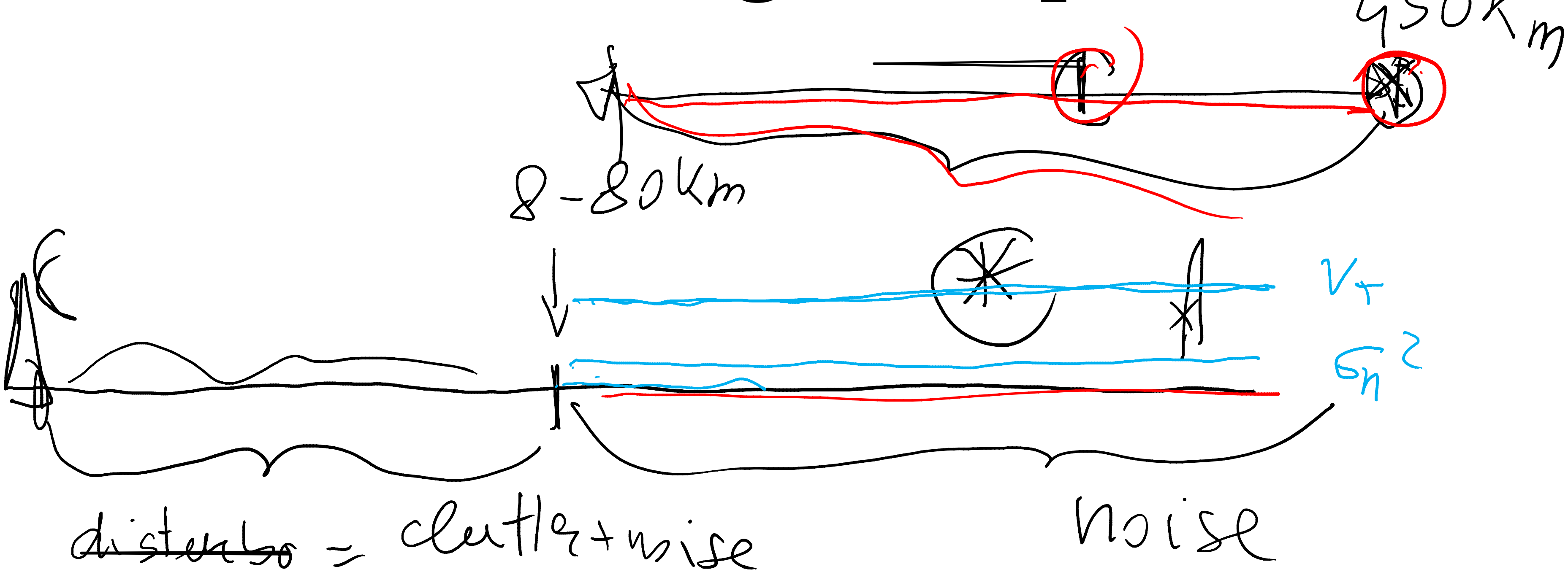
Rivelazione su singolo impulso



Teoria della decisione (I)

Sistema radar $\Rightarrow$ esempio di **<u>decisione binaria</u>**: il radar deve decidere tra **due ipotesi**:

- **bersaglio assente**: segnale ricevuto $\equiv$ solo disturbo ($\mathbf{H_0}$);
- **bersaglio presente**: segnale ricevuto $\equiv$ segnale utile più disturbo ($\mathbf{H_1}$);

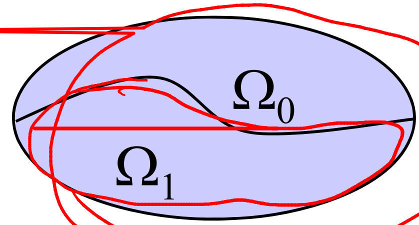
M: Spazio degli eventi

- M_0: bersaglio assente
- M_1: bersaglio presente

r(t)

$p(r(t)/M_0)$ $\longrightarrow$

$p(r(t)/M_1)$



Ω: Spazio delle osservazioni

Regola di decisione $\longrightarrow$

D: Spazio delle decisioni

- H_0: bersaglio assente
- H_1: bersaglio presente

La transizione eventi $\rightarrow$ osservazioni è probabilistica.

La transizione osservazione $\rightarrow$ decisione è deterministica.

Teoria della decisione (II)

Nella decisione radar si possono commettere due diversi tipi di errore:

- errore di **falso allarme**: è vera l'ipotesi H_0 ma si decide per l'ipotesi H_1 $\Rightarrow$ il disturbo viene riconosciuto come bersaglio: fissata la regola di decisione la probabilità di falso allarme (P_{fa}) è data da

$$\boxed{P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r}/M_0)d\mathbf{r}}$$

PROBABILITA' DI FALSO ALLARME

- errore di **mancata rivelazione**: è vera l'ipotesi H_1 ma si decide per l'ipotesi H_0 $\Rightarrow$ il bersaglio viene riconosciuto come disturbo: fissata la regola di decisione la probabilità di mancata rivelazione ($1\text{-}P_d$) è data da

$$\boxed{1 - P_d = \int_{\Omega_0} p(\mathbf{r}/M_1)d\mathbf{r}}$$

PROBABILITA' DI MANCATA RIVELAZIONE

La partizione $\{\Omega_0, \Omega_1\}$ dello spazio delle osservazioni Ω dipende dal criterio di decisione adottato: **il criterio di decisione radar è il criterio di Neyman-Pearson**.

