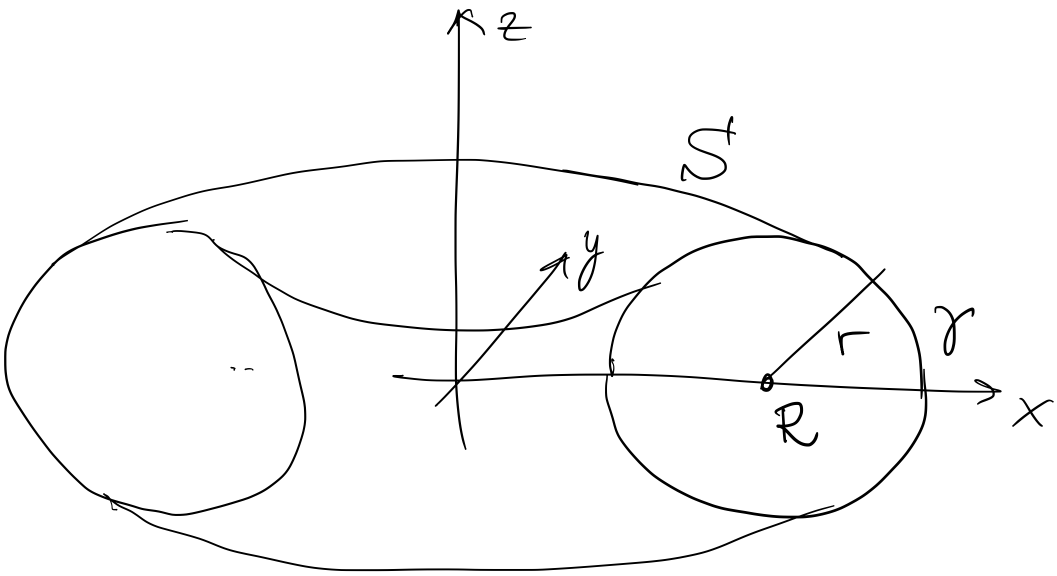
Applicazioni del teorema di Guldino

Se S è la superficie di rotazione intorno all'asse z ottenuta facendo ruotare intorno all'asse z la curva γ del semipiano (x,z), $x>0$, allora

$$\text{area } S = 2\pi \int_\gamma x \, ds = 2\pi x_B \text{ lungh.}(\gamma)$$

ascissa del baricentro di γ.

Area del toro (ciambella)



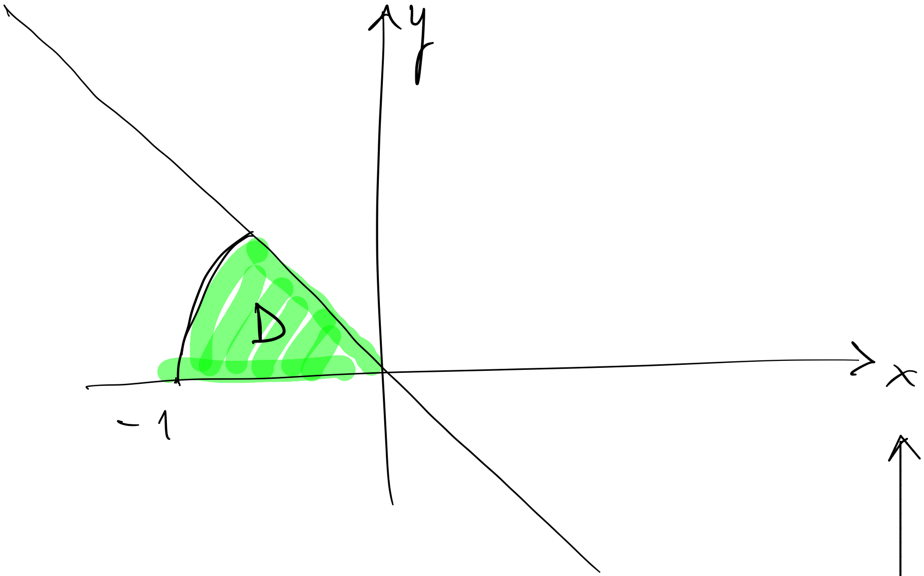
γ è la circonferenza di centro $(R,0)$ e raggio r

