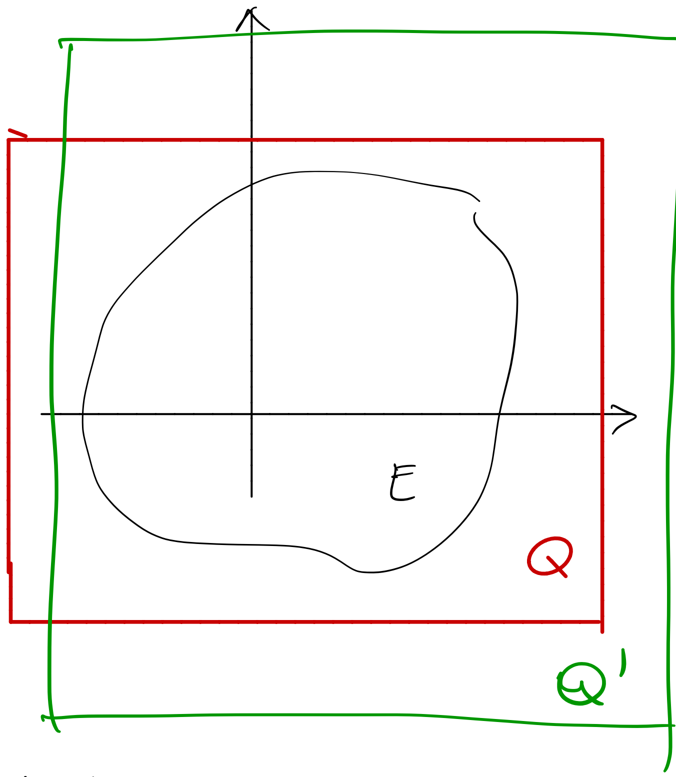
Integrali doppi su domini non rettangolari

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme limitato.
Sia $f(x,y): E \to \mathbb{R}$ una funzione limitata

Sia Q un rettangolo contenente E



Estendo f a tutto Q, ponendo

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \in Q \setminus E \end{cases}$$

Se la funzione $\tilde{f}$ è integrabile secondo Riemann in Q, poniamo

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \iint_Q \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy$$

Si dimostra facilmente che l'esito di questa operazione non dipende dalla scelta di Q.

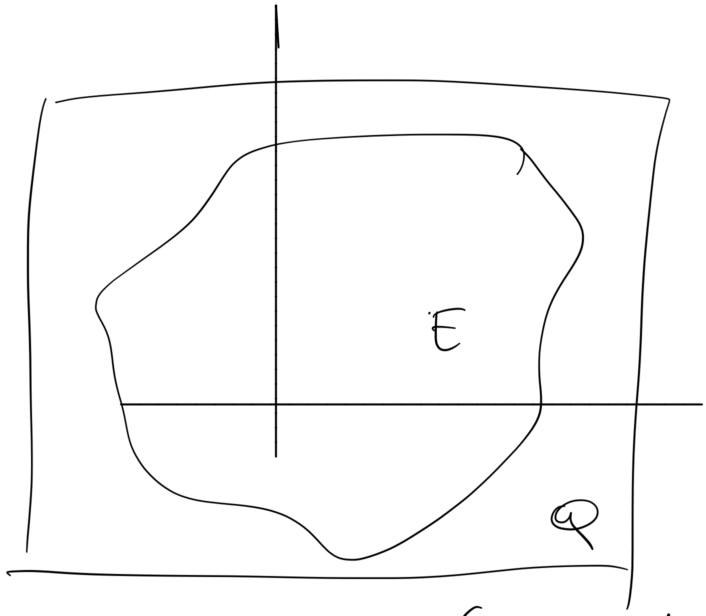
Due obiettivi:

1) dare delle condizioni su E e su f affinché l'integrale si possa calcolare
2) Formule per il calcolo (formule di riduzione).

DEF $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato è un insieme misurabile (secondo Peano-Jordan), se la funzione $f(x,y) \equiv 1$ è integrabile secondo Riemann su E, cioè se

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{su } E \\ 0 & \text{in } Q \setminus E \end{cases}$$

è integrabile in Q, dove Q è un rettangolo contenente E.



la funzione che vale 1 su un insieme e 0 fuori dall'insieme E si dice funzione caratteristica (o indicatrice) di E

$$\chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin E. \end{cases}$$

Quindi E si dice misurabile se χ_E è integrabile in $Q \supset E$.

