Compito di recupero del giorno 27/11/2015

Esercizio n. 1

Una particella di massa m e spin 1/2 si muove in due dimensioni nel piano xy ed è soggetta alla seguente Hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) + 2\omega S_z$$

1. Determinare i valori dei livelli energetici e le loro degenerazioni per energie $E \leq 4\hbar\omega$, esplicitando i relativi autoket in termini delle autofunzioni $|\pm\rangle$ dell'operatore S_z e delle funzioni $\psi_{nm}(x,y) = \psi_n(x)\psi_m(y)$, dove $\psi_n(x)$ è l'autofunzione normalizzata dell'oscillatore armonico unidimensionale con autovalore $\hbar\omega(n + \frac{1}{2})$.

Si consideri lo stato $|\alpha\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\psi_{00}(x,y)|+\rangle + \psi_{11}(x,y)|-\rangle)$.

2. Si determini se è autostato dei seguenti operatori e in caso affermativo si calcoli il corrispondente autovalore: S_z, ${S_z}^2$, S_x, $\mathcal{H}$.

3. Si calcoli il commutatore $C = [O, \mathcal{H}]$ dove $O = p_x S_x$.

Esercizio n. 2

Un sistema è composto da due particelle A e B, distinguibili, di spin 1/2 e ferme, soggette alla seguente hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{\alpha}{\hbar}({S^A}_z + {S^B}_x)$$

dove α è una costante reale positiva e $\mathbf{S}^A$, $\mathbf{S}^B$ sono gli operatori di spin delle due particelle.

a) Determinare gli autovalori e gli autostati dell' hamiltoniana con le loro degenerazioni indicando lo stato generico come combinazione lineare dei ket della base $|\pm, A\rangle|\pm, B\rangle$ dove i ket si riferiscono alla proiezione dello spin lungo l'asse z per le particelle A e B.

b) Determinare lo stato $|\psi\rangle_t$ evoluzione temporale al tempo t dello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, A\rangle|+, B\rangle + |-, A\rangle|-, B\rangle)$. Si utilizzi la stessa basa indicata al punto a).

c) Calcolare $|\langle\psi_1|\psi\rangle_t|^2$ essendo $|\psi_1\rangle = |-, A\rangle|+, B\rangle$.

Compito di Meccanica Quantistica
del 27 gennaio 2016

Un sistema è composto da due particelle indistinguibili A e B di massa m e spin 1/2 soggette alla seguente hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p}_A^2 + \mathbf{p}_B^2) + \frac{m\omega^2}{4}[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + 4(z_A - z_B)^2] + \frac{\alpha}{\hbar}(S_{Az} + S_{Bz})^2$$

con $\alpha = \omega/(100)$. Si risolva l'esercizio nel sistema del centro di massa delle due particelle.

1. Si mostri che gli autoket $|n_x, n_y, n_z\rangle\chi_s^{s_z} = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)\chi_s^{s_z}$ sono autofunzioni della Hamiltoniana, . Qui $\mathbf{r} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = (x, y, z)$, $|n_x\rangle = \psi_{n_x}(x)$ è l'autofunzione normalizzata dell'n_x-esimo livello eccitato dell'oscillatore armonico unidimensionale (con massa e frequenza appropriate da specificare), $|n_y\rangle = \psi_{n_y}(y)$ e $|n_z\rangle = \psi_{n_z}(z)$ le analoghe quantità relative alle componenti y e z, $\chi_s^{s_z}$ è lo spinore relativo allo spin totale $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, ossia che soddisfa $S^2\chi_s^{s_z} = \hbar^2 s(s+1)\chi_s^{s_z}$ e $S_z\chi_s^{s_z} = \hbar s_z\chi_s^{s_z}$.

2. Si determinino i valori dei livelli energetici e le loro degenerazioni per energie $E < 4\hbar\omega + 2\hbar\alpha$, esplicitando gli autoket relativi nella base indicata al punto precedente.