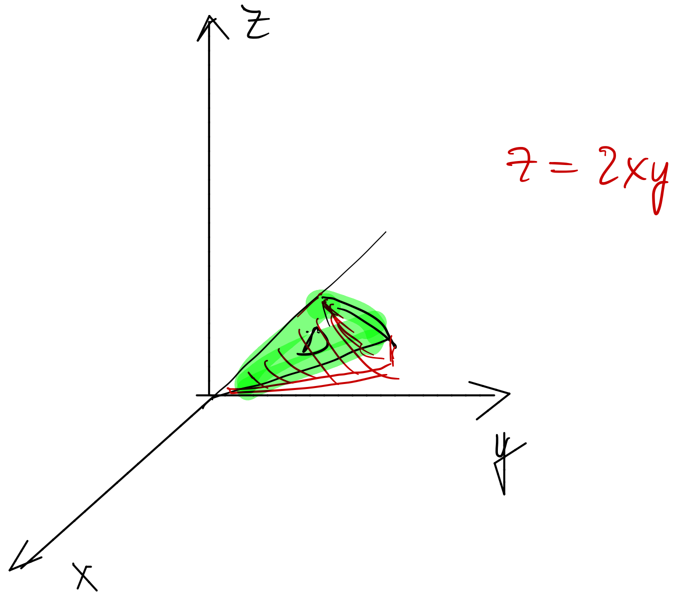
$$\text{Area } S = (2\pi R)(2\pi r) = 4\pi^2 R r.$$

ESERCIZIO Calcolare

$$\iint_S \frac{1}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, d\sigma$$

dove S è il grafico di $z = 2xy$, e (x,y) variano nel dominio D contenuto nei semipiani $y \geq 0$, $y \leq -x$, delimitato dalla circonferenza unitaria, dall'asse x e dalla retta $y = -x$.





$$\iint_S \frac{1}{(1+4(x^2+y^2))^{3/2}}\, d\sigma =$$

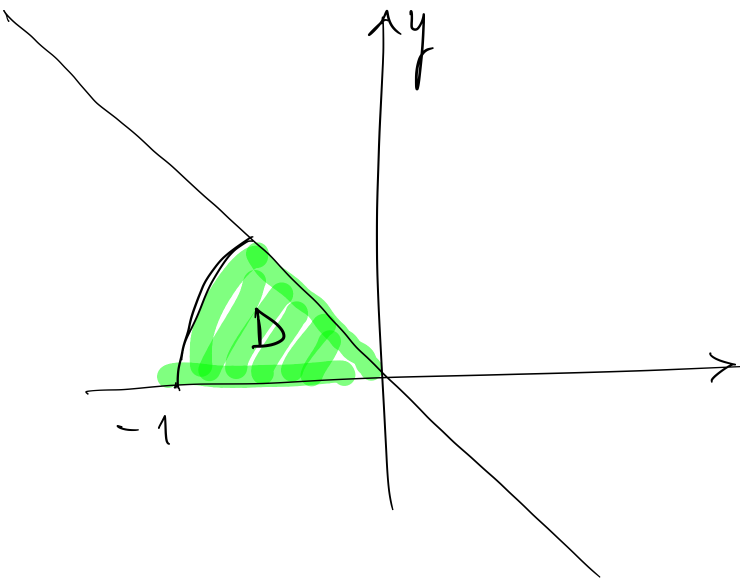
$$\iint_S \frac{1}{(1+4(x^2+y^2))^3}\, d\sigma = \iint_D \frac{[1+4(x^2+y^2)]^{1/2}}{[1+4(x^2+y^2)]^3}\, dx\,dy = (*)$$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 2xy = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in D.$$

$$\sqrt{A^2+B^2+C^2} = \sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+4y^2+4x^2}$$

$$(*) = \iint_D \frac{dx\,dy}{[1+4(x^2+y^2)]^{5/2}} =$$

(passiamo a coord. polari)



$$= \int_{3/4\pi}^{\pi} d\theta \, \frac{1}{8} \int_0^1 d\rho \, \frac{8\rho}{(1+4\rho^2)^{5/2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{8} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{1}{(1+4\rho^2)^{3/2}} \Bigg|_1^0 =$$

$$= \frac{\pi}{48}\left(1 - 5^{-3/2}\right)$$

In alternativa S si poteva parametrizzare così:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = 2\rho^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad (\theta,\rho) \in \left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right] \times [0,1].$$

