1. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{4x}{4x^2+9y^2-1} + 2x\right)\,dx + \left(\frac{9y}{4x^2+9y^2-1} - x\right)\,dy.$$

a) Determinare il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di ω, specificandone le proprietà topologiche (insieme chiuso, aperto, limitato, illimitato, connesso, non connesso, semplicemente connesso).

b) Calcolare $\int_{\gamma^+} \omega$, dove γ^+ è il tratto di circonferenza di raggio 1 centrato nell'origine e contenuto nel secondo quadrante, percorso in verso antiorario.

Il dominio è il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'ellisse $\{4x^2+9y^2=1\}$. Si tratta di un insieme aperto, non chiuso, illimitato, non connesso (e quindi non semplicemente connesso).

Proviamo a vedere se la forma differenziale è esatta. Purtroppo non lo è perché non è chiusa. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x}{4x^2+9y^2-1} + 2x\right) = -\frac{72xy}{(4x^2+9y^2-1)^2} \neq$$

$$\neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{9y}{4x^2+9y^2-1} - x\right) = -\frac{72xy}{(4x^2+9y^2-1)^2} - 1.$$

Quindi il problema è costituito dal "$-x$" nella seconda componente della f. d. Questo suggerisce di scrivere ω nella forma

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dove

$$\omega_1 = \left(\frac{4x}{4x^2+9y^2-1} + 2x\right)dx + \frac{9y}{4x^2+9y^2-1}\,dy$$

$$\omega_2 = -x\,dy$$

ω_1 è chiusa, e anzi si vede facilmente che è esatta.

Una sua primitiva è data da

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \ln |4x^2+9y^2-1| + x^2 + c$$

Ne segue che $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\gamma^+} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2$

$$\int_{\gamma^+} \omega_1 = V(-1,0) - V(0,1) = \frac{1}{2} \ln 3 + 1 - \frac{1}{2} \ln 8$$

Per integrare $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega_2$ si può fare il calcolo diretto:

$$\int_{\gamma^+} \omega_2 = -\int_{\gamma^+} x \, dy = -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta \cdot \cos\theta \, d\theta = -\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

in quanto γ^+ si parametrizza come $\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \sin\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Quindi $\displaystyle\int_{\gamma} \omega = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{8}$

2. Sia data la funzione di due variabili $f(x,y) = xy(x^2 - y^2 - 4)$.

a) Determinare e classificare gli eventuali punti critici di f.

b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f nell'insieme

$$D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ x \geq 0\,,\ 2y \leq x\}\,.$$

Le derivate parziali di f valgono:

$$f_x(x,y) = y\left[x^2 - y^2 - 4 + 2x^2\right] = y\left[3x^2 - y^2 - 4\right]$$

$$f_y(x,y) = x\left[x^2 - y^2 - 4 - 2y^2\right] = x\left[x^2 - 3y^2 - 4\right]$$

I punti critici sono quelli che annullano entrambe le derivate, e cioè i tre punti $(0,0)$; $(\pm 2, 0)$.

Classifichiamoli. Le derivate seconde valgono:

$$f_{xx}(x,y) = 6xy$$

$$f_{xy}(x,y) = 3x^2 - y^2 - 4 - 2y^2 = 3x^2 - 3y^2 - 4$$

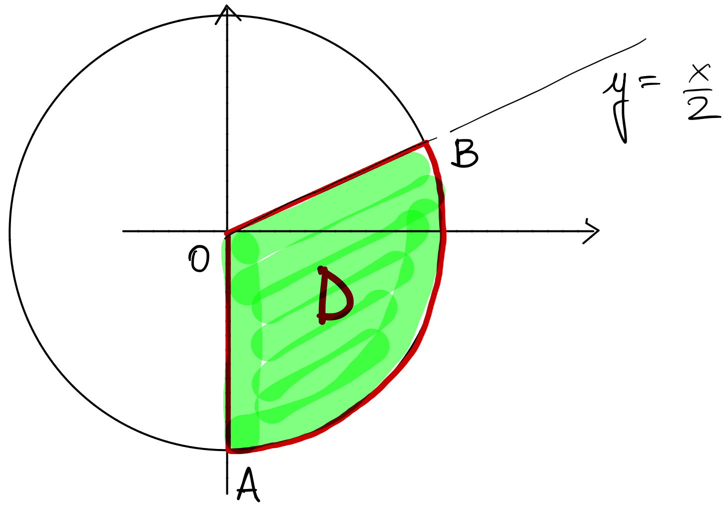
$$f_{yy}(x,y) = -6xy.$$

Ne segue che: $D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0)$ punto di sella;