3. Al tempo $t = 0$ si consideri lo stato normalizzato:

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n_x = 1, n_y = 0, n_z = 0\rangle + |n_x = 2, n_y = 1, n_z = 0\rangle)\chi_1^0\ ;$$

   (a) si indichi, motivando la risposta, se $|\phi\rangle$ è autostato dell' Hamiltoniana;

   (b) si calcoli l'evoluto dello stato ϕ al tempo t e l'elemento di matrice $\langle\phi(t)|(S_{Ax}+S_{Bx})^2|\phi(t)\rangle$;

   (c) si calcoli l'elemento di matrice $\langle\phi(t)|(x_A - x_B)(y_A - y_B)|\phi(t)\rangle$.

4. Si consideri lo stato normalizzato $|\psi\rangle$ a cui corrisponde la funzione d'onda $\psi = \beta\exp(\frac{-m\omega r^2}{2\hbar})\chi_0^0$ in cui r è la distanza relativa tra le due particelle

$$r = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

   e β è la costante di normalizzazione.

   (a) determinare β in modo che ψ sia normalizzato;

   (b) indicare, motivando la risposta, se $|\psi\rangle$ è autostato dell'Hamiltoniana;

   (c) calcolare il prodotto scalare tra $|\psi\rangle$ e lo stato fondamentale di $\mathcal{H}$.

Compito di Meccanica Quantistica del giorno 15/02/2016 A.A. 2015–2016

Una particella di massa m, carica q e spin 1/2 è vincolata a muoversi in tre dimensioni soggetta alla hamiltoniana seguente:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \alpha \frac{L_z + 2S_z}{\hbar} ;$$

con $0 < \alpha << E_I$ dove $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$, $E_I = me^4/2\hbar^2$ è l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno e $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Si calcolino i seguenti commutatori :
   (a) $[\mathcal{H}, \mathbf{J}^2]$,
   (b) $[\mathcal{H}, \mathbf{J}]$.
2. Considerare al tempo $t = 0$ lo stato
$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n = 2, l = 1, m = -1\rangle + i|n = 2, l = 1, m = +1\rangle)\chi$$
   dove χ è autostato di S_x con autovalore $+\hbar/2$.
   Indicare quali sono i possibili risultati di una misura dei seguenti operatori sullo stato $|\psi\rangle$ e le loro probabilità:
   (a) $\mathbf{J}^2$,
   (b) J_z.
   (c) Calcolare $l(t) = \langle\psi, t|{L_x}^2|\psi, t\rangle$.
3. (a) Calcolare il valore di aspettazione dell' operatore $e^{-i\pi J_x/(4\hbar)}$ sullo stato fondamentale del sistema.
   (b) QUESTO PUNTO NON DEVE ESSERE SVOLTO DAGLI STUDENTI CON IL CURRICULUM IN ASTROFISICA: Calcolare il valore di aspettazione dell' operatore $\mathbf{p}^2$ sullo stato fondamentale del sistema.

Compito di Meccanica Quantistica
Sessione straordinaria del 16/ 5/ 2016

Esercizio 1: Una particella di spin 1, vincolata a muoversi su una superficie sferica di raggio $r = 1$, è soggetta alla seguente hamiltoniana:

$$\mathcal{H} = \frac{\epsilon}{\hbar^2}((\mathbf{L} + \mathbf{S})^2 + L_z S_z) \; ;$$

con ϵ costante positiva.

Si considerino le seguenti funzione d'onda normalizzate:

$$\Psi_1 = M\,(Y_1^1\,\chi_1^1 + Y_1^0\,\chi_1^0\,)\,; \quad \Psi_2 = N\,(Y_1^{-1} + 1\,)\,\chi_1^0; \quad \Psi_3 = Q\,(Y_1^0\,\chi_1^{-1} + Y_1^{-1}\,\chi_1^0\,)$$

essendo $\chi_s^{s_z}$ lo spinore riferito all'asse z corrispondente a $\mathbf{S}$, Y_l^m le armoniche sferiche riferite all'asse z e M, N, Q costanti di normalizzazione.

