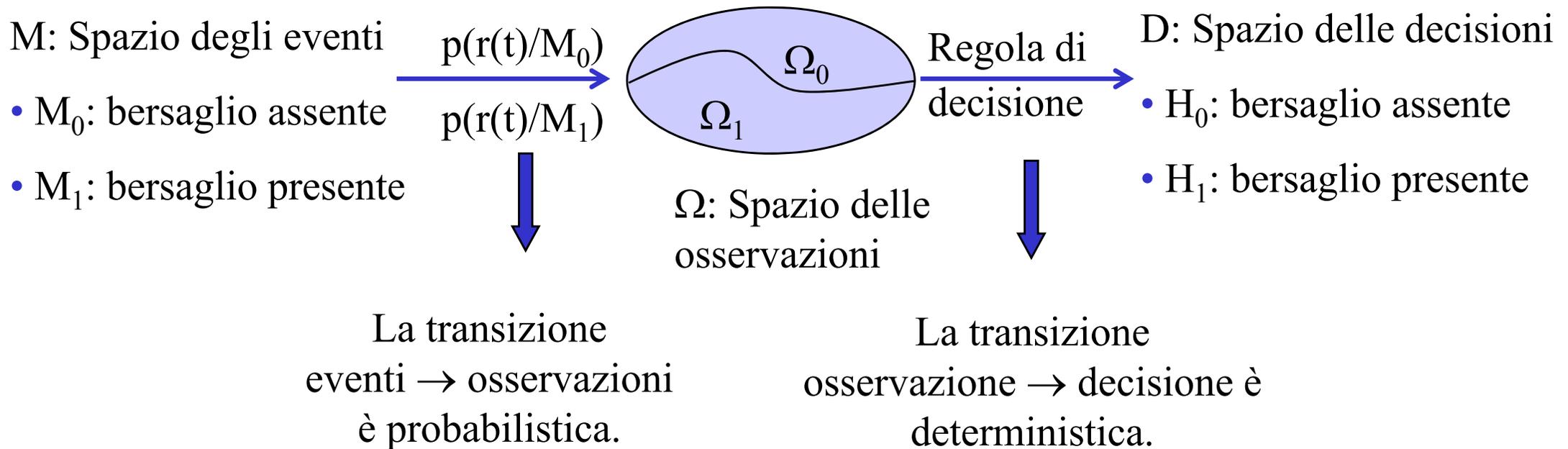

Rivelazione su singolo impulso

Teoria della decisione (I)

Sistema radar \Rightarrow esempio di decisione binaria: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- **bersaglio assente**: segnale ricevuto \equiv solo disturbo (\mathbf{H}_0);
- **bersaglio presente**: segnale ricevuto \equiv segnale utile più disturbo (\mathbf{H}_1);



Teoria della decisione (II)

Nella decisione radar si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi H_0 ma si decide per l'ipotesi $H_1 \Rightarrow$ il disturbo viene riconosciuto come bersaglio: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme (P_{fa}) è data da

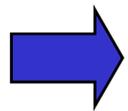
$$P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA'
DI FALSO
ALLARME**

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi H_1 ma si decide per l'ipotesi $H_0 \Rightarrow$ il bersaglio viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ($1-P_d$) è data da

$$1 - P_d = \int_{\Omega_0} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r}$$

**PROBABILITA' DI
MANCATA
RIVELAZIONE**



La partizione $\{\Omega_0, \Omega_1\}$ dello spazio delle osservazioni Ω dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione radar è il criterio di Neyman-Pearson.**

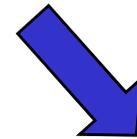
Sistemi Radar

Teoria della decisione (III)

Nel criterio di decisione di Neyman-Pearson la partizione è individuata in modo tale che:

- ▶ la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato ($P_{fa} = \alpha_0$) \Rightarrow **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;
- ▶ la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la **probabilità di rivelazione** (P_d max);

$$\left. \begin{array}{l} \{\Omega_0, \Omega_1\} \\ \text{tale che} \end{array} \right\} \begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_1) d\mathbf{r} \quad \textit{massima} \end{cases}$$



Problema di massimizzazione vincolata \Rightarrow problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

Teoria della decisione (IV)

