Campi vettoriali = Forme differenziali

$N=2$ per semplicità

Campi vettoriali	Forme differenziali
$\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$	$\omega = F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy$
$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ C^0 opp. C^1	$F_1, F_2 : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^0 opp. C^1
campo vettoriale	forma differenziale
Lavoro di $\underline{F}$ lungo una curva $\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ regolare	$\int_\gamma \omega = \int_\gamma F_1\,dx + F_2\,dy =$
$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underline{\gamma}'(t)\,dt =$	$= \int_a^b [F_1(\underline{\gamma}(t))\,x'(t) + F_2(\underline{\gamma}(t))\,y'(t)]\,dt$
$= \int_a^b [F_1(\gamma(t))\,x'(t) + F_2(\gamma(t))\,y'(t)]\,dt$	$\gamma(t) = (x(t), y(t)),\ t \in [a,b]$
$\underline{F}$ si dice $\boxed{\text{conservativo}}$ in A se $\exists\, V : A \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\nabla V = \underline{F}$	ω si dice $\boxed{\text{esatta}}$ se $\exists\, V : A \to \mathbb{R}$ t.c. $\omega = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$
V si dice $\boxed{\text{potenziale}}$ di $\underline{F}$	V si dice $\boxed{\text{primitiva}}$ di ω.
$\underline{F}$ si dice $\boxed{\text{irrotazionale}}$ se $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$	ω si dice $\boxed{\text{chiusa}}$ se vale la stessa condizione
Il lavoro di un campo vettoriale conservativo lungo una curva γ è pari alla differenza di potenziale tra i due estremi	L'integrale di una f.d. esatta lungo una curva γ è pari alla differenza tra i valori della primitiva nei due estremi della curva.

F campo vettoriale C^1, allora	ω f.d. C^1
F conservativo $\Rightarrow$ F irrotazionale	ω esatta $\longrightarrow$ ω chiusa
il viceversa è in generale falso	il viceversa è in generale falso

A aperto di $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^N)$

Def A connesso se ogni coppia P_1, P_2 di punti di A si può collegare con una curva regolare a tratti tutta contenuta in A.

Def. A semplicemente connesso se:

1) è connesso;
2) ogni curva chiusa e semplice può essere "deformata" con continuità a un punto senza uscire da A.

"ogni curva chiusa e semplice è omòtopa a un punto in A".

OSS $\left.\begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2 \leq 1\} \end{array}\right\}$ connessi ma non sempl. connessi.

OSS $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ è sempl. connesso

$\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{asse } z\}$ non è sempl. connesso

Una ciambella (toro) in $\mathbb{R}^3$ non è sempl. connesso

Caratterizzazione $\begin{cases}\text{dei campi vettoriali conservativi} \\ \text{delle f.d. esatte}\end{cases}$

A aperto connesso di $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^N)$

TEOREMA di caratterizzazione etc...

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vettoriale continuo
ω definita in A una f.d. continua.

Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

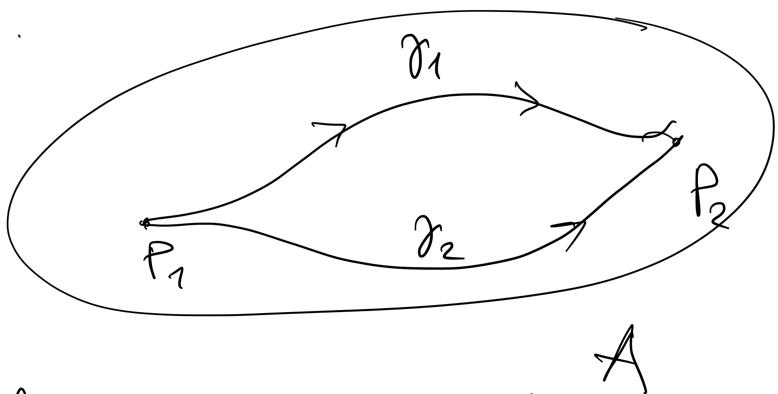
1) $\underline{F}$ conservativo in A $\quad$ ω esatta in A

2) Il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva chiusa in A vale zero.
L'integrale di ω " " " " " " " " "

3) Il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva regolare a tratti con sostegno in A dipende solo dagli estremi della curva e non dal percorso seguito.
L'integrale di ω - - - - - - - -

DIM.