Rispondete alle seguenti domande in modo sintetico e chiaro.

a) Si calcolino le costanti M, N, Q.

b) Si determini se Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 sono autofunzioni dell'Hamiltoniana e l'autovalore eventuale.

c) Si calcolino i commutatori $[\mathcal{H}, J_x]$, $[\mathcal{H}, J_y]$, $[\mathcal{H}, J_z]$.

d) {SOLO PER IL CURRICULUM DI FISICA}. Si calcoli il commutatore $[\mathcal{H}, \mathbf{J}^2]$.

Esercizio 2. Due particelle indistinguibili A e B di massa m e di spin $1/2$ sono vincolate a muoversi nella buca tridimensionale infinita $0 < x < L, 0 < y < L, 0 < z < 2L$ e sono inoltre soggette, nella regione interna alla buca, alla hamiltoniana

$$\mathcal{H} = E_0 \left(1 + \frac{\mathbf{S}_A \cdot \mathbf{S}_B}{\hbar^2}\right), \;\; \text{con } E_0 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \; .$$

1. Determinare i livelli del sistema con autovalori $E < 6E_0$, i corrispondenti ket e la loro degenerazione.

2. Si calcoli il valore di aspettazione dell'operatore $\mathcal{O} = x_A x_B (1 + \frac{S_{Ax}^2 S_{Bx}^2}{\hbar^4})$ sullo stato fondamentale del sistema.

Integrali utili: $\int x \sin^2(ax)\, dx = \frac{x^2}{4} - \frac{\cos(2ax)}{8a^2} - \frac{x \sin(2ax)}{4a} + const$

Compito di Meccanica Quantistica
del giorno 01/07/2016 A.A. 2015–2016

Un sistema è composto da un elettrone di massa m_e e carica $-q$ e un protone fermo nell'origine delle coordinate con carica q. L'Hamiltoniana è la seguente:

$$\mathcal{H} = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} - \frac{e^2}{r_e} + \frac{\alpha(\boldsymbol{S}^p \cdot \boldsymbol{S}^e)}{\hbar^2} \ ,$$

con $0 < \alpha < E_I$, dove $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$, $E_I = m_e e^4/2\hbar^2$, $\boldsymbol{S}^e$ e $\boldsymbol{S}^p$ sono gli operatori di spin per l'elettrone e il protone, ed $r_e = \sqrt{x_e^2 + y_e^2 + z_e^2}$.

1. Il sistema si trova in uno stato con momento angolare $l = 1, l_z = 1$ e spin $s_z^p = -1/2, s_z^e = 1/2$. Se $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}^p + \boldsymbol{S}^e$, in una misura di $\boldsymbol{J}^2$ quali valori sono possibili e con quali probabilità?

2. Si consideri al tempo $t = 0$ lo stato $|\Phi(0)\rangle = |n = 2, l = 1, l_z = 1\rangle \, \chi^p_{+1/2}\chi^e_{-1/2}$, dove $\chi^p_{s_z}$ e $\chi^e_{s_z}$ sono gli spinori rispettivamente autofunzioni di S_z^p e S_z^e. Si determini lo stato $|\Phi(t)\rangle$ evoluto nel tempo $t > 0$ e si calcoli la probabilità di ritrovare lo stato iniziale al tempo t.

3. Si calcoli $\langle\Psi_f|\mathcal{O}^2|\Psi_f\rangle$ dove $\mathcal{O} = L_x + 2S_x^e$ e $|\Psi_f\rangle$ è lo stato fondamentale del sistema.

4. (**questa domanda è solo per gli iscritti al curriculum di Fisica**) A un certo istante t il sistema si trova nel suo stato fondamentale $|\Psi_f\rangle$. Repentinamente l'Hamiltoniana si modifica in $\mathcal{H}^{'}$ con
$$\mathcal{H}^{'} = \frac{\mathbf{p}_e^2}{2m_e} - \frac{\chi e^2}{r_e} + \frac{\alpha(\boldsymbol{S}^p \cdot \boldsymbol{S}^e)}{\hbar^2} \ ,$$
dove $\chi > 0$. Si calcoli la probabilità che il sistema **non** si trovi nel nuovo stato fondamentale, nell'istante immediatamente successivo al cambio dell'Hamiltoniana.