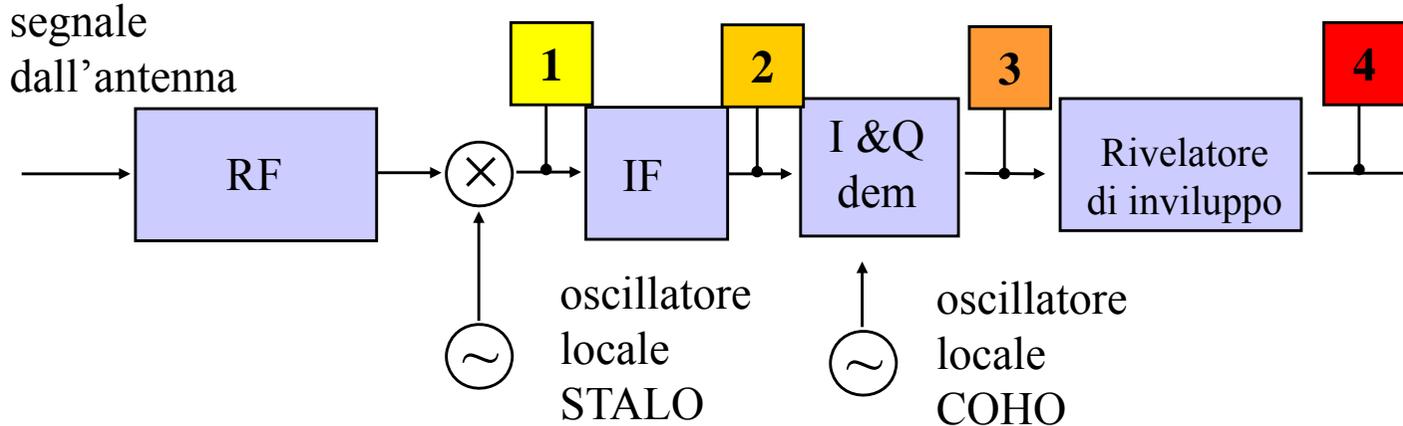
Regola di decisione secondo criterio Neyman-Pearson:

$$\Omega_1 = \left\{ \mathbf{r} : \frac{p(\mathbf{r} / M_1)}{p(\mathbf{r} / M_0)} \geq \lambda \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Accettata come vera ipotesi } H_1: \text{ bersaglio presente.}$$
$$\Omega_0 = \left\{ \mathbf{r} : \frac{p(\mathbf{r} / M_1)}{p(\mathbf{r} / M_0)} < \lambda \right\} \quad \Rightarrow \quad \text{Accettata come vera ipotesi } H_0: \text{ bersaglio assente.}$$

Il valore di soglia λ è fissato in modo che sia soddisfatto il vincolo $P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r} / M_0) d\mathbf{r} = \alpha_0$

Le probabilità di transizione $p(\mathbf{r}/M_0)$ e $p(\mathbf{r}/M_1)$ rappresentano la statistica del segnale ricevuto condizionata all'assenza o presenza del bersaglio \Rightarrow per specificare la struttura del decisore bisogna specificare le probabilità di transizione cioè la statistica del segnale ricevuto nelle due ipotesi.

Statistica segnale ricevuto (I)



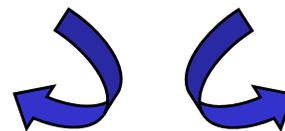
Il segnale in questo punto (segnale ricevuto filtrato e rivelato) definisce lo spazio delle osservazioni

- 1** Punto 1: ingresso filtro IF \Rightarrow sinusoide a frequenza f_{IF} e durata τ (componente utile: eco di ritorno da un bersaglio) più rumore gaussiano bianco con densità spettrale bilatera $N_0/2$ (disturbo);
- 2** Punto 2: uscita filtro IF \Rightarrow se filtro IF è un passabanda ideale centrato a f_{IF} e con larghezza di banda B tale da far passare inalterata la componente utile e limitare in banda il rumore si ha
- 3** Punto 3: uscita filtro I&Q Dem \Rightarrow due componenti: in fase (I) ed in quadratura (Q) contenenti sia componente di segnale che rumore termico

Segnale uscita filtro IF:

$$x_1(t) = s_I + n_{0I}(t)$$

$$y_1(t) = s_Q + n_{0Q}(t)$$



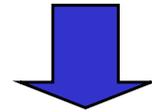
Statistica uscita filtro IF:

$$p_{x_1 y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[(x_1 - s_I)^2 + (y_1 - s_Q)^2]}$$

Statistica segnale ricevuto (II)