1) $\Rightarrow$ 2) già fatto.



2) $\Rightarrow$ 3)

Tesi $\displaystyle\int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds.$

Sia $\gamma = \gamma_1 \cup (\gamma_2^-)$ la curva che prima percorre γ_1 e poi percorre γ_2 in senso opposto
?

Per ipotesi

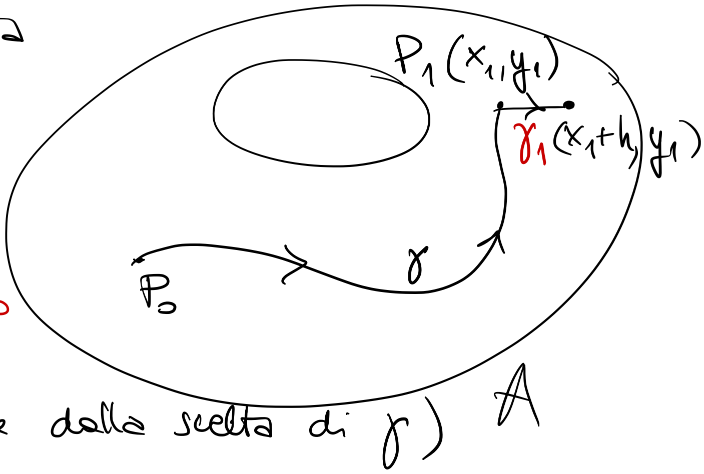
$$0 = \int_{\gamma} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds + \int_{\gamma_2^-} F\cdot T\, ds = \int_{\gamma_1} F\cdot T\, ds - \int_{\gamma_2} F\cdot T\, ds$$

3) $\Rightarrow$ 1).

Sappiamo che il lavoro di $\underline{F}$ lungo una curva γ dipende solo dagli estremi. Fisso $P_0 = (x_0, y_0) \in A$.

Preso un qualsiasi $P_1 = (x_1, y_1)$, sia γ una qualsiasi curva che collega P_0 a P_1. Poniamo

esiste perché A convesso



$$V(x_1, y_1) = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$$ (per ipotesi non dipende dalla scelta di γ)

Voglio provare che V è il potenziale di $\underline{F}$, cioè

$$\frac{\partial V}{\partial x} = F_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = F_2 .$$

↑ proviamo questa.

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x_1+h, y_1) - V(x_1, y_1)}{h} = (*)$$

Per calcolare $V(x_1+h, y_1)$, prendo la stessa curva γ di prima, e le aggiungo il segmento $\gamma_1 \begin{cases} x = t \\ y = y_1 \end{cases}$ $t \in [x_1, x_1+h]$

per sempl. $h > 0$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \Big[\underbrace{\cancel{\int_\gamma F \cdot T\, ds} + \int_{\gamma_1} F \cdot T\, ds}_{V(x_1+h, y_1)} - \cancel{\int_\gamma F \cdot T\, ds} \Big] =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1+h} F_1(t, y_1) \cdot 1\, dt$$

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_1, y_1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{x_1}^{x_1+h} F_1(t, y_1)\, dt = (*)$$

Per il teorema della media esiste un punto $\overset{= \xi(h)}{\xi}$ compreso tra x_1 e x_1+h t.c

$$\frac{1}{h}\int_{x_1}^{x_1+h} F_1(t, y_1)\,dt = F_1(\xi, y_1)$$

$$(*) = \lim_{h \to 0} F_1(\xi(h), y_1) =$$

$$= F_1(x_1, y_1)$$

<u>OSS</u> quando $h \to 0$, $\xi(h) \to x_1$

$x_1 \quad \xi \quad x_1+h$

$\square$

TEOREMA A aperto sempl. connesso di $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^N)$

Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale da A in $\mathbb{R}^2$ di classe C^1.

Se F è irrotazionale, allora è conservativo

ω è chiusa ‖ è esatta

La dim. (in dim. 2) è rimandata a quando conosceremo il teorema di Stokes.