5. Si supponga ora che l'Hamiltoniana del sistema sia $\mathcal{H}^{"} = \mathcal{H} + \mathcal{H}_{pert}$ con
$$\mathcal{H}_{pert} = \beta S_z^e S_z^p \, .$$
Qual è l'energia dello stato fondamentale al primo ordine perturbativo in β?

Compito di Meccanica Quantistica del 22 luglio 2016

Si consideri un sistema costituito da due particelle identiche indicate con A e B di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è data da

$$\mathcal{H} = \frac{p_A^2}{2m} + \frac{p_B^2}{2m} + \frac{m\omega^2(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B)^2}{4} + \omega S_{Tz}\,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{S}_T = \mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B$. Sia inoltre $\mathbf{L}_T = \mathbf{L}_A + \mathbf{L}_B$ e $\mathbf{J} = \mathbf{L}_T + \mathbf{S}_T$. Si risolva l'esercizio nel sistema di riferimento del centro di massa.

1. Elencare i livelli energetici, i relativi autoket e degenerazioni fino a $E < 4\hbar\omega$.
2. **SOLO PER ASTROFISICI** Calcolare il commutatore $[\mathcal{H}, \mathbf{J}^2]$.
3. All'istante $t = 0$, il sistema si trova in uno stato $|\psi_0\rangle$ tale che una misura dell'energia E può dare solo $E \le (5/2)\hbar\omega$, il valor medio dell'Hamiltoniana è $(5/3)\,\hbar\omega$, una misura di $L_{T,z}$ e J_z può dare solo 0 per entrambe le quantità. Determinare lo stato più generale compatibile con le predette condizioni.
4. Essendo $|\psi_t\rangle$ l'evoluto temporale al tempo $t > 0$ dello stato $|\psi_0\rangle$, verificare se sia possibile completare la determinazione dello stato $|\psi_0\rangle$ rendendo minima la probabilità $\mathcal{P} = |\langle\psi_0|\psi_t\rangle|^2$ al tempo $t = 2\pi/\omega$.
5. Quali valori si possono ottenere e con quale probabilità da una misura di $\mathbf{J}^2$ sullo stato $|\psi_0\rangle$?
6. Si calcoli a $t = 0$ il valor medio $\langle\psi_0|p_z^2(S_T^2 - 2\hbar^2)|\psi_0\rangle$, dove $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)/2$.
7. **(SOLO PER FISICI)** Calcolare a $t = 0$ il valor medio $\langle\psi_0|z\,(S_{Az} - S_{Bz})|\psi_0\rangle$, $z = z_A - z_B$.

Compito di Meccanica Quantistica
del giorno 16/9/2016 A.A. 2015–2016

Esercizio 1

Gli autoket $\{|E_+\rangle$ e $|E_-\rangle$ $\}$ della Hamiltoniana di un sistema a due livelli con autovalori $E_\pm = \pm\epsilon$, con $\epsilon > 0$ sono espressi in termini della base $\mathcal{B}$ dei ket $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ mediante la seguente trasformazione:

$$\begin{cases} |E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|1\rangle + a|2\rangle \\ |E_-\rangle = be^{i\phi}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|2\rangle \end{cases}$$

dove b è reale, a complesso e $0 \leq \phi \leq \pi$.

1. Si scrivano nella base $\mathcal{B}$ le matrici associate ai seguenti operatori: $A = |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|$, $B = e^A$, ed il commutatore $C = [B, e^{|1\rangle\langle 2|} \cdot e^{|2\rangle\langle 1|}]$.
2. Si calcolino a e b sapendo che $|E_\pm\rangle$ sono autovettori normalizzati associati ad autovalori diversi.
3. SOLO PER ASTROFISICI Determinare la matrice che rappresenta l'operatore $\exp(-iHt/\hbar)$ nella base $\mathcal{B}$.
4. Determinare la matrice che rappresenta l'Hamiltoniana del sistema nella base $\mathcal{B}$.