$$\varphi_\rho = \left(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta,\ \overset{2\rho\operatorname{sen}(2\theta)}{\cancel{4\rho\cos\theta\operatorname{sen}\theta}}\right)$$

$$\varphi_\theta = \left(-\rho\operatorname{sen}\theta,\ \rho\cos\theta,\ 2\rho^2\underset{\cos(2\theta)}{\cancel{(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}}\right)$$

$$A = 2\rho^2\operatorname{sen}\theta\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) - 4\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta.$$

$$B = \ldots$$

$$C = \rho$$

$$\|\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v}\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\|\varphi_u\|^2 \cdot \|\varphi_v\|^2 - (\underline{\varphi_u} \cdot \underline{\varphi_v})^2}$$

Se $\underline{V}, \underline{W}$ sono due vettori di $\mathbb{R}^3$

$$\|\underline{V} \wedge \underline{W}\|^2 = \|\underline{V}\|^2\|\underline{W}\|^2 - (\underline{V}\cdot\underline{W})^2 \quad \text{(verifica facile)}$$

Poniamo $E = \|\varphi_u\|^2 \quad G = \|\varphi_v\|^2 \quad F = \varphi_u \cdot \varphi_v$

$$\|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{EG - F^2}.$$

Nel nostro caso. $E = \|\varphi_\rho\|^2 = 1 + 16\rho^2\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$

$$G = \|\varphi_\theta\|^2 = \rho^2 + 4\rho^4(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)^2$$

$$F = \underline{\varphi_\rho} \cdot \underline{\varphi_\theta} = 4\rho^3\operatorname{sen}(2\theta)\cos(2\theta)$$

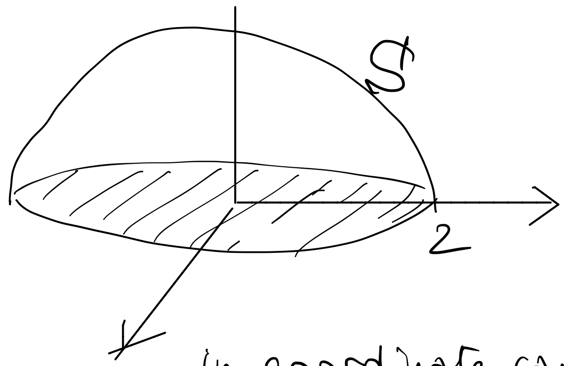
conti più complicati

OSS. Una superficie può essere "riparametrizzata" in altri modi:

Ad esempio, la semisfera

$$S = \{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2=4, \quad z \geq 0\}$$

può essere parametrizzata in vari modi:



in coord. sferiche

1) $$\begin{cases} x = 2\,\text{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = 2\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases}$$

$$(\theta,\varphi) \in \left[0,\tfrac{\pi}{2}\right] \times [0,2\pi].$$

oppure

in coordinate cartesiane,

2) $$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = \sqrt{4-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x,y) \in \{x^2+y^2 \leq 4\}$$

oppure

3) in coord. cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \\ z = \sqrt{4-\rho^2} \end{cases}$$

$$(\rho,\theta) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

$$x^2+y^2+z^2=4$$
$$\rho^2+z^2=4$$
$$z = \cancel{\pm}\sqrt{4-\rho^2}$$

Mi aspetto (e questo si può scrivere e giustificare rigorosamente) che area di S, gli integrali superficiali su S, versore normale, piano tg., non dipendano dalla parametrizzazione scelta.

Questo discorso si può rendere rigoroso con il concetto di "superficie equivalente" e di "diffeomorfismo" C^1.

Def. Superfici orientabili (cenni).

$\underline{\varphi}: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ superficie regolare.
dominio regolare

Sia $\mathring{D}$ l'insieme dei punti interni di D.

In ogni punto di $S_0 = \varphi(\mathring{D})$ è definito il versore normale $\underline{\nu} = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}$ è continuo in S_0

La superficie si dice orientabile se è possibile estendere ν a tutto $S = \varphi(D)$ in modo continuo

Una sfera, un cilindro, una superficie grafico sono orientabili.