ESERCIZIO Dire a priori se la forma differenziale

$$\omega = (3x^2y + xy^2+2)\,dx + (x^3 + x^2y - 1)\,dy$$

è esatta nel suo dominio $(\mathbb{R}^2)$, e in tal caso cercarne una primitiva.

OSS Questo equivale a chiedersi se il campo vett.

$$\underline{F}(x,y) = (3x^2y + xy^2+2,\ x^3 + x^2y - 1) \text{ è conservativo.}$$

$A = \mathbb{R}^2$ sempl. connesso, quindi

$$\omega \text{ esatta} \iff \omega \text{ chiusa}$$

Verifichiamo se ω chiusa

$$\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y + xy^2+2) \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x^2y - 1)$$

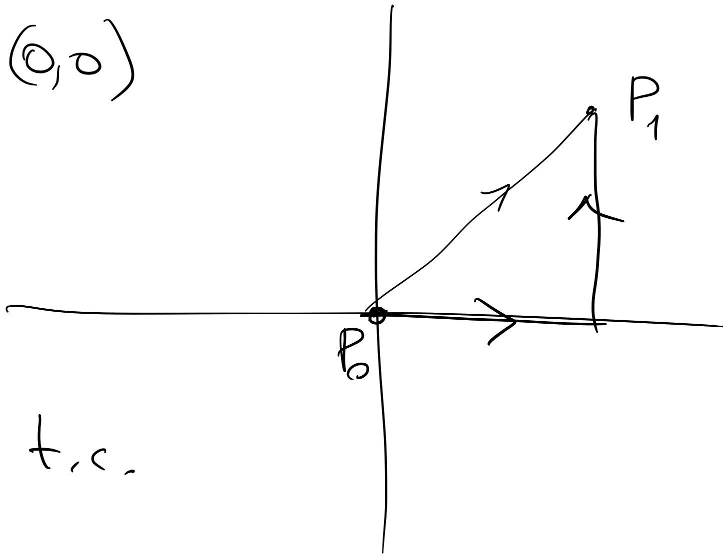
$$3x^2 + 2xy \overset{?}{=} 3x^2 + 2xy$$

ω chiusa $\Rightarrow$ ω esatta

Cerco un potenziale

1) Idea simile a prima:

Fisso un punto $(x_0,y_0)=(0,0)$
e, $\forall\, (x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$



2) Cerco una $V\in C^1(\mathbb{R}^2)$ t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = 3x^2y + xy^2 + 2 \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} = x^3 + x^2y - 1 \end{cases}$$

$$V(x,y) = \int \frac{\partial V}{\partial x}\,dx = \int (3x^2y + xy^2 + 2)\,dx =$$

$$= x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x + g(y)$$

Uso la seconda eq^{ne}.

$$\cancel{x^3} + \cancel{x^2y} + g'(y) = \frac{\partial V}{\partial y} = \cancel{x^3} + \cancel{x^2y} - 1$$

$$\Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y + c$$

$$\Rightarrow V(x,y) = x^3y + \frac{x^2y^2}{2} + 2x - y + c.$$

Esercizio Calcolare l'integrale della forma differenziale

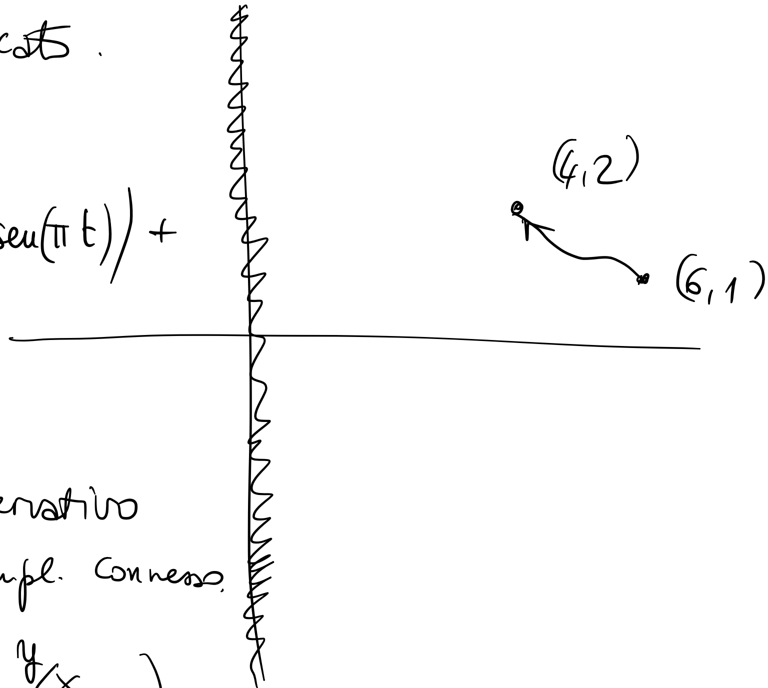
$$\omega = \left(1 - \frac{y}{x}\right) e^{y/x}\, dx + e^{y/x}\, dy$$