$D^2 f(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (\pm 2, 0)$ punti di sella.

Per la seconda domanda, sicuramente il massimo e il minimo assoluti esistono per il teorema di Weierstrass (f è continua, mentre D è chiuso e limitato).

D è fatto così:



I pti di massimo e minimo assoluti vanno cercati:

- nei pti critici interni a D (non ce ne sono)
- sulla frontiera ∂D.

Questa è costituita da tre archi di curva. Sul segmento OA la funzione vale identicamente zero.
Sul segmento OB la funzione vale

$$\varphi(x) = f\left(x, \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{8}\left(3x^4 - 16x^2\right) \qquad 0 \le x \le \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(3x^3 - 8x)$, che si annulla per $x = 0$, $x = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

I valori interessanti sono: $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) = -\frac{8}{3}$

$\varphi\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{64}{25}$.

Infine, sull'arco AB la funzione vale

$$\eta(\theta) := f(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta) = 16\cos\theta\operatorname{sen}\theta\left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta - 1\right) =$$

$$= 8\operatorname{sen}(2\theta)\left(\cos(2\theta) - 1\right) \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \theta_0 = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\eta'(\theta) = 16\left[2\cos^2(2\theta) - \cos(2\theta) - 1\right]$$

che si annulla quando $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$ e $\cos(2\theta) = 1$.

Nel nostro intervallo $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = -\frac{2}{3}\pi \Rightarrow \eta(\theta) = 6\sqrt{3}$

$\cos(2\theta) = 1 \Rightarrow 2\theta = 0 \Rightarrow \eta(\theta) = 0$.

Tenuto conto dei valori trovati, si ottiene che il massimo assoluto vale $6\sqrt{3}$, il minimo assoluto vale $-\frac{8}{3}$.

3. Calcolare il volume del seguente insieme:

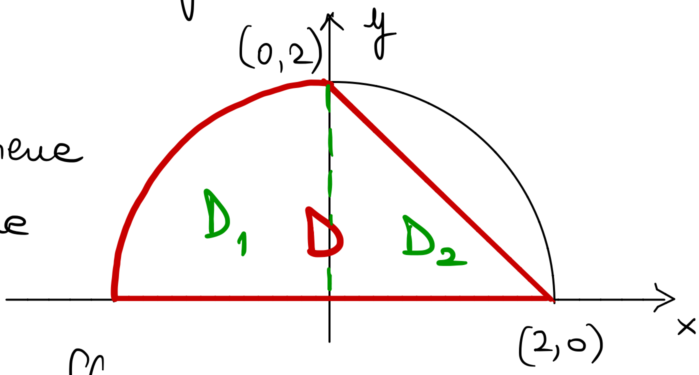
$$\Omega = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2+y^2 \leq 4,\ 0 \leq y \leq 2-x,\ 0 \leq z \leq y\right\}.$$

Si ha

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_D y \, dx dy \,, \quad \text{dove}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2+y^2 \leq 4, \qquad 0 \leq y \leq 2-x\}$$

Quindi D è fatto così:



Per calcolare l'integrale conviene spezzare il dominio nei due sottodomini D_1, D_2. Quindi

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_{D_1} y \, dx dy + \iint_{D_2} y \, dx dy =$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \ \rho^2 \sin\theta + \int_0^2 dx \int_0^{2-x} dy \ y =$$

$$= \frac{8}{3} \left(-\cos\theta\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} + \frac{1}{2}\int_0^2 (2-x)^2 \, dx = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = 4$$