Teoria della decisione (III)

Nel criterio di decisione di Neyman-Pearson la partizione è individuata in modo tale che:

- **la probabilità di falso allarme sia pari ad un valore costante preassegnato** ($P_{fa}=\alpha_0$) $\Rightarrow$ **condizione CFAR: Constant False Alarm Rate**;

- **la probabilità di mancata rivelazione sia minimizzata ovvero sia massimizzata la probabilità di rivelazione** (P_d max);

$\{\Omega_0, \Omega_1\}$ tale che

$$\begin{cases} P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r}/M_0)d\mathbf{r} = \alpha_0 \\ P_d = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r}/M_1)d\mathbf{r} \quad massima \end{cases}$$

Problema di massimizzazione vincolata $\Rightarrow$ problema risolvibile con i moltiplicatori di Lagrange.

Teoria della decisione (IV)

<u>Regola di decisione secondo criterio Neyman-Pearson</u>:

$$\Omega_1 = \left\{ \mathbf{r} : \frac{p(\mathbf{r}/M_1)}{p(\mathbf{r}/M_0)} \geq \lambda \right\} \Rightarrow$$ Accettata come vera ipotesi H_1: bersaglio presente.

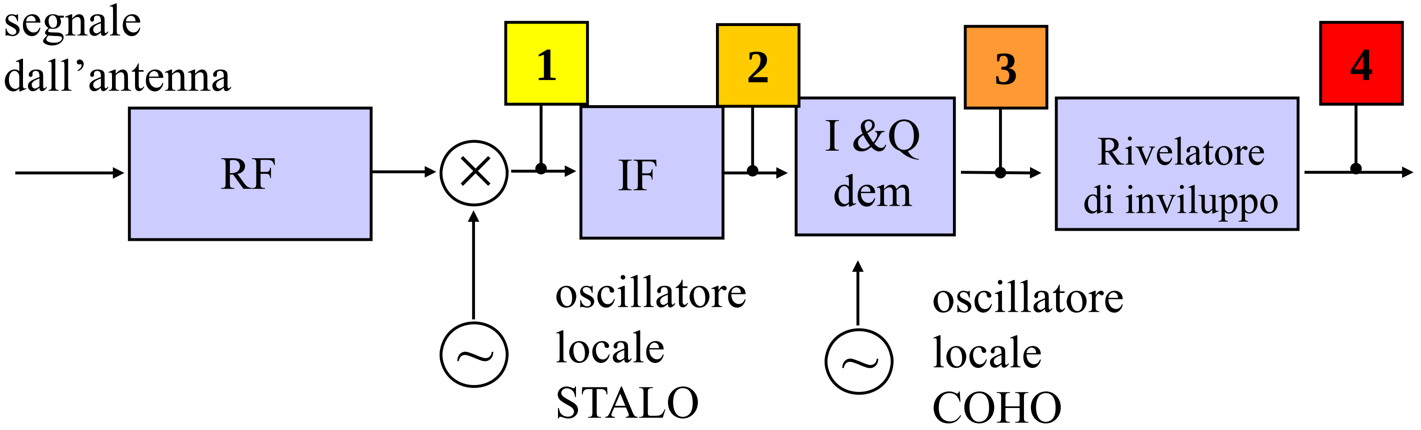
$$\Omega_0 = \left\{ \mathbf{r} : \frac{p(\mathbf{r}/M_1)}{p(\mathbf{r}/M_0)} < \lambda \right\} \Rightarrow$$ Accettata come vera ipotesi H_0: bersaglio assente.

Il valore di soglia λ è fissato in modo che sia soddisfatto il vincolo

$$P_{fa} = \int_{\Omega_1} p(\mathbf{r}/M_0)\, d\mathbf{r} = \alpha_0$$

Le probabilità di transizione p($\mathbf{r}/M_0$) e p($\mathbf{r}/M_1$) rappresentano la statistica del segnale ricevuto condizionata all'assenza o presenza del bersaglio ⇒ per specificare la struttura del decisore bisogna specificare le probabilità di transizione cioè la statistica del segnale ricevuto nelle due ipotesi.