lungo la curva $\underline{\gamma}(t) = \left(5 + \cos(t\pi),\ t^2+1\right) \quad t \in [0,1]$.

OSS Il calcolo diretto è complicato.
Verrebbe

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 dt \left[\left(1 - \frac{t^2+1}{5+\cos t\pi}\right) e^{\frac{t^2+1}{5+\cos t\pi}} \left(-\pi \operatorname{sen}(\pi t)\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{t^2+1}{5+\cos t\pi}}\, 2t \right]$$



OSS Vediamo se il campo è conservativo in $A = \{(x,y) : x > 0\}$ aperto sempl. connesso.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(1 - \frac{y}{x}\right) e^{y/x}\right] \overset{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{y/x}\right)$$

OK, è vero!

ω è chiusa $\Rightarrow$ ω è esatta $\Rightarrow$ cerco potenziale V t.c.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) e^{y/x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = e^{y/x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \left(1 - \dfrac{y}{x}\right) e^{y/x} \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = e^{y/x} \end{cases} \Rightarrow V(x,y) = \int e^{y/x}\, dy =$$

$$= x e^{y/x} + g(x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \left(\cancel{1} - \frac{y}{x}\right) e^{y/x}$$

$$\shortparallel$$

$$\cancel{e^{y/x}} + x e^{y/x} \left(-\frac{y}{x^2}\right) + g'(x)$$

$$\Rightarrow g'(x) \equiv 0 \Longrightarrow g(x) = c.$$

$$\Rightarrow V(x,y) = x e^{y/x} + c.$$

$$\Rightarrow \int_\gamma \omega = V(4,2) - V(6,1) =$$

$$= 4\sqrt{e} - 6\sqrt[6]{e}.$$

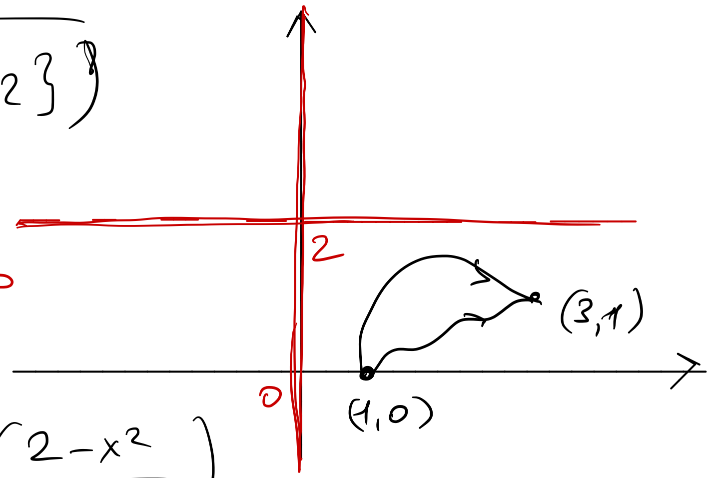
Esercizio Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x^2 - \alpha y}{x^2(y-2)}, \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

è irrotazionale. Per tale valore di α, dire se $\underline{F}$ è conservativo in ciascuno degli aperti connessi in cui è definito, e calcolare il lavoro compiuto da $\underline{F}$ per spostare un punto da $(1,0)$ a $(3,1)$.

$$\text{dom } \underline{F} = \mathbb{R}^2 \setminus \left(\{x=0\} \cup \{y=2\} \right)$$

è costituito da 4 aperti disgiunti, ciascuno semplicemente connesso



Cerco α t.c.