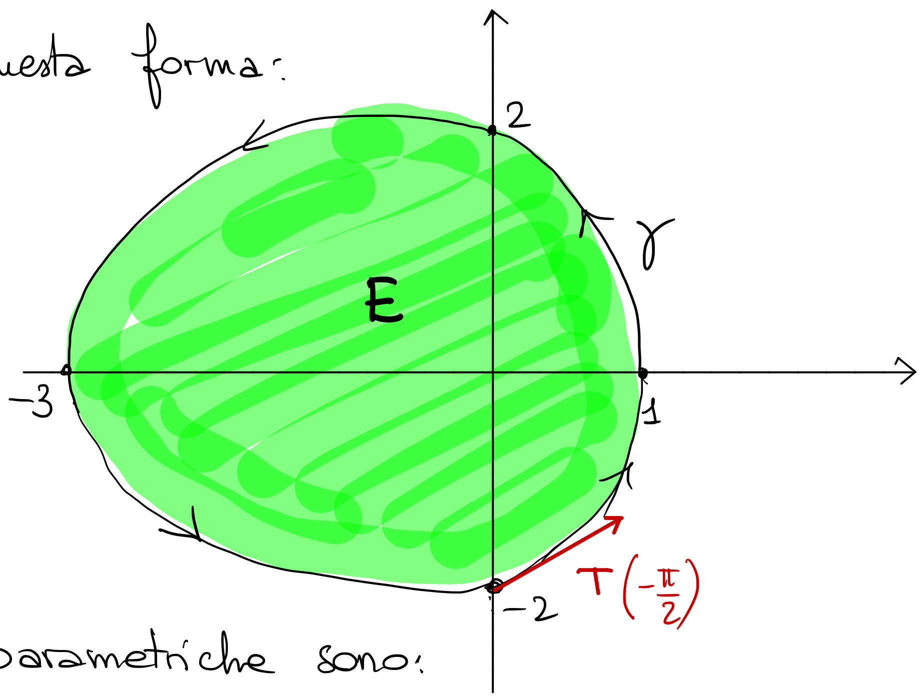
4. Disegnare la curva chiusa γ di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 2 - \cos\theta, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Calcolare il versore tangente a γ nel punto in cui questa interseca il semiasse negativo delle y. Infine, calcolare il flusso uscente da γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (2x + y, y^2).$$

La curva γ ha questa forma:



Le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x(\theta) = (2-\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (2-\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Le derivate valgono:
$$\begin{cases} x'(\theta) = 2\,\mathrm{sen}\,\theta\,(\cos\theta - 1) \\ y'(\theta) = \mathrm{sen}^2\theta - \cos^2\theta + 2\cos\theta \end{cases}$$

Il punto che ci interessa corrisponde a $\theta = -\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2 \\ y'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases} \Rightarrow \underline{T}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

Per calcolare il flusso, si può applicare il teorema della divergenza. Detto E il dominio racchiuso da γ, si ha:

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \iint_{E} \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy = 2\iint_{E} (1+y)\, dx\, dy = (*)$$

in quanto $\operatorname{div} \underline{F} = 2(1+y)$. A causa della simmetria del dominio rispetto all'asse x, il termine y ha integrale nullo. Pertanto

$$(*) = 2 \iint_{E} dx\,dy = 4 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2-\cos\theta} d\rho \; \rho =$$

$$= 2 \int_0^{\pi} (2-\cos\theta)^2 \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} (4 - 4\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta =$$

termine a integrale nullo

$$= 8\pi + \pi = 9\pi$$

OK.