Statistica segnale ricevuto (I)



Il segnale in questo punto (segnale ricevuto filtrato e rivelato) definisce lo spazio delle osservazioni

1 Punto **1**: ingresso filtro IF ⇒ sinusoide a frequenza f_{IF} e durata τ (componente utile: eco di ritorno da un bersaglio) più rumore gaussiano bianco con densità spettrale bilatera $N_0/2$ (disturbo);

2 Punto **2**: uscita filtro IF ⇒ se filtro IF è un passabanda ideale centrato a f_{IF} e con larghezza di banda B tale da far passare inalterata la componente utile e limitare in banda il rumore si ha

3 Punto **3**: uscita filtro I&Q Dem⇒ due componenti: in fase (I) ed in quadratura (Q) contenenti sia componente di segnale che rumore termico

Segnale uscita filtro IF:

$$x_1(t) = s_I + n_{0I}(t)$$

$$y_1(t) = s_Q + n_{0Q}(t)$$

Statistica uscita filtro IF:

$$p_{x_1 y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[(x_1 - s_I)^2 + (y_1 - s_Q)^2\right]}$$

Statistica segnale ricevuto (II)

4 Punto **4**: uscita rivelatore di inviluppo ⇒ è il segnale ricevuto filtrato in modo da rigettare il rumore fuori banda e poi rivelato linearmente: a partire dall'osservazione di questo segnale bisogna decidere per la presenza o assenza di bersaglio

$$p_{x_1 y_1}(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{1}{2\sigma_n^2}\left[(x_1 - s_I)^2 + (y_1 - s_Q)^2\right]} \quad \& \quad r(t) = \sqrt{x_1^2(t) + y_1^2(t)}$$

⇓

- La statistica del segnale r(t) in presenza di bersaglio (A≠0 ⇒ ipotesi H_1) è data da: $A = \sqrt{s_I^2 + s_Q^2}$

$$\boxed{p_r(r/M_1) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{(r^2 + A^2)}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) \quad r \geq 0}$$

DENSITA' DI PROBABILITA' DI RICE

Funzione di Bessel modificata di ordine 0

- La statistica del segnale r(t) in assenza di bersaglio (A=0 ⇒ ipotesi H_0) è data da:

$$\boxed{p_r(r/M_0) = \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} \quad r \geq 0}$$

DENSITA' DI PROBABILITA' DI RAYLEIGH

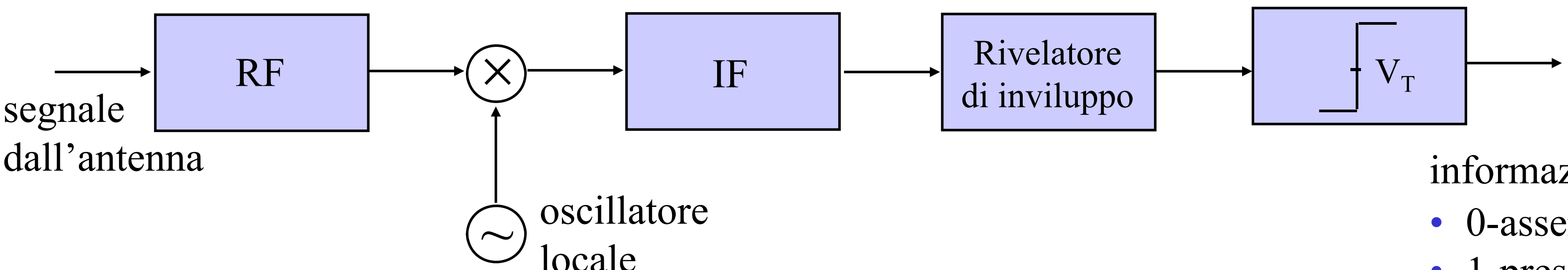
Rivelazione (I)

Nota la statistica del segnale ricevuto condizionata alla presenza/assenza del bersaglio il decisore ottimo secondo Neyman-Pearson è dato da:

$$\frac{p(\mathbf{r}/M_1)}{p(\mathbf{r}/M_0)} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda \;\Rightarrow\; e^{-\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda \;\Rightarrow\; I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_n^2}\right) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \lambda\; e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}} \;\Rightarrow\; r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma_n^2}{A} I_0^{-1}\left(\lambda\; e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}}\right) \;\Rightarrow$$

$$\boxed{r \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} V_T} \quad con \quad V_T = \frac{\sigma_n^2}{A} I_0^{-1}\left(\lambda\; e^{\frac{A^2}{2\sigma_n^2}}\right)$$

Il decisore ottimo secondo Neyman-Pearson consiste nel confronto del segnale ricevuto r (segnale filtrato e rivelato linearmente) con una soglia V_T: il livello di soglia è fissato in modo da assicurare un livello di falso allarme costante e preassegnato.



informazione quantizzata:
- 0-assenza bersaglio
- 1-presenza bersaglio

Probabilità di falso allarme P_{fa}

$$P_{fa} = \int_{V_T}^{\infty} p_r(r/M_0)dr = \int_{V_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_n^2}} dr = e^{-\frac{V_T^2}{2\sigma_n^2}}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T}{\sigma_n}\right)^2}$$

Il livello di falso allarme dipende dalla soglia V_T e dalla potenza del rumore σ_n^2: fissato il valore di P_{fa} desiderata e nota la potenza di rumore σ_n^2 risulta individuato il livello di soglia V_T.