Il nastro di Möbius non è orientabile

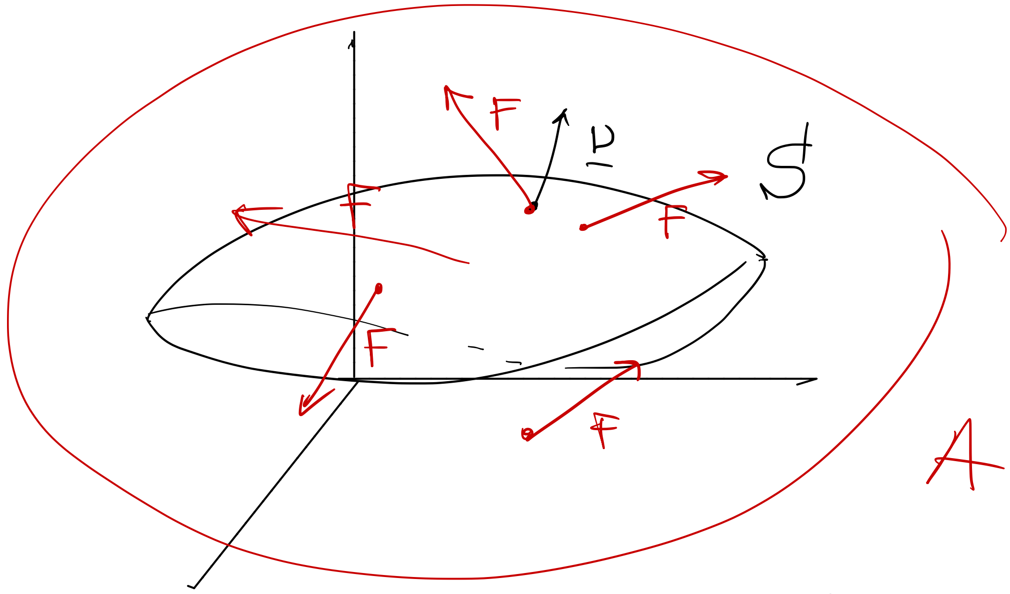
Sia φ una superficie ~~orientabile~~ regolare, di sostegno S.

$\varphi: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

Posso scegliere una "pagina" della superficie, cioè un campo di versori normali continui in S.

Sia ora $\underline{F}(x, y, z): A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

A aperto contenente S



$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

Def Flusso di $\underline{F}$ attraverso S. $= \iint_S \underline{F} \cdot \underline{\nu} \, d\sigma$

Se $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(u,v) \longmapsto \underline{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

$$\iint_S \underline{F}(x,y,z) \cdot \nu \, d\sigma =$$

$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$

$$= \iint_D \left(F_1(\underline{\varphi}(u,v)) \frac{A(u,v)}{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} + F_2(\varphi(u,v)) \frac{B(u,v)}{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} + \frac{F_3(\underline{\varphi}(u,v)) \, C(u,v)}{\cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}} \right) \cdot$$

$$\cdot \cancel{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \, du\,dv$$

$$= \iint_D \left[F_1(\varphi(u,v)) \, A(u,v) + F_2(\underline{\varphi}(u,v)) \, B(u,v) + F_3(\varphi(u,v)) \, C(u,v) \right] du\,dv$$

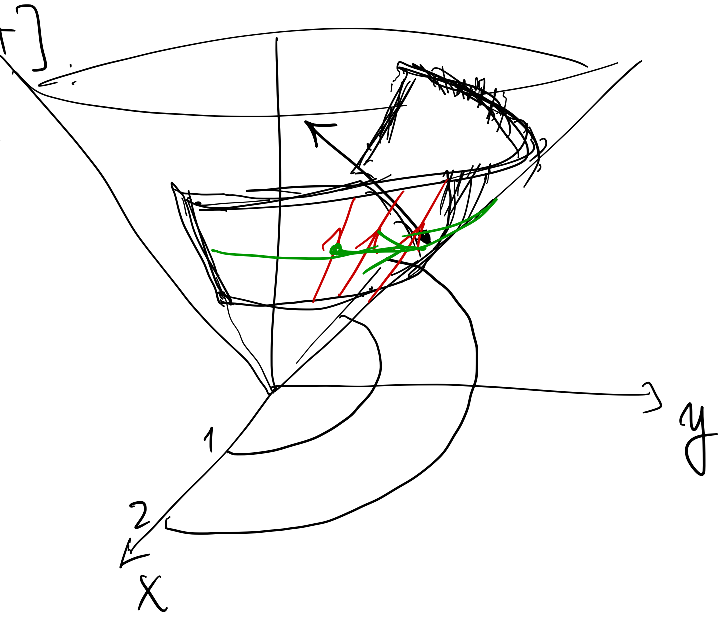
ESEMPIO Calcolare il flusso del campo vettoriale