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$
\begin{cases}
x^2y''(x) + 5xy'(x) + 4y(x) = \dfrac{2}{x^2} \\
y(1) = 1 \\
y'(1) = 0
\end{cases}.
$$

Si tratta di un'eq^{ne} di Eulero. Ponendo $x = e^t$

$v(t) = y(e^t) \iff y(x) = v(\ln x)$, si ottiene:

$$y'(x) = \frac{v'(t)}{x}, \quad y''(x) = \frac{v''(t) - v'(t)}{x^2}$$

quindi l'eq^{ne} diventa a coeff^{ti} costanti

$$
\begin{cases}
v''(t) + 4v'(t) + 4v(t) = 2e^{-2t} \\
v(0) = 1 \\
v'(0) = 0
\end{cases}
$$

Risolviamo prima l'eq^{ne} omogenea associata:

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda+2)^2 = 0 \iff \lambda = -2 \text{ (radice doppia)}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$z(t) = e^{-2t}(c_1 + c_2 t)$$

Cerco una soluzione della non omogenea nella forma

$v_p(t) = At^2e^{-2t}$ (essendo $\lambda = -2$ una radice doppia dell'eq^{ne} algebrica associata)

$$\Rightarrow v_p'(t) = Ae^{-2t}(2t - 2t^2) = 2Ae^{-2t}(t - t^2)$$

$$v_p''(t) = 2Ae^{-2t}(1 - 2t - 2t + 2t^2) = 2Ae^{-2t}(2t^2 - 4t + 1)$$

L'equazione diventa (dopo aver semplificato e^{-2t}):

$$2A\,(2t^2-4t+1)+8A\,(t-t^2)+4At^2=2$$

che è un'identità se e solo se $A=1$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione per $v(t)$ è:

$$v(t)=e^{-2t}\left(c_1+c_2t+t^2\right).$$

Le condizioni iniziali forniscono $c_1=1,\ c_2=2$

quindi $v(t) = e^{-2t}\,(1+2t+t^2)$

Ne segue che $y(x)=v(\ln x)=\dfrac{1+2\ln x+\ln^2 x}{x^2}$

1. Data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{9x}{9x^2+4y^2-1} + y\right) dx + \left(\frac{4y}{9x^2+4y^2-1} - 2y\right) dy.$$

a) Determinare il dominio $D \subseteq \mathbb{R}^2$ di ω, specificandone le proprietà topologiche (insieme chiuso, aperto, limitato, illimitato, connesso, non connesso, semplicemente connesso).

b) Calcolare $\int_{\gamma^+} \omega$, dove γ^+ è il tratto di circonferenza di raggio 1 centrato nell'origine e contenuto nel terzo quadrante, percorso in verso antiorario.

Il dominio è il piano $\mathbb{R}^2$ privato dell'ellisse $\{9x^2+4y^2=1\}$. Si tratta di un insieme aperto, non chiuso, illimitato, non connesso (e quindi non semplicemente connesso).

Proviamo a vedere se la forma differenziale è esatta. Purtroppo non lo è perché non è chiusa. Infatti

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{9x}{9x^2+4y^2-1} + y\right) = -\frac{72xy}{(9x^2+4y^2-1)^2} + 1$$

$$\neq \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4y}{9x^2+4y^2-1} - 2y\right) = -\frac{72xy}{(9x^2+4y^2-1)^2}$$

Quindi il problema è costituito dal "$+y$" nella prima componente della f. d. Questo suggerisce di scriver ω nella forma

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

dove

$$\omega_1 = \frac{9x}{9x^2+4y^2-1}dx + \left(\frac{4y}{9x^2+4y^2-1} - 2y\right) dy$$

$$\omega_2 = y\, dx$$

ω_1 è chiusa, e anzi si vede facilmente che è esatta.

Una sua primitiva è data da

$$V(x,y) = \frac{1}{2} \ln |9x^2+4y^2-1| - y^2 + c$$

Ne segue che $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega = \int_{\gamma^+} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2$

$$\int_{\gamma^+} \omega_1 = V(0,-1) - V(-1,0) = \frac{1}{2} \ln 3 - 1 - \frac{1}{2} \ln 8$$

Per integrare $\displaystyle\int_{\gamma^+} \omega_2$ si può fare il calcolo diretto:

questo termine dà integrale zero

$$\int_{\gamma^+} \omega_2 = \int_{\gamma^+} y\, dx = \int_{\pi}^{3\pi/2} \operatorname{sen}\theta\,(-\operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\cos 2\theta - 1}{2}\, d\theta =$$

$$= -\frac{\pi}{4}$$

in quanto γ^+ si parametrizza come $\begin{cases} x(\theta) = \cos\theta \\ y(\theta) = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$, $\theta \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$

Quindi $\displaystyle\int_{\gamma} \omega = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{8} - 1 - \frac{\pi}{4}$.