Definiamo $\operatorname{mis}(E) = \operatorname{area}(E) = \iint_E 1 \, dx\,dy = \iint_Q \chi_E(x,y)\,dx\,dy$

Se E un rettangolo $\Rightarrow$ E è misurabile,
area (E) = base x altezza

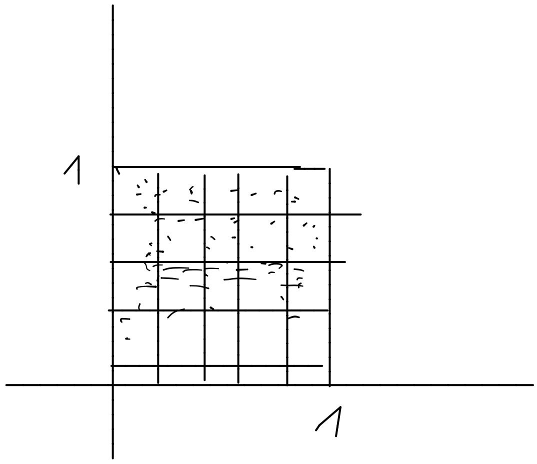
Esempio di insieme non misurabile

$$E = \{(x,y) \in [0,1]^2 : x, y \in \mathbb{Q}\} = \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$$

non è misurabile, perché, preso

$Q = [0,1]^2 \supset E$

e definita



$$\chi_E(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x,y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>funzione di Dirichlet.</u>

Questa funzione non è integrabile in $[0,1]^2$.

$\forall$ partizione $\mathcal{P}$ di $[0,1]^2$ si ha:

$$S(\mathcal{P}) = 1 \qquad s(\mathcal{P}) = 0$$

$$\Longrightarrow \inf_{\mathcal{P}} S(\mathcal{P}) = 1 > \sup_{\mathcal{P}} s(\mathcal{P}) = 0$$

Criteri di misurabilità:

PROPOSIZIONE Un insieme $E \subset \mathbb{R}^2$ limitato è misurabile secondo PJ se e solo se ∂E ha misura nulla

Nel caso precedente $E = \mathbb{Q}^2 \cap [0,1]^2$

$\partial E = [0,1]^2$, $\quad mis(\partial E) = 1$

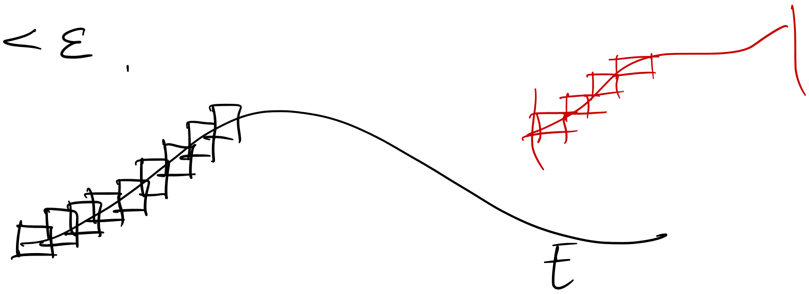
PROPOSIZIONE (Caratterizzazione degli insiemi di misura nulla)

$E \subset \mathbb{R}^2$ limitato ha misura (PJ) nulla se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ famiglia finita di rettangoli $\{Q_j\}_{j=1 \dots n}$

che ricopre E (cioè $\bigcup_{j=1}^{n} Q_j \supset E$).

e t.c. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} area(Q_j) < \varepsilon$.



Esempi di insiemi di misura nulla:

$E = \{(x_0, y_0)\}$

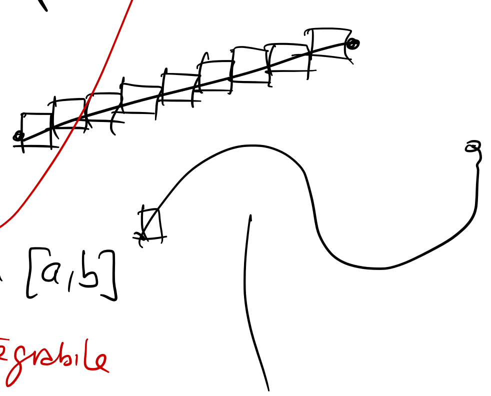
$E =$ insieme finito (cioè costituito da un numero finito di punti).

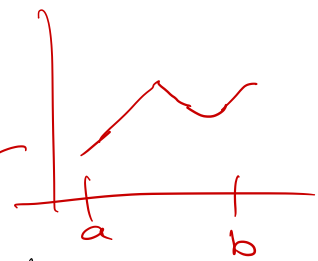
$E =$ segmento

$E =$ sostegno di una curva regolare

$E =$ grafico di una funzione continua in $[a,b]$

oppure Riemann-integrabile





TEOREMA Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ misurabile secondo PJ, e sia $f(x,y): E \to \mathbb{R}$ continua (eccetto in un insieme di misura nulla) e limitata in E.