$$\frac{V_T^2}{\sigma_n^2} = 8 \ln 20$$

$$V_T = \sigma_n \sqrt{2 \ln\left(\frac{1}{P_{fa}}\right)}$$

$$\frac{V_T^2}{\sigma_n^2} = 2 \ln(1/P_{fa})$$

$$\frac{V_T}{\sigma_n} = \sqrt{2 \ln(1/P_{fa})}$$

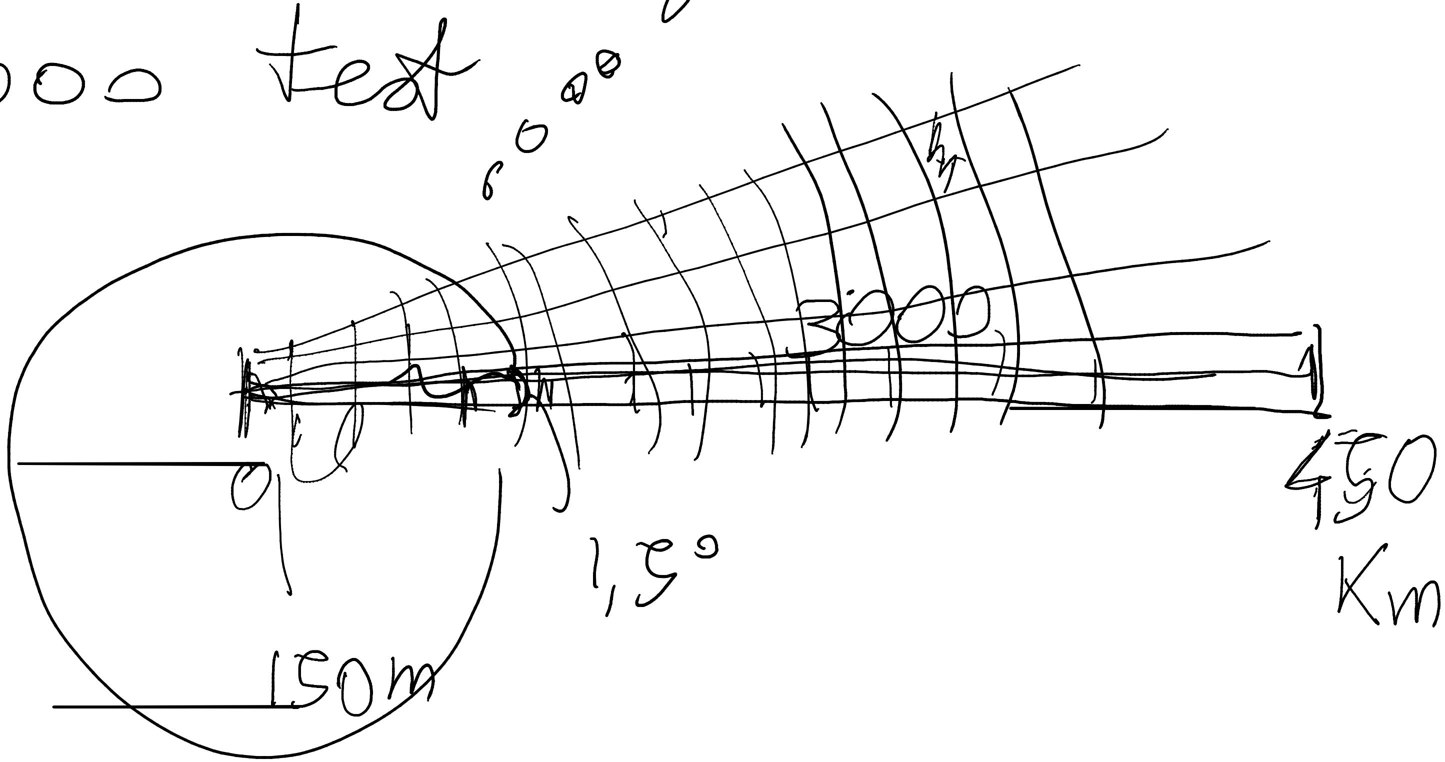
$$\frac{360}{1,5} = \frac{2 \cdot \cancel{360}^{\,120}}{\cancel{3}} = 240$$

$240 \cdot 3000$ feet

$720'000$

$$\frac{72}{720'000} = P_{fa}$$

$$\| \quad 10^{-4}$$



$$e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r^2}{\sigma_n^2}+\frac{A^2}{\sigma_n^2}\right)} \qquad \frac{r}{\sigma_n}\cdot\frac{A}{\sigma_n}$$

$$P_d = \int^{\infty} \frac{r}{\sigma_n} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) d\frac{r}{\sigma_n}$$

V_T

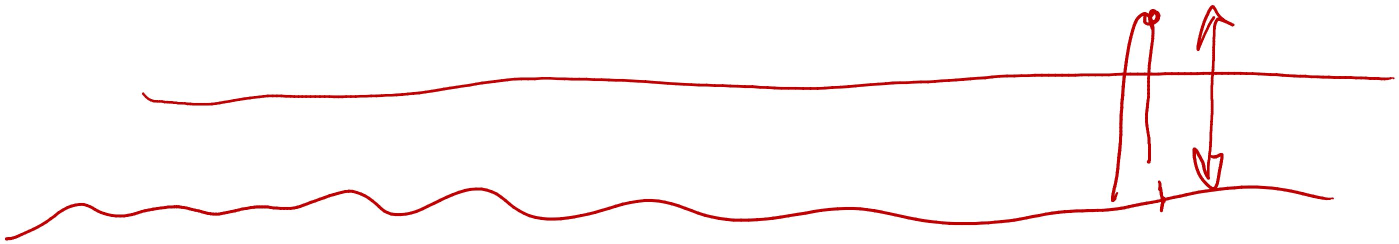
$$P_d = \int^{\infty} t\, e^{-\frac{1}{2}(t^2+SNR)} I_0\left(t\sqrt{SNR}\right) dt$$