$\underline{F}(x,y,z) = (x, y, z^2)$,

attraverso il cono $\sigma(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, u)$

$(u,v) \in [1,2] \times [0,\pi]$.

con normale orientata verso l'alto.



$\sigma_u(u,v)$

$\sigma_u = (\cos v, \operatorname{sen} v, 1)$

$\sigma_v = (-u \operatorname{sen} v, u\cos v, 0)$

$A(u,v) = -u\cos v$, $B(u,v) = -u \operatorname{sen} v$, $C(u,v) = u$

Verifico che il verso di questo vettore sia corretto.

ok perché $C(u,v) = u > 0$

$$\text{Flusso} = \iint_{\substack{D \\ = \\ [1,2]\times[0,\pi]}} \left[(u\cos v)(-u\cos v) + (u \operatorname{sen} v)(-u \operatorname{sen} v) + u^2 \cdot u \right] du\,dv$$

$$= \iint_D (-u^2 + u^3)\, du\,dv = \int_1^2 du \int_0^\pi dv\, (u^3 - u^2) =$$

$$= \pi \left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3} \right)\Bigg|_1^2$$

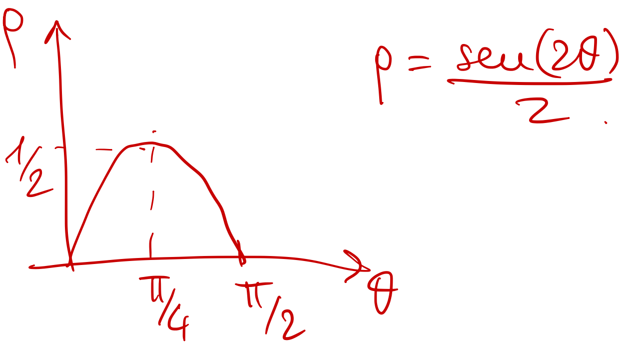
<u>Esercizio</u> Sia γ la curva del piano xy di eq^{ne} polare

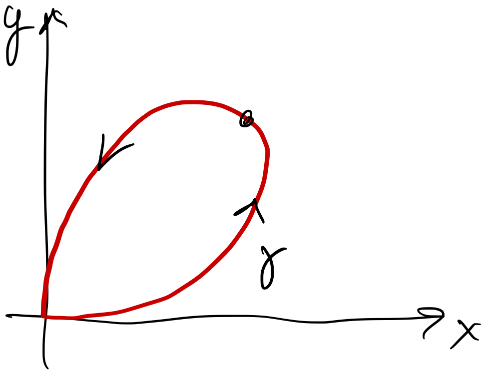
$$\rho = \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

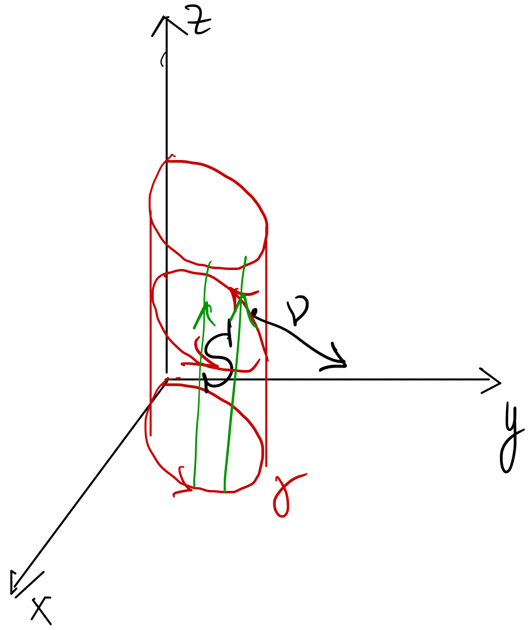
e sia S il cilindro retto avente per base γ di altezza $h=2$, posto nel semispazio $z \geq 0$.