- 4** Punto 4: uscita rivelatore di involuppo \Rightarrow è il segnale ricevuto filtrato in modo da rigettare il rumore fuori banda e poi rivelato linearmente: a partire dall'osservazione di questo segnale bisogna decidere per la presenza o assenza di bersaglio

$$p_{x_1 y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}[(x_1 - s_I)^2 + (y_1 - s_Q)^2]} \quad \& \quad r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + y_1^2(t)}$$



- La statistica del segnale $r(t)$ in presenza di bersaglio ($A \neq 0 \Rightarrow$ ipotesi H_1) è data da: $A = \sqrt{s_I^2 + s_Q^2}$

$$p_r(r / M_1) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{(r^2 + A^2)}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) \quad r \geq 0$$

DENSITA' DI PROBABILITA' DI RICE

Funzione di Bessel modificata di ordine 0

- La statistica del segnale $r(t)$ in assenza di bersaglio ($A=0 \Rightarrow$ ipotesi H_0) è data da:

$$p_r(r / M_0) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \quad r \geq 0$$

DENSITA' DI PROBABILITA' DI RAYLEIGH

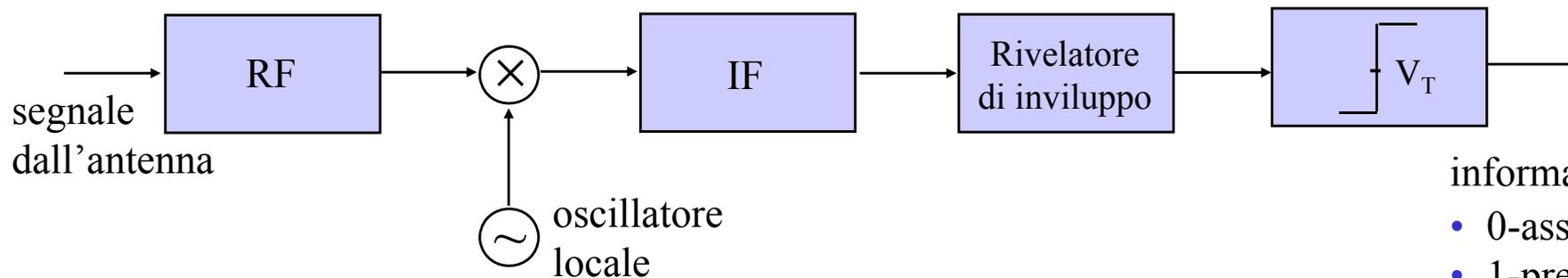
Rivelazione (I)

Nota la statistica del segnale ricevuto condizionata alla presenza/assenza del bersaglio
il decisore ottimo secondo Neyman-Pearson è dato da:

$$\frac{p(\mathbf{r} / M_1)}{p(\mathbf{r} / M_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \Rightarrow e^{-\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda \Rightarrow I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \lambda e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} \Rightarrow r \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} \frac{\sigma_n^2}{A} I_0^{-1}\left(\lambda e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{r \underset{H_0}{\overset{H_1}{>}} V_T} \text{ con } V_T = \frac{\sigma_n^2}{A} I_0^{-1}\left(\lambda e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}}\right)$$

Il decisore ottimo secondo Neyman-Pearson consiste nel confronto del segnale ricevuto r (segnale filtrato e rivelato linearmente) con una soglia V_T : il livello di soglia è fissato in modo da assicurare un livello di falso allarme costante e preassegnato.



- informazione quantizzata:
- 0-assenza bersaglio
 - 1-presenza bersaglio

Probabilità di falso allarme P_{fa}

$$P_{fa} = \int_{V_T}^{\infty} p_r(r / M_0) dr = \int_{V_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{V_T^2}{2\sigma_n^2}}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia V_T e dalla potenza del rumore σ_n^2 : fissato il valore di P_{fa} desiderata e nota la potenza di rumore σ_n^2 risulta individuato il livello di soglia V_T .



$$V_T = \sigma_n \sqrt{2 \ln \left(\frac{1}{P_{fa}} \right)}$$

Probabilità di rivelazione P_d

$$P_d = \int_{V_T}^{\infty} p_r(r / M_1) dr = \int_{V_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2 + A^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) dr \cong \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}} dr = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{V_T}{\sigma_n \sqrt{2}} - \sqrt{SNR}\right) \right]$$