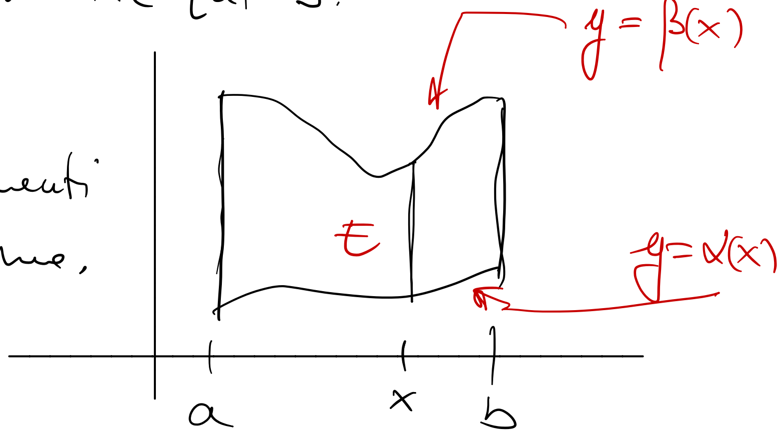
Allora f è Riemann-integrabile in E.

DEF Si dice insieme normale (o semplice) rispetto alla x un insieme di questa forma

$$E = \{(x,y) : \quad a \le x \le b \,, \quad \alpha(x) \le y \le \beta(x)\}$$

dove $\alpha, \beta : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sono continue e t.c

$$\alpha(x) \le \beta(x) \quad \text{per ogni } x \in [a,b].$$



E è misurabile, perché ∂E è fatto da 4 pezzi: due segmenti e due grafici di funzioni continue, tutti di misura nulla

$$\text{area } E = \int_a^b [\beta(x) - \alpha(x)] \, dx$$

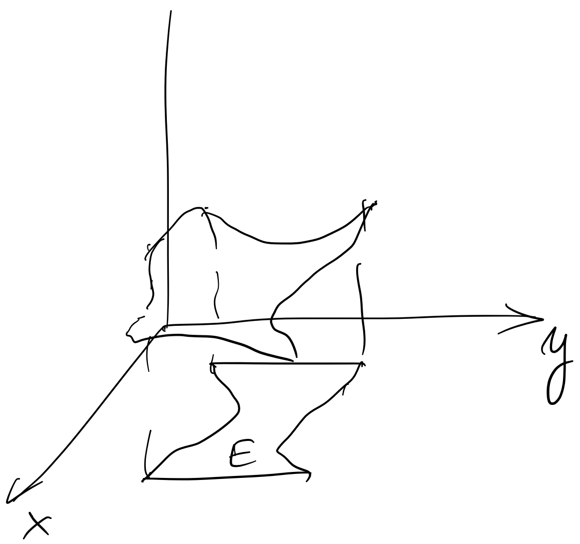
TEOREMA (formule di riduzione per un dominio normale).

Sia $E = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ un dominio normale rispetto alla x.

Sia inoltre $f(x,y) : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua ($\Rightarrow$ OSS. f limitata). Allora la funzione

$$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \quad \text{è continua in } [a,b]$$

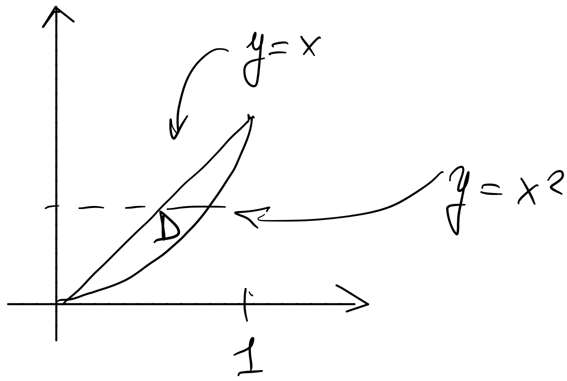
$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$



Esempio

$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy$$

dove $D = \{(x,y):\quad 0 \le x \le 1,\quad x^2 \le y \le x\}$.



$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{x} (2x+3y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_0^1 dx \left[2x(x-x^2) + \frac{3}{2} y^2 \Big|_{y=x^2}^{y=x} \right] =$$

$$= \int_0^1 dx \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^4 \right] =$$

$$= \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{6} - \frac{1}{2} - \frac{3}{10} = \frac{35-15-9}{30} = \frac{11}{30}$$