Calcolare il flusso <u>uscente</u> da S del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 0,\ z^2\right).$$







Eq^{ni} parametriche di S.

$$\psi : \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta \\ y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(\theta, z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

$$\psi: \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = \operatorname{sen}\theta\cos^2\theta \\ y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}^2\theta\cos\theta \\ z = z \end{cases} \qquad (\theta, z) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2].$$

$$\psi_\theta = \left(\cos^3\theta - 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta,\ 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta,\ 0\right)$$

$$\psi_z = (0,\ 0,\ 1).$$

$$A(\theta, z) = 2\operatorname{sen}\theta\cos^2\theta - \operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta\left(2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)$$

$$B(\theta, z) = 2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - \cos^3\theta = \cos\theta\left(2\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta\right).$$

$$C(\theta, z) = 0$$

E' orientato correttamente? (verso l'esterno?)

Se prendo $\theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$A\left(\frac{\pi}{4}, z\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = B\left(\frac{\pi}{4}, z\right) > 0 \Rightarrow$ OK, punta verso l'esterno.

oppure si verifica con la regola della mano destra.

$$\text{Flusso} = \iint_S \underline{F} \cdot \underline{\nu}\, d\sigma = \iint_D \Big[(\operatorname{sen}\theta\cos\theta)\left(\operatorname{sen}\theta\left(2\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right)\right) +$$

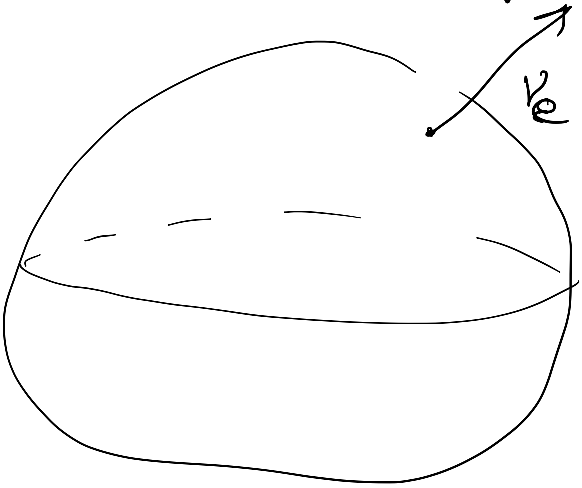
$$+ 0 \cdot B(\theta, z) + z^2 \cdot 0 \Big]\, d\theta\, dz =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \underbrace{\int_0^2 dz}_{=2} \big(2\operatorname{sen}^2\theta \underbrace{\cos^3\theta}_{=(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta} - \operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\big) =$$

$$\operatorname{sen}\theta = t$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} d\theta \left(2\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta - 3\operatorname{sen}^4\theta\cos\theta\right) = 2\left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$$

Sia $E \subset \mathbb{R}^3$ un dominio regolare. Si dimostra che ∂E è unione di un numero finito di sostegni di superfici regolari orientabili. Stabiliamo di orientare queste superfici in modo che il versore normale sia quello esterno



$\underline{\nu} = \underline{\nu}_e$

Sia ora $\underline{F}(x,y,z)$ un campo vettoriale $C^1(E;\mathbb{R}^3)$

Definiamo $\operatorname{div} \underline{F}(x,y,z) = \dfrac{\partial F_1}{\partial x} + \dfrac{\partial F_2}{\partial y} + \dfrac{\partial F_3}{\partial z}$

$\operatorname{div} F \in C(E;\mathbb{R})$

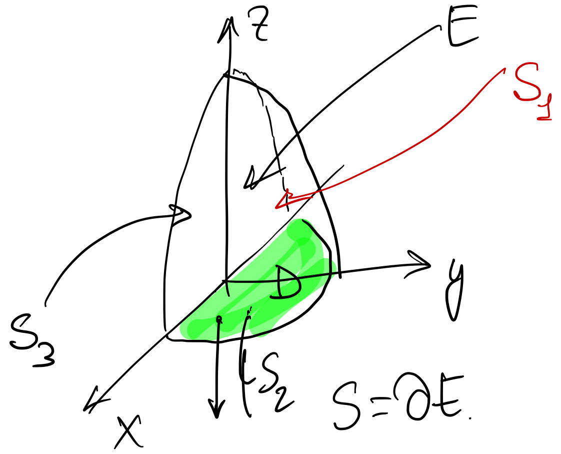
TEOREMA DELLA DIVERGENZA in dim. 3

Sia E un dominio regolare di $\mathbb{R}^3$. Sia $\underline{F}(x,y,z)$ un campo vettoriale $C^1(E;\mathbb{R}^3)$. Allora