$$t = \frac{r}{\sigma_n}$$

$$\frac{A^2}{\sigma_n^2} = SNR$$

$$\frac{V_T}{\sigma_n} = \sqrt{2\ln(1/p_{fa})}$$

$$P_d = f(V_T, \sigma_n, A) = f\left(SNR, \frac{V_T}{\sigma_n}\right)$$

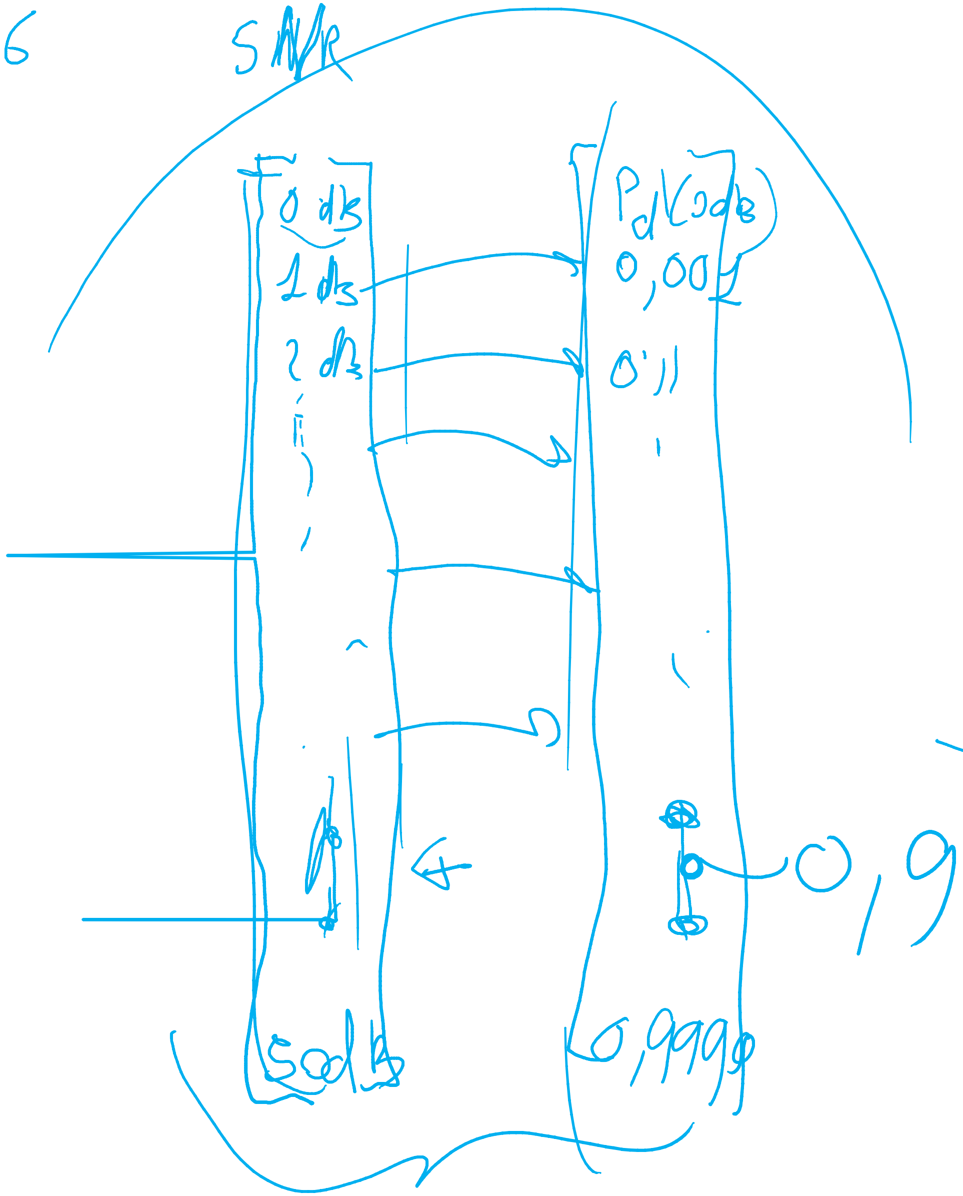


$$P_d = P_d\left(SNR, \frac{V_T}{\sigma_n}\right)$$

$$P_{fa} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{V_T}{\sigma_n}\right)^2} \longleftrightarrow \frac{V_T}{\sigma_n} = \sqrt{2\ln\left(1/P_{fa}\right)}$$

$$P_d = P_d\left(\underline{SNR}, \sqrt{2\ln\left(1/P_{fa}\right)}\right)$$

$P_{fa} = 10^{-6}$



interp1( )

