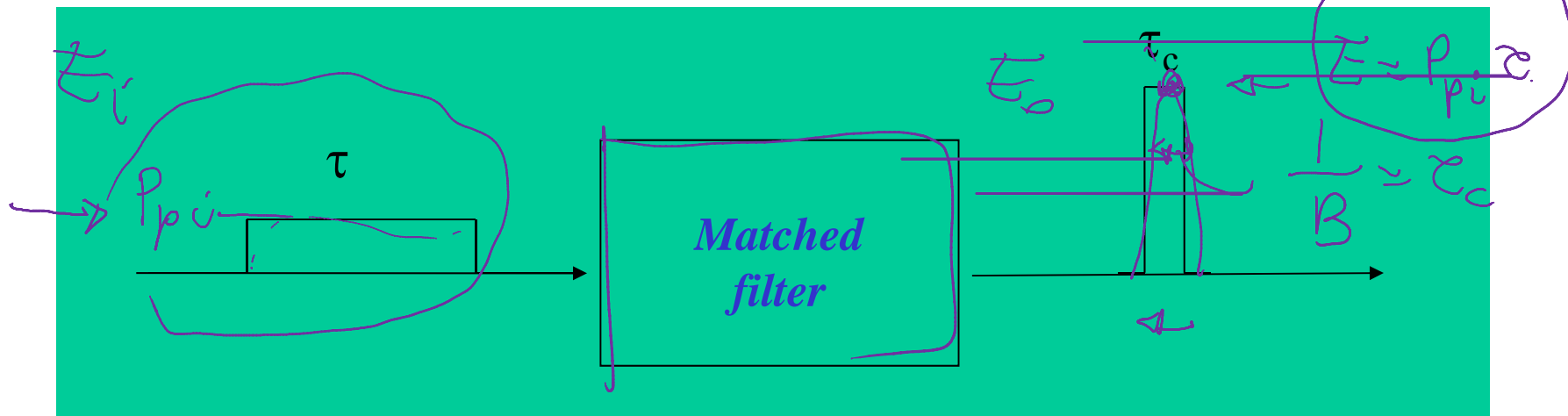


Phase-modulated rectangular pulse:  
With overall bandwidth  $B$



# Matched filtering (VI)

- We want to transmit a long pulse (length  $\tau$ ) to get energy on target
- But we want a short compressed output (length  $\tau_c \approx 1/B$ ) and larger amplitude:



Passive Filter  $\longrightarrow$  principle of energy conservation:

$$E_o = E_i \quad \longrightarrow$$

$$P_{po} \tau_c = P_{pi} \tau$$

$$P_{po} = P_{pi}$$

$$\tau \cdot B$$

$$\frac{\tau}{\tau_c}$$

# Matched filtering (VII)

---

Passive Filter

principle of energy conservation:

$$E_o = E_i \quad \longrightarrow \quad P_{po} \tau_c = P_{pi} \tau$$

$$P_{po} = P_{pi} \quad \tau / \tau_c = P_{pi} B \tau$$

Noise power level does not change

**Signal power improved with respect to noise power of**

$$\tau / \tau_c = P_{pi} B \tau$$

**COMPRESSION RATIO**

# Equazione Radar con compressione

*effetti del FA*

**Varie forme dell'Equazione Radar**

L'equazione radar, e di conseguenza l'espressione della portata, può essere particolarizzata in dipendenza delle applicazioni

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_r}{P_n} = \frac{P_t G A_e \sigma}{(4\pi R^2)^2 k T_0 B F L} B \tau = \frac{P_t G A_e \sigma \tau}{(4\pi R^2)^2 k T_0 F L}$$

1 Si suppose di aver fissato il massimo valore del guadagno d'antenna G (vincolo la larghezza del fascio e quindi la risoluzione angolare): utilizzando  $G=4\pi A_e/\lambda^2$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma \tau}{(4\pi)^3 R^4 k T_0 F L} \Rightarrow R_{\max} = \left[ \frac{P_t G^2 \lambda^2 \sigma \tau}{(4\pi)^3 k T_0 B F L (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

Preferibili le basse frequenze

2 Si suppose di aver fissato il massimo valore dell'area geometrica e quindi efficace d'antenna  $A_e$ : utilizzando  $A_e = \lambda^2 G / 4\pi$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{P_t A_e^2 \sigma \tau}{4\pi R^4 \lambda^2 k T_0 F L} \Rightarrow R_{\max} = \left[ \frac{P_t A_e^2 \sigma \tau}{4\pi \lambda^2 k T_0 F L (S/N)_{\min}} \right]^{1/4}$$