2. Sia data la funzione di due variabili $f(x,y) = xy(y^2 - x^2 - 4)$.

a) Determinare e classificare gli eventuali punti critici di f.

b) Determinare il massimo assoluto ed il minimo assoluto di f nell'insieme

$$D = \{(x,y) \ : \ x^2 + y^2 \leq 4\,,\ y \geq 0\,,\ 2x \leq y\}\,.$$

Le derivate parziali di f valgono:

$$f_x(x,y) = y\left[y^2 - x^2 - 4 - 2x^2\right] = y\left[-3x^2 + y^2 - 4\right]$$

$$f_y(x,y) = x\left[y^2 - x^2 - 4 + 2y^2\right] = x\left[-x^2 + 3y^2 - 4\right]$$

I punti critici sono quelli che annullano entrambe le derivate, e cioè i tre punti $(0,0)$; $(0,\pm 2)$.

Classifichiamoli. Le derivate seconde valgono:

$$f_{xx}(x,y) = -6xy$$

$$f_{xy}(x,y) = -3x^2 + y^2 - 4 + 2y^2 = -3x^2 + 3y^2 - 4$$

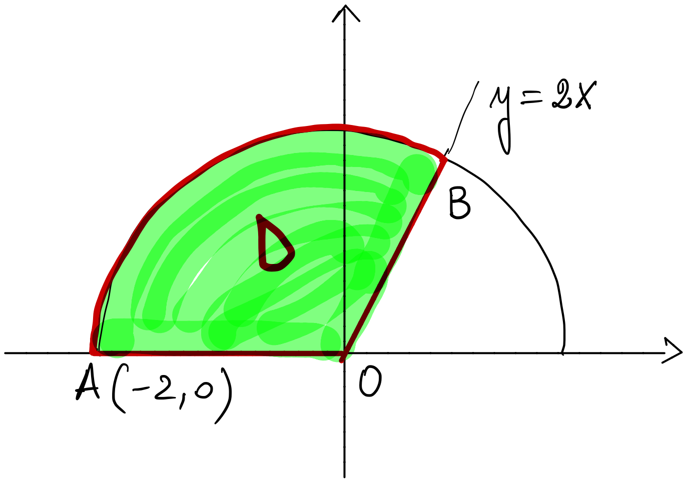
$$f_{yy}(x,y) = 6xy.$$

Ne segue che: $D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,0)$ punto di sella;

$$D^2 f(0,\pm 2) = \begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow (0,\pm 2) \text{ punti di sella.}$$

Per la seconda domanda, sicuramente il massimo e il minimo assoluti esistono per il teorema di Weierstrass (f è continua, mentre D è chiuso e limitato).

D è fatto così:



I pti di massimo e minimo assoluti vanno cercati:

- nei pti critici interni a D (non ce ne sono)
- sulla frontiera ∂D.

Questa è costituita da tre archi di curva. Sul segmento OA la funzione vale identicamente zero.

Sul segmento OB la funzione vale

$$\varphi(x) = f(x, 2x) = 2x^2(3x^2-4) \qquad 0 \le x \le \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi'(x) = 8x(3x^2-2)$$, che si annulla per $x=0$, $x=\sqrt{\frac{2}{3}}$.