Probabilità di rivelazione P_d

$\sqrt{S_I^2 + S_Q^2}$

$$P_d = \int_{V_T}^{\infty} p_r(r/M_1)dr = \boxed{\int_{V_T}^{\infty} \frac{r}{\sigma_n^2} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma_n^2}} I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right)dr} \cong \int_{V_T}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_n^2} e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}} dr \cancel{= \frac{1}{2}\left[1 - erf\left(\frac{V_T}{\sigma_n\sqrt{2}} - \sqrt{SNR}\right)\right]}$$

Ω_1

Non ammette soluzione in forma chiusa

Marcum

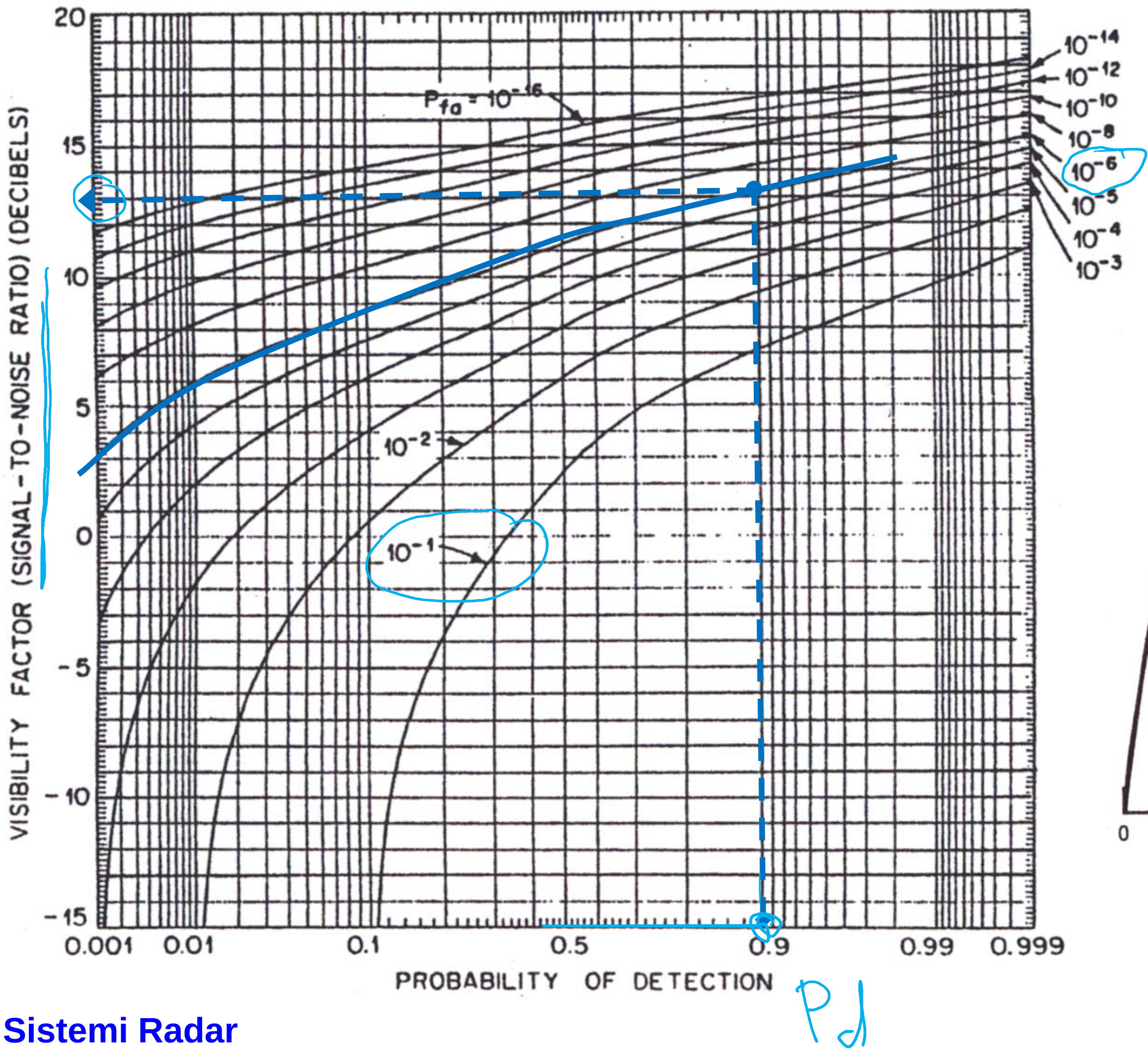
Approx S/N alto

La probabilità di rivelazione dipende dal rapporto fra la soglia V_T e il valore rms di rumore σ_n e dal rapporto segnale a rumore SNR.

$$SNR = \frac{A^2}{2\sigma_n^2} >> 1 \Rightarrow I_0\left(\frac{rA}{\sigma_n^2}\right) \cong I_0\left(\frac{A^2}{\sigma_n^2}\right) \cong \left(2\pi\frac{A^2}{\sigma_n^2}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{A^2}{\sigma_n^2}} \Rightarrow p_r(r/M_1) \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_n^2}}$$