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{x^2 - \alpha y}{x^2(y-2)} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

$$\frac{1}{x^2} \frac{-\alpha(\cancel{y}-2) - (x^2 - \cancel{\alpha y})}{(y-2)^2} \qquad\qquad \frac{1}{(y-2)^2} \frac{-2x^2 - (2-x^2)}{x^2}$$

$$\frac{2\alpha - x^2}{x^2(y-2)^2} \qquad\qquad \frac{-2-x^2}{x^2(y-2)^2}$$

Sono uguali sse $\alpha = -1$.

$$F(x,y) = \left(\frac{x^2+y}{x^2(y-2)}, \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

$$\underline{F}(x,y) = \left(\frac{x^2+y}{x^2(y-2)}, \frac{2-x^2}{x(y-2)^2} \right)$$

è conservativo in ciascuno degli aperti disgiunti semplicemente connessi in cui è definito.

Calcolo un potenziale di $\underline{F}$ $V_x(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2(y-2)}$; $V_y(x,y) = \frac{2-x^2}{x(y-2)^2}$

$$V(x,y) = \int \frac{2-x^2}{x(y-2)^2}\,dy = \frac{x^2-2}{x}\,\frac{1}{y-2} + g(x)$$

$$V_x(x,y) = \frac{\cancel{x^2}+y}{x^2(y-2)}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{y-2}\,\frac{2x^2-(x^2-2)}{x^2} + g'(x) = \frac{\cancel{x^2}+2}{x^2(y-2)} + g'(x)$$

$$g'(x) = \frac{y-2}{x^2(y-2)} = \frac{1}{x^2} \Longrightarrow g(x) = -\frac{1}{x} + c$$

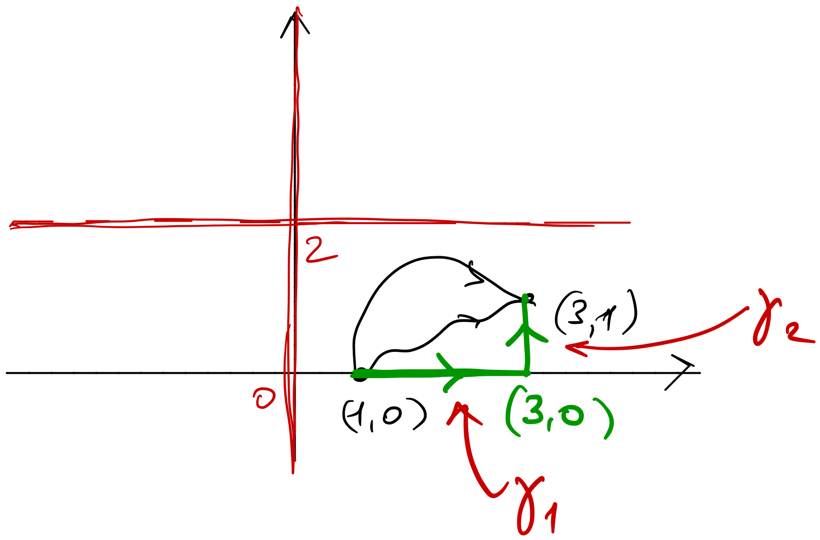
$$V(x,y) = \frac{x^2-2}{x(y-2)} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-\cancel{2}-y+\cancel{2}}{x(y-2)} =$$

$$= \frac{x^2-y}{x(y-2)} \quad (+\ c)$$

$$L = V(3,1) - V(1,0) = \frac{9-1}{3\cdot(-1)} + \frac{1}{2} = -\frac{8}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{13}{6}$$

In alternativa, invece di calcolare il potenziale V, potrei calcolare il lavoro lungo una curva "semplice" che vada da $(1,0)$ a $(3,1)$.



γ_1 : $\begin{cases} x = x \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad x \in [1,3]$.