Non ammette soluzione
in forma chiusa

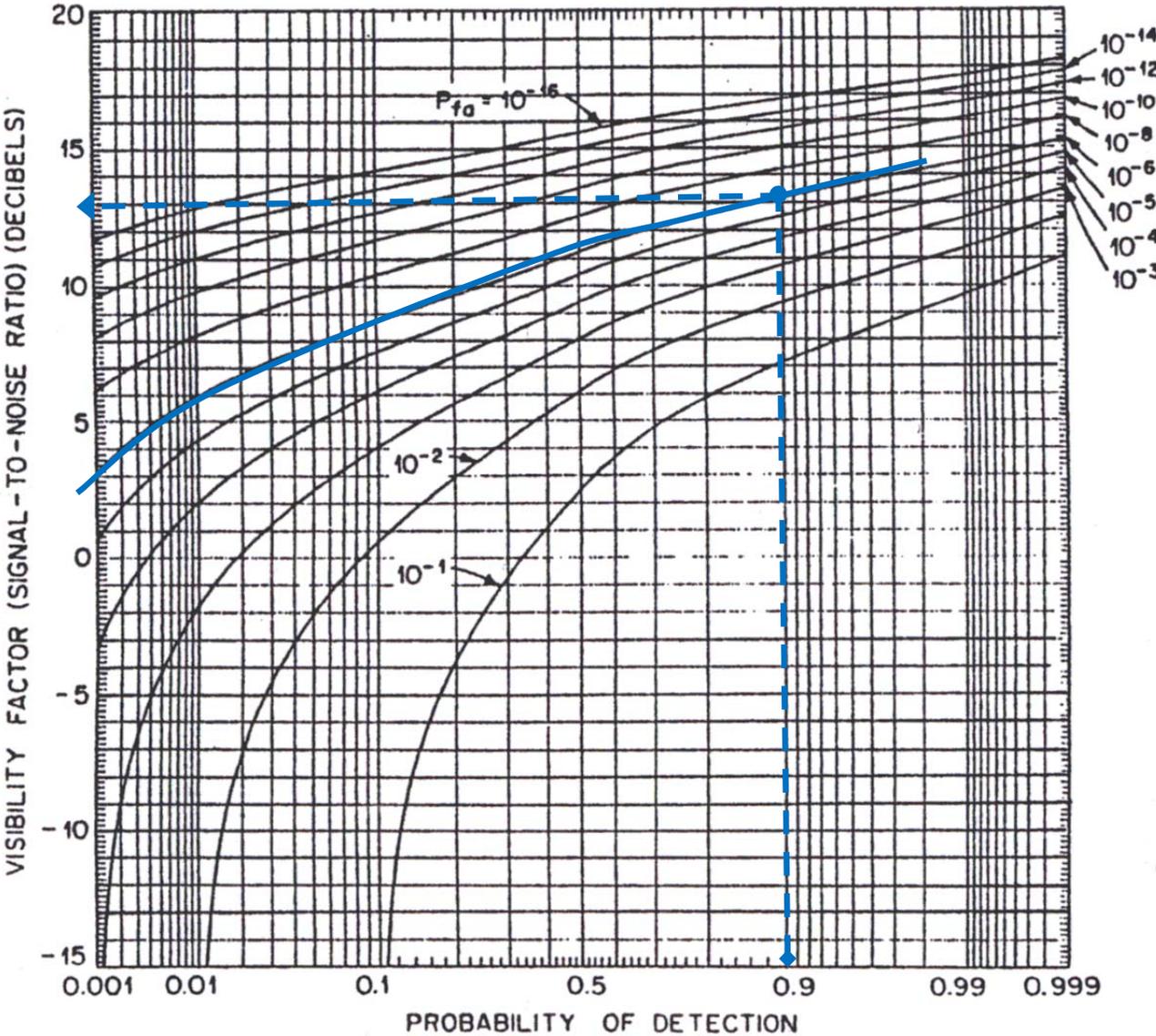
Approx
S/N alto

La probabilità di rivelazione
dipende dal rapporto fra la
soglia V_T e il valore rms di
rumore σ_n e dal rapporto
segnale a rumore SNR.