Preferibili le alte frequenze

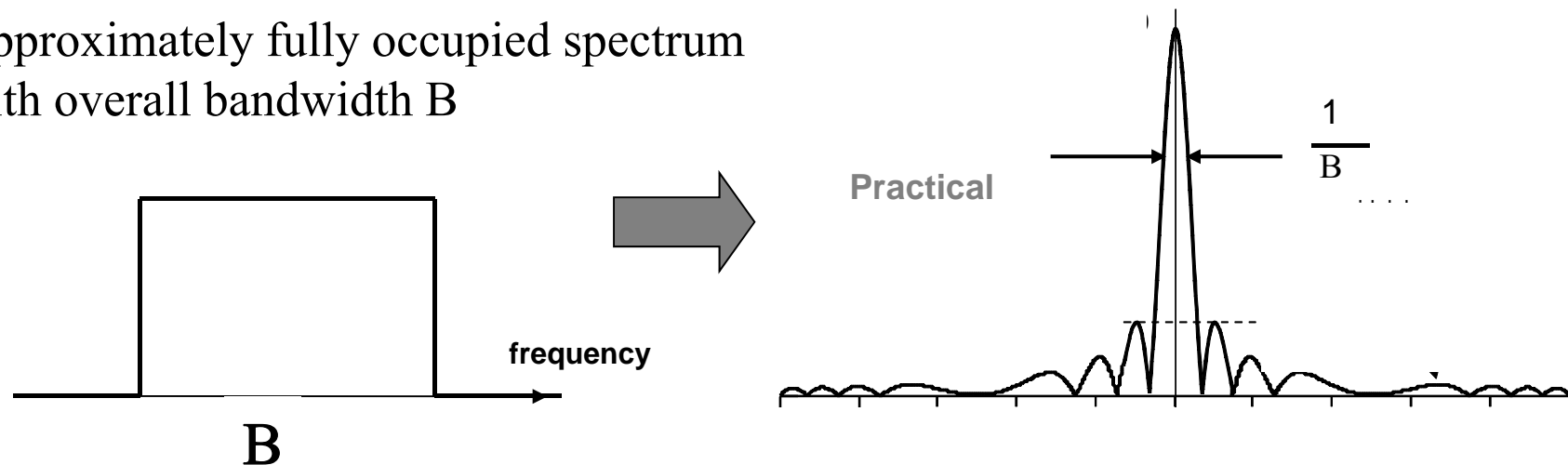
## Sistemi Radar

# Pulse compression yields Sidelobes

Output is signal autocorrelation:

$$|y(t)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)H(f)e^{j2\pi ft} df \right|^2 = G^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 e^{j2\pi f(t-t_1)} df \right|^2 = G^2 |R_{ss}(t-t_1)|^2$$

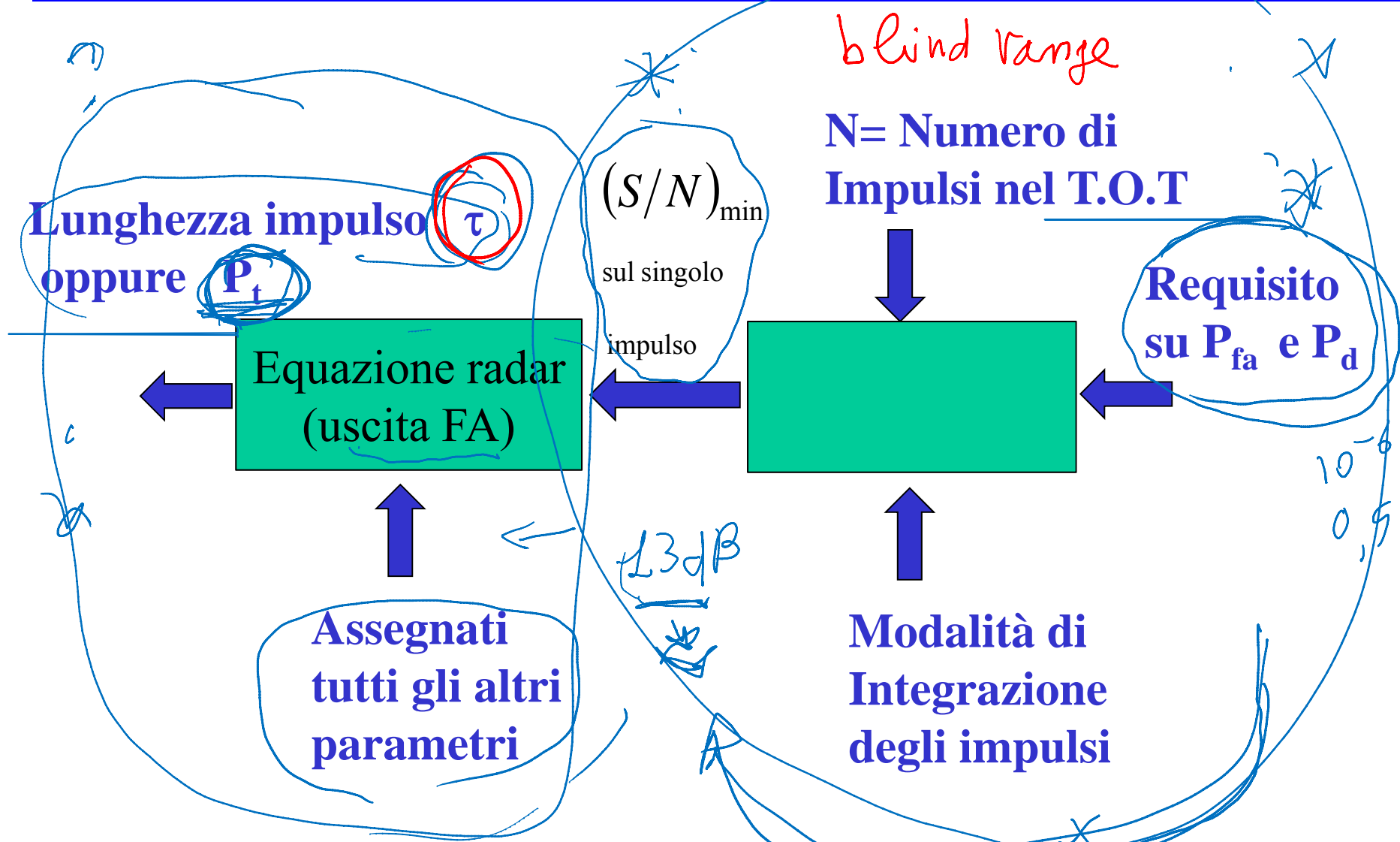
Approximately fully occupied spectrum  
with overall bandwidth B



**E' necessario un controllo dei lobi laterali: pesatura?**

# Schema tipico di dimensionamento

*Zona cieca!  $\frac{c\tau}{2}$*



# Esempio

---