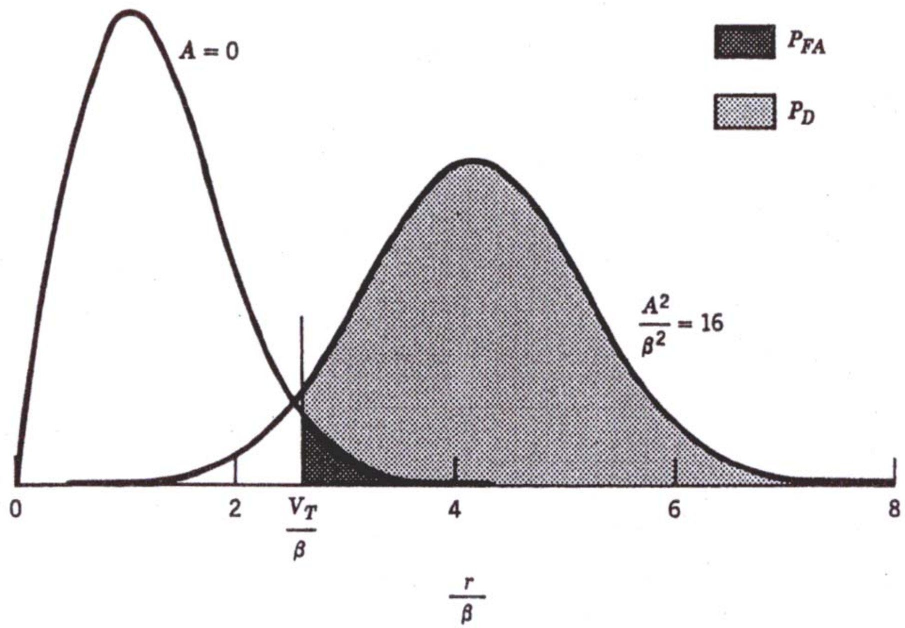
SNR elevato $\Rightarrow$ Rice $\cong$ Gaussiana

Curve di Marcum



Ad es.: per $P_{fa}=10^{-6}$ e $P_d=0.9$

$\Rightarrow$ SNR=13 dB.



Richiamo DDP (I)

$$p(\tilde{z}\,|\,H_0) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}|\,\tilde{z}\,|^2\right\}$$

$$\begin{cases} z = |\,\tilde{z}\,| = \sqrt{z_I^2 + z_Q^2} \\ \phi = \angle\tilde{z} = arctg(z_Q / z_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_I = z\cdot\cos\phi \\ z_Q = z\cdot\sin\phi \end{cases}$$

$$d\tilde{z} = dz_I\,dz_Q = z\,dz\,d\phi$$

$$p_{\tilde{z}}(\tilde{z}\,|H_0)\,d\tilde{z} = p_{z_I,z_Q}(z_I, z_Q\,|H_0)\;dz_I\;dz_Q = p_{z_I,z_Q}(z\cdot\cos\phi, z\cdot\sin\phi|H_0)\cdot z\,dz\,d\phi = p_{z,\phi}(z,\phi|H_0)\;dz\,d\phi$$

$$p_{z,\phi}(z,\phi|H_0) = p_{z_I,z_Q}(z\cdot\cos\phi, z\cdot\sin\phi|H_0)\cdot z$$

$$p_{z,\phi}(z,\phi|H_0) = \frac{z}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}z^2\right\}$$

$$p_z(z|\,H_0) = \int_0^{2\pi} p_{z,\phi}(z,\phi|H_0)\;d\phi = \int_0^{2\pi}\frac{z}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}z^2\right\}d\phi = \frac{2z}{\sigma_d^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

Richiamo DDP (II)

$$p(\tilde{z}\,|\,a;\,H_1) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|\,\tilde{z} - a\cdot\chi(\tau,\nu)\right|^2\right\}$$

$$\begin{cases} z = |\,\tilde{z}\,| = \sqrt{z_I^2 + z_Q^2} \\ \phi = \angle\tilde{z} = arctg(z_Q / z_I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_I = z\cdot\cos\phi \\ z_Q = z\cdot\sin\phi \end{cases}$$

$$d\tilde{z} = dz_I\,dz_Q = z\,dz\,d\phi$$

$$p_{\tilde{z}}(\tilde{z}\,|\,a;\,H_1)\,d\tilde{z} = p_{z_I,z_Q}(z_I, z_Q\,|\,a;\,H_1)\;dz_I\;dz_Q = p_{z_I,z_Q}(z\cdot\cos\phi, z\cdot\sin\phi|a;\,H_1)\cdot z\,dz\,d\phi = p_{z,\phi}(z,\phi|a;H_1)\;dz\,d\phi$$

$$p_{z,\phi}(z,\phi|a;H_1) = p_{z_I,z_Q}(z\cdot\cos\phi, z\cdot\sin\phi|a;H_1)\cdot z$$

$$p_{z,\phi}(z,\phi|a;\,H_1) = \frac{z}{\pi\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|z\cdot\cos\phi + j\;z\cdot\sin\phi - a\cdot\chi(\tau,\nu)\right|^2\right\} =$$

$$= \frac{z}{\pi\sigma_d^2}\,\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\Big[z^2 + |a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2 - 2|a|\cdot|\chi(\tau,\nu)|\cdot\cos\big(\phi - \angle a - \angle\chi(\tau,\nu)\big)\Big]\right\}$$

