Serie di Fourier

sen x, cos x sono periodiche di periodo 2π.

sen(kx), cos(kx) sono periodiche di periodo $\frac{2\pi}{k}$ $\quad k \in \mathbb{N}$.

e quindi anche di periodo 2π.

[$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice <u>periodica</u> di periodo $T>0$ se

$$f(x) = f(x+T) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$]

$$\text{sen}\left(k(x+2\pi)\right) = \text{sen}\left(kx + 2k\pi\right) = \text{sen}\, kx$$

$$\Rightarrow \boxed{S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \,\text{sen}\, kx\right)}$$

è una funzione periodica di periodo 2π.

una funzione così fatta si chiama <u>polinomio trigonometrico</u>

Sia $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (regolarità da precisare) e ci chiediamo se è possibile approssimarla con polinomi trigonometrici.

Per esempio, potrei richiedere che, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(x) = f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

con coeff.ti scelti "bene".

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x) \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

con coeff.ti scelti "bene".

E' chiaro che $f(x)$ deve essere 2π-periodica

$$f(x+2\pi) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x+2\pi) = \lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x)$$

s_n è periodica

Come scegliere i coefficienti

$a_0, a_1, \ldots, a_n \ldots \qquad b_1, b_2 \ldots$?

Supponiamo che si abbia

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(x) = f(x), \text{ cioè}$$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx\right). \qquad (*)$$

Integro la precedente uguaglianza tra $-\pi$ e π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\operatorname{sen} kx\right)\right]dx =$$

[supponiamo anche che si possano scambiare serie e integrale: non è banale perché c'è la somma di infiniti termini].

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)\right] dx =$$

[supponiamo anche che si possano scambiare serie e integrale: non è banale perché c'è la somma di infiniti termini].

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\,dx + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(a_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx}_{=0} + b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx}_{=0} \Big)$$

$$= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \pi .$$

$$\Longrightarrow \quad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

Ora moltiplico (*) per $\cos(mx)$ $\quad m \geq 1$.
e integro tra $-\pi$ e π.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx\right)\right)\cos mx\,dx$$

Di nuovo, <u>supponiamo</u> che si possano scambiare serie e integrale

$$= \underbrace{\cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cos mx\,dx}}_{=0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx\,dx + b_k \cancel{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos mx\,dx}\right)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \cos mx\,dx = 0$$

perché la funzione integranda è dispari e l'intervallo è simmetrico ~~rispetto~~ all'origine.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = \underbrace{\cancel{\frac{1}{m} \cos kx \operatorname{sen} mx \Big|_{-\pi}^{\pi}}}_{=0} + \frac{k}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} mx \, dx$$

$$= \cancel{-\frac{k}{m^2} \operatorname{sen} kx \cos mx \Big|_{-\pi}^{\pi}} + \frac{k^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{k^2}{m^2}\right) \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0$$

$$\Rightarrow \text{ se } k \neq m \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0$$

$$\text{Se } k = m \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \qquad \left[\begin{matrix} mx = t \\ dx = \dfrac{dt}{m} \end{matrix}\right]$$

$$= \frac{1}{m} \int_{-m\pi}^{m\pi} \cos^2 t \, dt = \frac{1}{m} \int_{-m\pi}^{m\pi} \frac{1 + \cancel{\cos 2t}}{2} dt = \frac{1}{m} \frac{1}{2} \cdot 2m\pi = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx = a_m \pi$$

$$\Rightarrow \quad a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx$$

Moltiplico (*) per sen mx e integro

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} mx \, dx =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right) \right] \operatorname{sen} mx \, dx$$

Supponiamo di poter scambiare serie e integrale

$$= \underbrace{\frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \, dx}_{= 0} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \overbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \operatorname{sen} mx \, dx}^{= 0} + \right.$$

$$\left. + \, b_k \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} mx \, dx}_{= \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq m \\ \pi & \text{se } k = m \end{cases}} \right)$$

$$= b_m \pi$$

$$\Rightarrow \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx) \, dx$$

Def. I coeff.ti

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx \qquad k=0,1,2,\dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,kx\,dx \qquad k=1,2,\dots$$

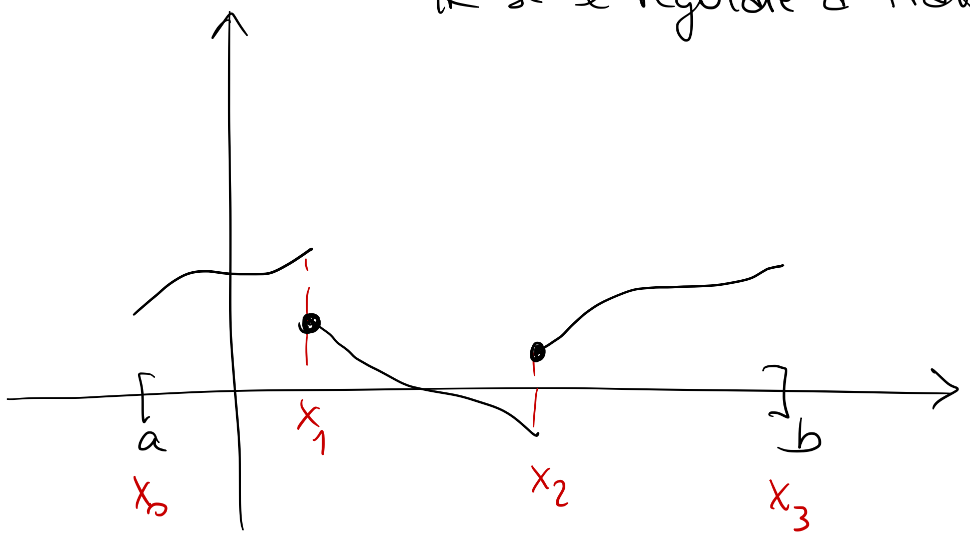
si chiamano coefficienti di Fourier di f.

La serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx + b_k\,\mathrm{sen}\,kx\right),$$

con questa scelta dei coefficienti, si chiama serie di Fourier di f.

Def. $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice <u>regolare a tratti</u> se esiste una partizione $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ di $[a,b]$ t.c., in ogni intervallo $[x_{k-1}, x_k]$ la funzione, dopo aver eventualmente cambiato i valori agli estremi, è di classe $C^1([x_{k-1}, x_k])$. f si dice regolare a tratti in $\mathbb{R}$ se è regolare a tratti in ogni $[a,b] \subset \mathbb{R}$.



Definiamo $f(x^+) = \lim\limits_{t \to x^+} f(t)$; $f(x^-) = \lim\limits_{t \to x^-} f(t)$

Ovviamente, se x è un punto di continuità, si ha

$$f(x^+) = f(x^-) = f(x)$$

TEOREMA Sia $f(x)$ regolare a tratti su $\mathbb{R}$ e periodica di periodo 2π. Allora la sua serie di Fourier converge $\forall x \in \mathbb{R}$, e la sua somma vale

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

OSS se x è un punto di continuità di $f(x)$, la somma della serie di Fourier vale $f(x)$;

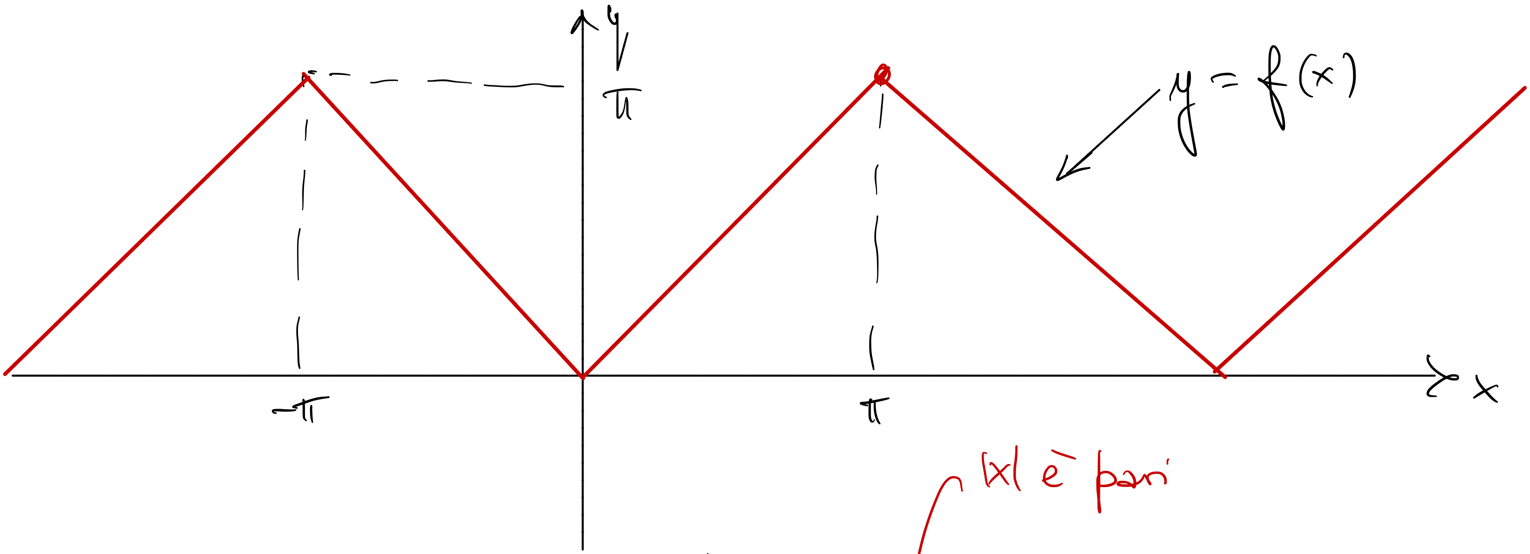
Se x è un punto di salto, la somma della serie vale il valor medio del limite da destra e del limite da sinistra.

In particolare, se f è 2π-periodica, regolare a tratti e continua, si ha

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx \right)$$

$f(x) = |x|$ se $x \in (-\pi, \pi]$,

prolungata su $\mathbb{R}$ in maniera 2π-periodica.



|x| è pari

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{\pi^2}{2} = \pi$$

la funzione integranda è dispari

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \operatorname{sen} kx\,dx = 0$$

integrando pari

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x \cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\cancel{\frac{1}{k}\, x \operatorname{sen} kx \Big|_0^{\pi}} - \frac{1}{k}\int_0^{\pi} \operatorname{sen} kx\,dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{1}{k^2} \cos kx \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi k^2}\left(\overbrace{\cos(k\pi)}^{(-1)^k} - 1 \right) = \begin{cases} 0, & k \text{ pari} \\ -\dfrac{4}{\pi k^2} & k \text{ dispari} \end{cases}$$

OSS se f è pari, allora tutti i b_k sono nulli

$\Rightarrow$ La serie di Fourier è fatta di soli coseni

Se f è dispari, allora tutti gli a_k sono nulli

$\Rightarrow$ La serie di Fourier è fatta di soli seni.

Nel caso $f(x) = |x|$, la serie di Fourier è

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k \text{ dispari}} \frac{1}{k^2} \cos kx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{(2h+1)^2} \cos (2h+1)x \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ continua.}}}{=} f(x)$$