γ_2 $\begin{cases} x = 3 \\ y = y \end{cases}$ $\quad y \in [0,1]$

$$L = \int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds + \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_1^3 dx \left(-\frac{1}{2}\right) + \int_0^1 dy \left(-\frac{7}{3}\right) \frac{1}{(y-2)^2} =$$

$$= -1 + \frac{7}{3} \left.\frac{1}{y-2}\right|_0^1 = -1 + \frac{7}{3}\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = -1 - \frac{7}{6} = -\frac{13}{6}$$

<u>OSS1</u> Sia $V(x,y)$ un potenziale del campo vettoriale $\underline{F}(x,y)$ nell'aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$.

anche $V(x,y) + c$ è un potenziale.

Ci sono altri potenziali?

OSS1 Sia $V(x,y)$ un potenziale del campo vettoriale $\underline{F}(x,y)$ nell'aperto connesso $A \subset \mathbb{R}^2$.

anche $V(x,y)+c$ è un potenziale.

Ci sono altri potenziali? **NO!**

Sia $W(x,y)$ un altro potenziale di $\underline{F}$ in A.

$$\nabla V \equiv \underline{F} \equiv \nabla W$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla (V-W) \equiv 0 \quad \text{in } A$$

La questione è, ponendo $U(x,y) = V(x,y) - W(x,y)$,

Se $U(x,y) \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso, t.c. $\nabla U \equiv 0$ in A.

posso dire che U è costante su A?

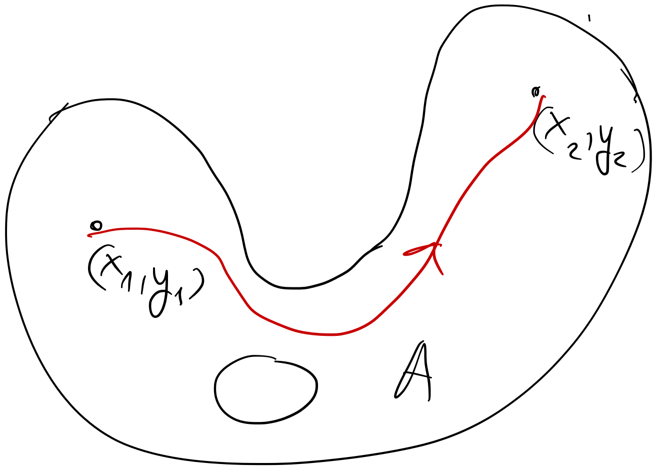
Sì. Dim.

Siano (x_1,y_1) e $(x_2,y_2) \in A$

Sia γ una curva regolare (a tratti) che collega (x_1,y_1) a (x_2,y_2).

Voglio provare che

$$U(x_1,y_1) = U(x_2,y_2)$$



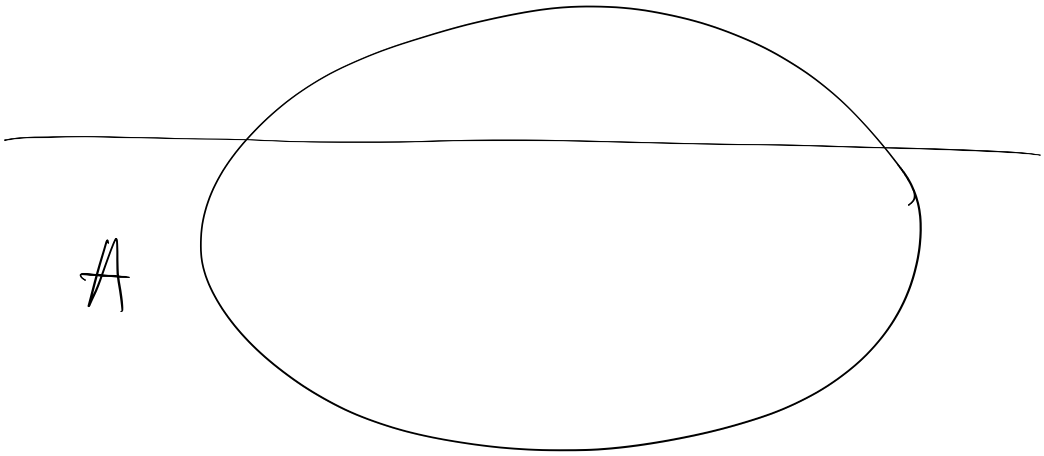
$$U(x_2,y_2) - U(x_1,y_1) = \int_\gamma \underbrace{\nabla U}_{=0} \cdot \underline{T}\, ds = 0.$$

$\Longrightarrow$ U è costante perché (x_1,y_1) e (x_2,y_2) sono arbitrari.