Richiamo DDP (III)

$$p_{z,\phi}(z,\phi|a;\,H_1)=\frac{z}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left[z^2+|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2-2|a|\cdot|\chi(\tau,\nu)|\cdot\cos(\phi-\angle a-\angle\chi(\tau,\nu))\right]\right\}$$

$$p_z(z\,|a;H_1)=\int_0^{2\pi}p_{z,\phi}(z,\phi|a;\,H_1)\,d\phi=\int_0^{2\pi}\frac{z}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left[z^2+|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2-2|a|\cdot|\chi(\tau,\nu)|\cdot\cos(\phi-\angle a-\angle\chi(\tau,\nu))\right]\right\}d\phi=$$

$$=\frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2+|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\exp\left\{\frac{2z\,|a|\cdot|\chi(\tau,\nu)|}{\sigma_d^2}\cdot\cos(\phi-\angle a-\angle\chi(\tau,\nu))\right\}d\phi=$$

$$=\frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2+|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2z\,|a|\cdot|\chi(\tau,\nu)|}{\sigma_d^2}\right]$$

$$I_0(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{x\cos(t)}\,dt\quad\left(=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{x\cos(t)}\,dt\right)$$

$\Rightarrow$

$$p_z(z\,|\sigma;H_1)=\frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2+\sigma\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2z\,\sqrt{\sigma}\cdot|\chi(\tau,\nu)|}{\sigma_d^2}\right]\qquad\sigma=|a|^2$$

Richiamo DDP (IV)

$$p_z(z\,|\,a;H_1)=\frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}+SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{z}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

$$SNR=\frac{|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}=\frac{\sigma\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}$$

$$\Pr ob\{z>T\,|\,H_0\}=\int_T^\infty p_z(z\,|\,H_0)\,dz=\int_T^\infty \frac{2z}{\sigma_d^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}\,dz=\int_{T^2/\sigma_d^2}^\infty e^{-t}\,dt=\left[-e^{-t}\right]_{T^2/\sigma_d^2}^\infty=e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\Pr ob\{z>T\,|\,\sigma;\,H_1\}=\Pr ob\{z>T\,|\,\sigma;\,H_1\}=\int_T^\infty p_z(z\,|\,\sigma;\,H_1)\,dz=$$

$$=\int_T^\infty \frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}-SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{z}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]dz=$$

$$=\int_{T/\sigma_d}^\infty 2t\,\exp\left\{-t^2-SNR\right\}\cdot I_0\left[2\,t\sqrt{SNR}\right]dt$$

Probabilità di falso allarme – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H_0 (a=0) ho un Falso Allarme se

$$z = \left|\tilde{z}\right| = \left|d_f(t)\right| > T$$

Poiché $d_f(t)$ è Gaussiana a valor medio nullo e varianza σ_d^2 ($\sigma_d^2 = \sigma_n^2$ se disturbo = solo rumore termico):

$$p(\tilde{z}\,|\,H_0) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|\tilde{z}\right|^2\right\} \quad \Longrightarrow \quad p_z(z|\,H_0) = \frac{2z}{\sigma_d^2}e^{-\frac{z^2}{\sigma_d^2}}$$

$$\boxed{P_{fa} = \Pr ob\{z > T\,|\,H_0\} = \int_T^{\infty} p_z(z|\,H_0)\,dz = e^{-\frac{T^2}{\sigma_d^2}}}$$

Probabilità di Rivelazione – soglia fissa

Sotto l'ipotesi H$_1$ (a≠0) ho una rivelazione se $z = |\tilde{z}| = \left| d_f(t) + a \cdot \chi(\tau,\nu) \right| > T$

Ora c'è un valor medio (valore complesso) pari ad "a" volte il valore della funzione di ambiguità

$$p(\tilde{z}|H_0) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}|\tilde{z}|^2\right\} \quad \Rightarrow \quad p(\tilde{z}|a;H_1) = \frac{1}{\pi\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{1}{\sigma_d^2}\left|(\tilde{z} - a\cdot\chi(\tau,\nu)\right|^2\right\}$$

$$p_z(z|\sigma;H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2 + \sigma\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}\right\}\cdot I_0\left[\frac{2z\sqrt{\sigma}\cdot|\chi(\tau,\nu)|}{\sigma_d^2}\right]$$

$$SNR = \frac{|a|^2\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2} = \frac{\sigma\cdot|\chi(\tau,\nu)|^2}{\sigma_d^2}$$

$$p_z(z|SNR;H_1) = \frac{2z}{\sigma_d^2}\exp\left\{-\frac{z^2}{\sigma_d^2} - SNR\right\}\cdot I_0\left[2\frac{z}{\sigma_d}\sqrt{SNR}\right]$$

$$\boxed{P_d(SNR) = \Pr ob\{z > T|\sigma;\, H_1\} = \int_{T/\sigma_d}^{\infty} 2t\, \exp\{-t^2 - SNR\}\cdot I_0\left[2\,t\sqrt{SNR}\right]dt}$$