Esercizio 2

Si consideri una particella in tre dimensioni, con massa m, carica q e spin 1/2. La particella è soggetta all'hamiltoniana

$$\mathcal{H}_0 = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{r} + \frac{E_I}{3}(1 + \frac{S_x}{\hbar})$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$ e E_I ($E_I = me^4/2\hbar^2$) è l'energia di ionizzazione dell'atomo di idrogeno.

1. Determinare l' energia dello stato fondamentale e degli stati eccitati del sistema fino a $E \leq E_I/18$; scrivere in modo sintetico e chiaro i ket corrispondenti e discuterne la degenerazione.
2. Sapendo che a $t = 0$ lo stato del sistema nella base $|n, l, m\rangle|s, s_z\rangle$ è dato da $|\Psi\rangle_0 = |2, 1, 1\rangle|1/2, -1/2\rangle$ determinare l'evoluzione temporale dello stato e calcolare, in funzione del tempo, il valor medio di $(J_x)^2$ su questo stato.
3. SOLO PER I FISICI. Si aggiunga ad $\mathcal{H}$ la perturbazione $\mathcal{H}_P = \frac{\lambda}{r^3}(r_x S_x)^2$. Si calcoli al primo ordine perturbativo in λ la correzione all'energia dello stato fondamentale.

Compito di Meccanica Quantistica del giorno 08/11/16

Esercizio 1

Si consideri una particella di spin 1/2 vincolata a muoversi su una sfera di raggio R e soggetta alla seguente Hamiltoniana: $\mathcal{H}_0 = \frac{\omega}{\hbar}(\mathbf{J}^2 + \mathbf{L}^2 + \frac{3}{2}\hbar J_z)$ dove $\omega > 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

A) Determinare gli autovalori e gli autoket dell' Hamiltoniana fino a energie $E < 4\hbar\omega$ e discuterne la degenerazione.

B) Scrivere gli $|\psi\rangle$ che soddisfano la condizione $\mathcal{H}_0|\psi\rangle = \frac{7}{2}\hbar\omega|\psi\rangle$; tra tali stati si identifichino quelli per cui la probabilità di misurare $J_z = \hbar/2$ è uguale a quella di misurare $J_z = -3\hbar/2$.

C) Sugli stati identificati al punto B) si esegue una misura di $\mathbf{L}^2$ e L_z; quali valori si possono trovare e con quale probabilità?

D) Data la perturbazione $V = \lambda\frac{\omega}{\hbar}{S_z}^2\cos^2(\theta)$ calcolare, al primo ordine nella teoria delle perturbazioni, lo spostamento in energia dello stato fondamentale.

Esercizio 2

Siano $|1\rangle$ e $|2\rangle$ due ket di una base ortonormale di un sistema quantistico. All' istante $t = 0$ si misura l' osservabile: $\mathcal{O} = |1\rangle\langle 1| + i|2\rangle\langle 1| - i|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 2|$ ottenendo come risultato il massimo valore possibile.

a Scrivere, nella base data, il ket $|\phi, t = 0\rangle$ che rappresenta lo stato del sistema subito dopo la misura.

Sapendo che l' operatore hamiltoniano è $\mathcal{H} = \hbar\gamma\,(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$ con $\gamma =$ costante > 0,

b (SOLO ASTROFISICI) verificare se gli operatori $\mathcal{H}$ e $\mathcal{O}$ sono hermitiani e calcolare il commutatore tra loro.

c determinare $|\phi, t > 0\rangle$, il ket di stato per $t > 0$;

d calcolare il valor medio di $\mathcal{O}$ sullo stato $|\phi, t > 0\rangle$ in funzione del tempo;

e (SOLO PER FISICI) calcolare la probabilità, in funzione del tempo, di ottenere il minimo valore possibile misurando $\mathcal{O}$.