I valori interessanti sono: $\varphi(0)=0$, $\varphi\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = -\frac{8}{3}$

$$\varphi\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{64}{25}.$$

Infine, sull'arco AB la funzione vale

$$\eta(\theta) := f(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta) = 16\cos\theta\operatorname{sen}\theta\left(\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta - 1\right) =$$

$$= -8\operatorname{sen}(2\theta)\left(\cos(2\theta)+1\right) \qquad \operatorname{arctg} 2 := \theta_0 \le \theta \le \pi$$

$$\eta'(\theta) = -16\left[2\cos^2(2\theta) + \cos(2\theta) - 1\right]$$

che si annulla quando $\cos(2\theta) = \frac{1}{2}$ e $\cos(2\theta) = -1$

Nel nostro intervallo $\cos(2\theta) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\theta = \frac{5}{3}\pi \Rightarrow \theta = \frac{5}{6}\pi \Rightarrow \eta(\theta) = 6\sqrt{3}$

$\cos(2\theta) = -1 \Rightarrow 2\theta = 2\pi \Rightarrow \eta(\theta) = 0.$

Tenuto conto dei valori trovati, si ottiene che il massimo assoluto vale $6\sqrt{3}$, il minimo assoluto vale $-\frac{8}{3}$.

3. Calcolare il volume del seguente insieme:

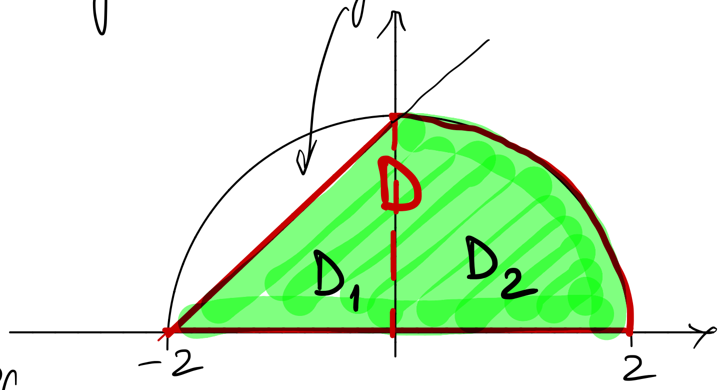
$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2 + y^2 \le 4, \ 0 \le y \le x+2, \ 0 \le z \le y\}.$$

Si ha

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_D y \, dx dy \, , \quad \text{dove}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \le 4, \quad 0 \le y \le x+2\} \quad y = x+2$$

Quindi D è fatto così:



Per calcolare l'integrale conviene spezzare il dominio nei due sottodomini D_1, D_2. Quindi

$$\mathrm{vol}(\Omega) = \iint_{D_1} y \, dx dy + \iint_{D_2} y \, dx dy =$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \int_0^{x+2} dy \, y + \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^2 d\rho \, \rho^2 \operatorname{sen}\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^{0} (x+2)^2 dx + \frac{8}{3} \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3} + \frac{8}{3} = 4$$

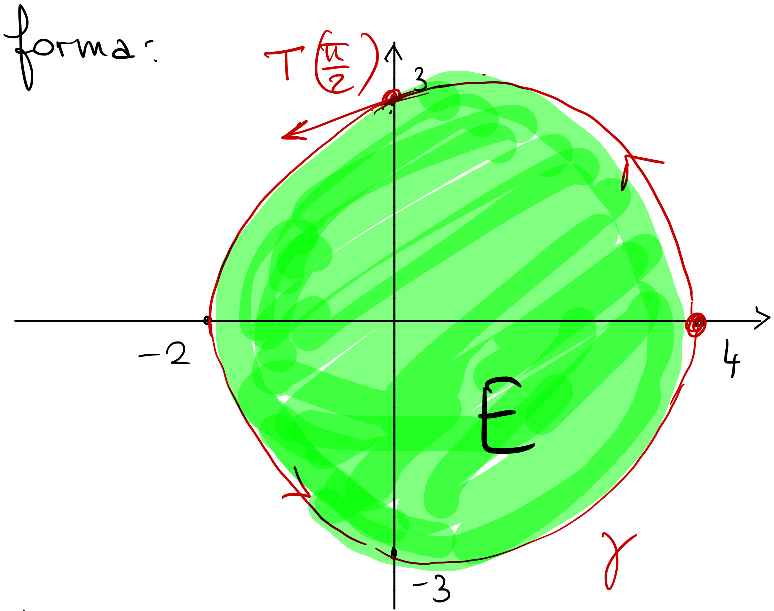
4. Disegnare la curva chiusa γ di equazione (in coordinate polari)

$$\rho = 3 + \cos\theta\,, \quad \theta \in [0\,,\,2\pi]\,.$$

Calcolare il versore tangente a γ nel punto in cui questa interseca il semiasse positivo delle y. Infine, calcolare il flusso uscente da γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (xy\,,\, x+3y)\,.$$