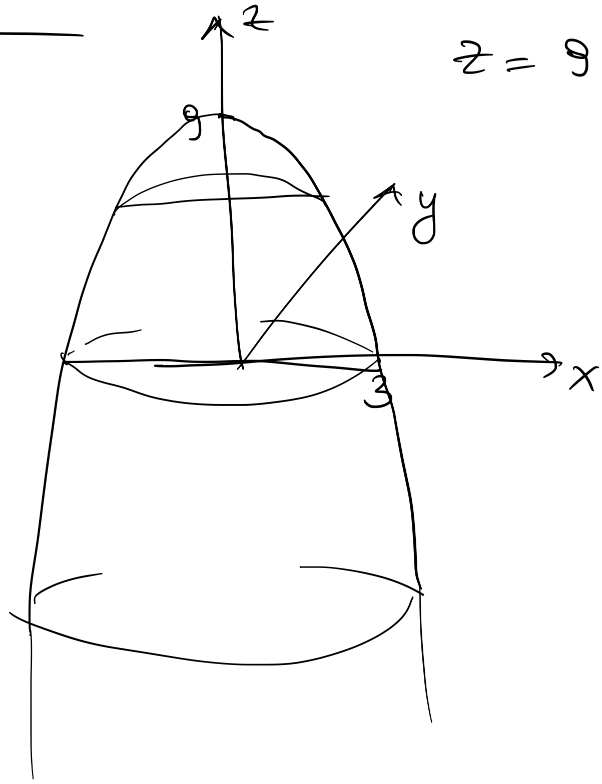
$$\underbrace{\iint_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma}_{\text{flusso di } \underline{F} \text{ uscente da } \partial E} = \iiint_E \operatorname{div} F \, dx\,dy\,dz.$$

ESEMPIO Dato il campo $\underline{F}(x,y,z) = (y^2 e^z, y^3, 3x^2 z)$, calcolare il flusso di $\underline{F}$ uscente da $\overset{+}{S}$, frontiera del dominio E delimitato dal paraboloide $z = 9 - x^2 - y^2$, dal piano xz, dal piano xy, e contenuto nel semispazio $y \geq 0$.

$z = 9 - x^2 - y^2$



$z = 9 - x^2$



$$\iint_{\overset{+}{S}} \underline{F} \cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma \overset{\text{thm. div}}{=} \iiint_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy\,dz = 3 \iiint_E (x^2 + y^2)\, dx\,dy\,dz \overset{(*)}{=}$$

$\underline{F}(x,y,z) = (y^2 e^z, y^3, 3x^2 z)$

$\operatorname{div} \underline{F} = 0 + 3y^2 + 3x^2$

E in coord. cilindriche diventa

$\tilde{E} = \{(\rho, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \rho \leq 3, 0 \leq z \leq 9 - \rho^2\}$

$$(*) = 3 \int_0^{\pi} d\theta \int_0^3 d\rho \int_0^{9-\rho^2} dz \; \rho^2 \cdot \rho = 3\pi \int_0^3 d\rho \, \rho^3 (9 - \rho^2) =$$

$$= 3\pi \int_0^3 (9\rho^3 - \rho^5) = 3\pi \left(\frac{9}{4} 3^4 - \frac{3^6}{6} \right)$$

A titolo di mero esercizio, impostiamo il calcolo diretto del flusso.

$$\partial E = \Sigma = S_1 \cup S_2 \cup S_3$$

pezzo del piano xz.

pezzo del piano xy

il pezzo di paraboloide

$$\iint_\Sigma \underline{F}\cdot \underline{\nu}_e \, d\sigma = \iint_{S_1} \dots + \iint_{S_2} \dots + \iint_{S_3} \dots =$$

$$\iint_{S_1} \underline{F}\cdot \nu_e \, d\sigma =$$

0 per simmetria

$$= \iint_D \left(\cancel{y^2 e^{9-x^2-y^2}}\, 2x + y^3 \cdot 2y + 3x^2(9-x^2-y^2)\cdot 1 \right) dx\,dy$$

$$= \int_0^\pi d\theta \int_0^3 d\rho \left(2\rho^4 \sin^4\theta + 3\rho^2 \cos^2\theta \,(9-\rho^2) \right) \rho = \text{etc.}$$

$$\psi_1 \quad \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 9 - x^2 - y^2 \end{cases}$$