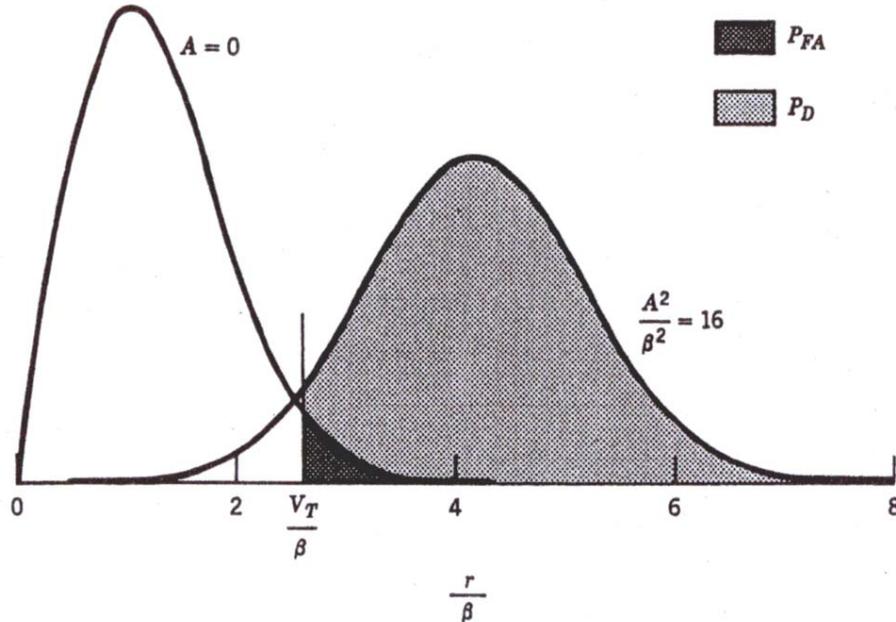
$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} \gg 1 \Rightarrow I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) \cong I_0\left(\frac{A^2}{\sigma_n^2}\right) \cong \left(2\pi \frac{A^2}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{A^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow p_r(r / M_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}}$$

SNR elevato \Rightarrow Rice \cong Gaussiana

Curve di Marcum



Ad es.: per $P_{fa}=10^{-6}$ e $P_d=0.9$
 \Rightarrow SNR=13 dB.



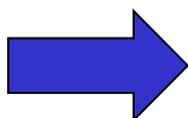
Richiamo DDP (I)

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2 \right\} \quad \begin{cases} z = |\tilde{z}| = \sqrt{z_I^2 + z_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{z} = \arctg(z_Q / z_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_I = z \cdot \cos \phi \\ z_Q = z \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$d\tilde{z} = dz_I dz_Q = z dz d\phi$$

$$p_{\tilde{z}}(\tilde{z} | H_0) d\tilde{z} = p_{z_I, z_Q}(z_I, z_Q | H_0) dz_I dz_Q = p_{z_I, z_Q}(z \cdot \cos \phi, z \cdot \sin \phi | H_0) \cdot z dz d\phi = p_{z, \phi}(z, \phi | H_0) dz d\phi$$

$$p_{z, \phi}(z, \phi | H_0) = p_{z_I, z_Q}(z \cdot \cos \phi, z \cdot \sin \phi | H_0) \cdot z$$



$$p_{z, \phi}(z, \phi | H_0) = \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} z^2 \right\}$$

$$p_z(z | H_0) = \int_0^{2\pi} p_{z, \phi}(z, \phi | H_0) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} z^2 \right\} d\phi = \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

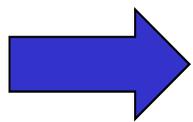
Richiamo DDP (II)

$$p_{\tilde{z}}(\tilde{z}|a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z} - a \cdot \chi(\tau, \nu)|^2 \right\} \quad \begin{cases} z = |\tilde{z}| = \sqrt{z_I^2 + z_Q^2} \\ \phi = \angle \tilde{z} = \text{arctg}(z_Q / z_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_I = z \cdot \cos \phi \\ z_Q = z \cdot \sin \phi \end{cases}$$

$$d\tilde{z} = dz_I dz_Q = z dz d\phi$$

$$p_{\tilde{z}}(\tilde{z}|a; H_1) d\tilde{z} = p_{z_I, z_Q}(z_I, z_Q|a; H_1) dz_I dz_Q = p_{z_I, z_Q}(z \cdot \cos \phi, z \cdot \sin \phi|a; H_1) \cdot z dz d\phi = p_{z, \phi}(z, \phi|a; H_1) dz d\phi$$

$$p_{z, \phi}(z, \phi|a; H_1) = p_{z_I, z_Q}(z \cdot \cos \phi, z \cdot \sin \phi|a; H_1) \cdot z$$



$$\begin{aligned} p_{z, \phi}(z, \phi|a; H_1) &= \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} |z \cdot \cos \phi + j z \cdot \sin \phi - a \cdot \chi(\tau, \nu)|^2 \right\} = \\ &= \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[z^2 + |a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2 - 2|a| \cdot |\chi(\tau, \nu)| \cdot \cos(\phi - \angle a - \angle \chi(\tau, \nu)) \right] \right\} \end{aligned}$$