La curva γ ha questa forma:



$-\,\mathrm{sen}^2\theta + 3\cos\theta + \cos^2\theta\,.$

Le sue equazioni parametriche sono:

$$\begin{cases} x(\theta) = (3+\cos\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = (3+\cos\theta)\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,.$$

Le derivate valgono:

$$\begin{cases} x'(\theta) = -\,\mathrm{sen}\,\theta\,(2\cos\theta + 3) \\ y'(\theta) = \cos^2\theta + 3\cos\theta - \mathrm{sen}^2\theta \end{cases}$$

Il punto che ci interessa corrisponde a $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{cases} x'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \quad \underline{T}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{(-3,-1)}{\sqrt{10}} = \left(-\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

Per calcolare il flusso, si può applicare il teorema della divergenza. Detto E il dominio racchiuso da γ, si ha:

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \iint_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy = \iint_E (y+3)\, dx\, dy = (*)$$

in quanto $\operatorname{div} \underline{F} = y+3$. A causa della simmetria del dominio rispetto all'asse x, il termine y ha integrale nullo. Pertanto

$$(*) = 3 \iint_E dx\,dy = 6 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{3+\cos\theta} d\rho \, \rho =$$

$$= 3 \int_0^{\pi} (3+\cos\theta)^2 \, d\theta = 3 \int_0^{\pi} (9 + 6\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta =$$

termine a integrale nullo

$$= 27\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{57}{2}\pi$$

5. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x^2y''(x) - 3xy'(x) + 4y(x) = 3x^2 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un'eq^{ne} di Eulero. Ponendo $x = e^t$

$v(t) = y(e^t) \iff y(x) = v(\ln x)$, si ottiene:

$$y'(x) = \frac{v'(t)}{x}, \quad y''(x) = \frac{v''(t) - v'(t)}{x^2}$$

quindi l'eq^{ne} diventa a coeff^{ti} costanti

$$\begin{cases} v''(t) - 4v'(t) + 4v(t) = 3e^{2t} \\ v(0) = 1 \\ v'(0) = 0 \end{cases}$$

Risolviamo prima l'eq^{ne} omogenea associata:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \iff (\lambda - 2)^2 = 0 \iff \lambda = 2 \quad \text{(radice doppia)}$$

L'integrale generale dell'omogenea associata è

$$z(t) = e^{2t}(c_1 + c_2 t)$$

Cerco una soluzione della non omogenea nella forma

$v_p(t) = At^2e^{2t}$ (essendo $\lambda = 2$ una radice doppia dell'eq^{ne} algebrica associata)

$$\Rightarrow v_p'(t) = Ae^{2t}(2t + 2t^2) = 2Ae^{2t}(t + t^2)$$

$$v_p''(t) = 2Ae^{2t}(1 + 2t + 2t + 2t^2) = 2Ae^{2t}(2t^2 + 4t + 1)$$

L'equazione diventa (dopo aver semplificato e^{2t}):

$$2A(2t^2+4t+1)-8A(t+t^2)+4At^2=3$$

che è un'identità se e solo se $A=\frac{3}{2}$.

Quindi l'integrale generale dell'equazione per $v(t)$ è:

$$v(t)=e^{2t}\left(c_1+c_2t+\frac{3}{2}t^2\right).$$

Le condizioni iniziali forniscono $c_1=1,\ c_2=-2$

quindi $v(t)=e^{2t}\left(1-2t+\frac{3}{2}t^2\right)$

Ne segue che $y(x)=v(\ln x)=x^2\left(1-2\ln x+\frac{3}{2}\ln^2 x\right)$