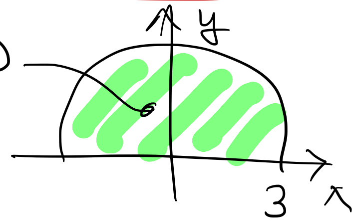
$A(x,y) = 2x$

$B(x,y) = 2y$

$C(x,y) = 1$

OK, è esterno

$(x,y) \in D$



Su S_2 $\quad \underline{\nu}_e = (0, 0, -1) \quad F_3(x,y,0) = 0$

$$\Rightarrow \quad \underline{F}\cdot \underline{\nu}_e = 0. \quad \Rightarrow \quad \iint_{S_2} \underline{F}\cdot \underline{\nu}_e = 0$$

Su S_3 $\quad \nu_e = (0, -1, 0) \quad F_2(x,0,z) = 0 \Rightarrow \iint_{S_3} \underline{F}\cdot \underline{\nu}_e = 0.$

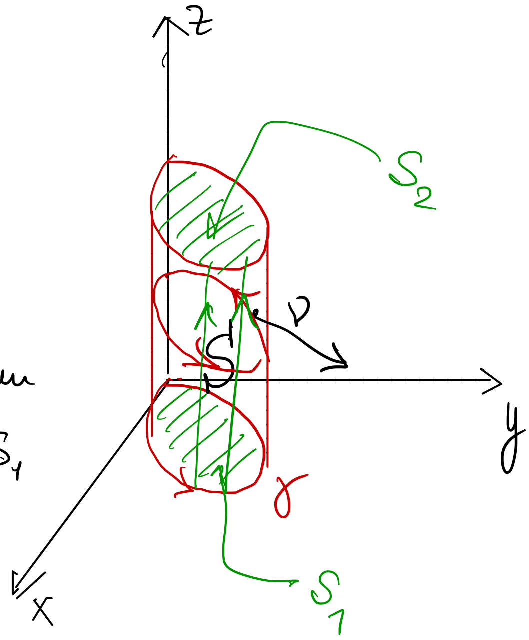
Esercizio. Sia γ la curva del piano xy di eq^{ne} polare

$$\rho = \operatorname{sen}\theta\cos\theta = \frac{\operatorname{sen}(2\theta)}{2} \qquad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

e sia S il cilindro retto avente per base γ di altezza $h=2$, posto nel semispazio $z \ge 0$.

Calcolare il flusso uscente da S del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ 0,\ z^2\right).$$



Si può risolvere con il teorema della divergenza?

Attenzione: S non è la frontiera di un dominio. Se però aggiungo il "fondo" S_1 il "tappo" S_2 del cilindro, diventa la frontiera di un dominio regolare

$$\iint_S \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e\, d\sigma + \iint_{S_1} \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e + \iint_{S_2} \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}\underline{F}\, dx\,dy\,dz$$

$$\Rightarrow \iint_S \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e\, d\sigma = \iiint_E \operatorname{div}\underline{F}\, dx\,dy\,dz - \underbrace{\iint_{S_1} \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e}_{=0} - \underbrace{\iint_{S_2} \underline{F}\cdot\underline{\nu}_e\, d\sigma}_{=4\ \text{area}\ S_1}$$

$$\operatorname{div}\underline{F} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0 + 2z.$$

$$\iiint_E \operatorname{div}\underline{F}\, dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} d\rho \int_0^2 dz \left(\frac{\cancel{\rho}\cos\theta}{\cancel{\rho}} + 2z\right)\rho =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta\operatorname{sen}\theta} d\rho\ \rho\left(\cos\theta\, 2 + 4\right) = \int_0^{\pi/2} d\theta\ (\cos\theta + 2)\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta$$

área $S_1 = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\cos\theta \operatorname{sen}\theta} d\rho \; \rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta =$

$= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta)\, d\theta$