OSS D è anche un dominio normale rispetto alla y

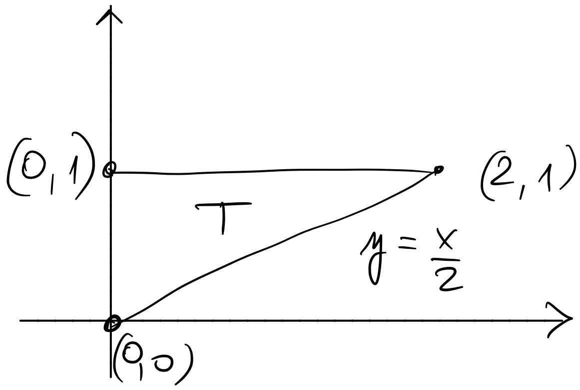
$D = \{(x,y):\quad 0 \le y \le 1,\quad y \le x \le \sqrt{y}\}$

$$\iint_D (2x+3y)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left[\int_y^{\sqrt{y}} dx\,(2x+3y) \right] =$$

$$= \int_0^1 dy \left(x^2 \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} + 3y(\sqrt{y}-y) \right) = \int_0^1 dy \left(y - y^2 + 3y^{3/2} - 3y^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + 3\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} = \frac{15-40+36}{30} = \frac{11}{30}$$

ESERCIZIO Calcolare $\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy$ dove T è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$



1° modo: $T = \{ (x,y) : \quad 0 \le x \le 2 , \quad \frac{x}{2} \le y \le 1 \}$

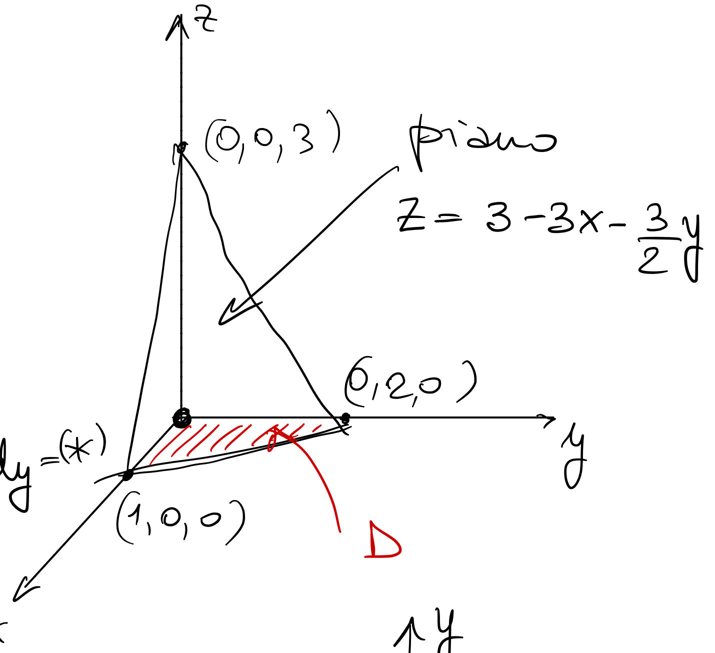
$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^2 dx \left(\int_{x/2}^1 dy \; e^{y^2} \right) = (\text{non so calcolarlo})$$

2° modo: $T = \{(x,y) : \quad 0 \le y \le 1 , \quad 0 \le x \le 2y\}$

$$\iint_T e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \left(\int_0^{2y} dx \; e^{y^2} \right) = \int_0^1 dy \; e^{y^2}\, 2y =$$

$$= e^{y^2}\Big|_0^1 = e - 1$$

Calcolare il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,3)$.



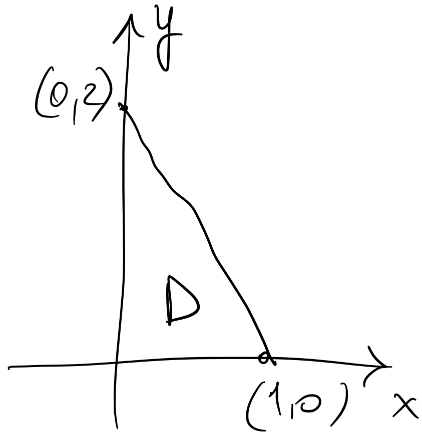
$$z = ax + by + 3$$

$$0 = a + 3 \Rightarrow a = -3$$

$$0 = 2b + 3 \Rightarrow b = -3/2$$

$$\text{Volume (tetraedo)} = \iint_D 3\left(1 - x - \frac{y}{2}\right) dx\,dy \overset{(*)}{=}$$

dove D = triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,2)$ nel piano xy.



$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - 2x\}.$$

$$(*) = 3 \int_0^1 dx \int_0^{2(1-x)} dy \left(1 - x - \frac{y}{2}\right) =$$

$$= 3 \int_0^1 dx \left[2(1-x)^2 - \frac{1}{4} y^2 \Big|_{y=0}^{y=2(1-x)} \right] = 3 \int_0^1 dx \left[2(1-x)^2 - (1-x)^2 \right] =$$

$$= 3 \int_0^1 dx\,(x-1)^2 = \frac{3}{3} (x-1)^3 \Big|_0^1 = 1.$$

in accordo con la formula

$$\text{Vol} = \frac{(\text{Area base}) \times h}{3}.$$