Richiamo DDP (III)

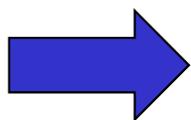
$$p_{z,\phi}(z, \phi | a; H_1) = \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[z^2 + |a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2 - 2|a| \cdot |\chi(\tau, \nu)| \cdot \cos(\phi - \angle a - \angle \chi(\tau, \nu)) \right] \right\}$$

$$p_z(z | a; H_1) = \int_0^{2\pi} p_{z,\phi}(z, \phi | a; H_1) d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{z}{\pi \sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{1}{\sigma_d^2} \left[z^2 + |a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2 - 2|a| \cdot |\chi(\tau, \nu)| \cdot \cos(\phi - \angle a - \angle \chi(\tau, \nu)) \right] \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{z^2 + |a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ \frac{2z|a| \cdot |\chi(\tau, \nu)|}{\sigma_d^2} \cdot \cos(\phi - \angle a - \angle \chi(\tau, \nu)) \right\} d\phi =$$

$$= \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{z^2 + |a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[\frac{2z|a| \cdot |\chi(\tau, \nu)|}{\sigma_d^2} \right]$$

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos(t)} dt \quad \left(= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \cos(t)} dt \right)$$



$$p_z(z | \sigma; H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp \left\{ -\frac{z^2 + \sigma \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2} \right\} \cdot I_0 \left[\frac{2z \sqrt{\sigma} \cdot |\chi(\tau, \nu)|}{\sigma_d^2} \right] \quad \sigma = |a|^2$$

Richiamo DDP (IV)

$$p_z(z|a;H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2} + SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{z}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

$$SNR = \frac{|a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2}$$

$$\text{Prob}\{z > T | H_0\} = \int_T^\infty p_z(z | H_0) dz = \int_T^\infty \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}} dz = \int_{T^2/\sigma_d^2}^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^\infty = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Prob}\{z > T | \sigma; H_1\} &= \text{Prob}\{z > T | \sigma; H_1\} = \int_T^\infty p_z(z | \sigma; H_1) dz = \\ &= \int_T^\infty \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\} \cdot I_0\left[2\frac{z}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right] dz = \\ &= \int_{T/\sigma_d}^\infty 2t \exp\{-t^2 - SNR\} \cdot I_0\left[2t\sqrt{SNR}\right] dt \end{aligned}$$

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 ($a=0$) ho un Falso Allarme se

$$z = |\tilde{z}| = |d_f(t)| > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p_z(z | H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2} e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

$$P_{fa} = \text{Prob}\{z > T | H_0\} = \int_T^\infty p_z(z | H_0) dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

Probabilità di Rivelazione – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_1 ($a \neq 0$) ho una rivelazione se $z = |\tilde{z}| = |d_f(t) + a \cdot \chi(\tau, \nu)| > T$

Ora c'è un valor medio (valore complesso) pari ad "a" volte il valore della funzione di ambiguità

$$p(\tilde{z} | H_0) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z}|^2\right\} \quad \longrightarrow \quad p(\tilde{z} | a; H_1) = \frac{1}{\pi \sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2} |\tilde{z} - a \cdot \chi(\tau, \nu)|^2\right\}$$

$$p_z(z | \sigma; H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{z^2 + \sigma \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2}\right\} \cdot I_0\left[\frac{2z \sqrt{\sigma} \cdot |\chi(\tau, \nu)|}{\sigma_d^2}\right] \quad \text{SNR} = \frac{|a|^2 \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma \cdot |\chi(\tau, \nu)|^2}{\sigma_d^2}$$

$$p_z(z | \text{SNR}; H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2} \exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2} - \text{SNR}\right\} \cdot I_0\left[2 \frac{z}{\sigma_d} \sqrt{\text{SNR}}\right]$$

$$P_d(\text{SNR}) = \text{Prob}\{z > T | \sigma; H_1\} = \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t \exp\{-t^2 - \text{SNR}\} \cdot I_0[2t \sqrt{\text{SNR}}] dt$$