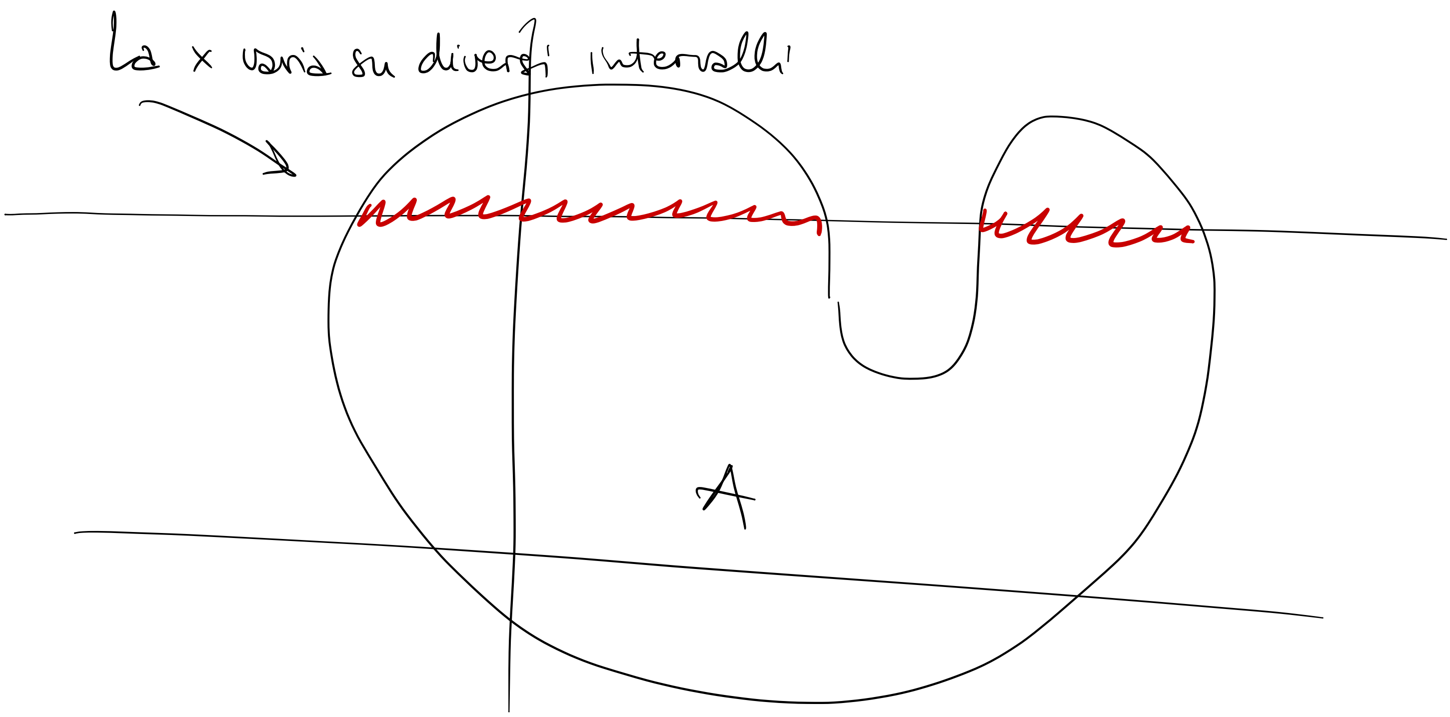
OSS 2. Il procedimento che abbiamo usato nella pratica per trovare un potenziale di un campo conservativo è il seguente.

Si "congela" la y, e si integra rispetto a x.

Questo va bene se l'aperto A è così:



Ma la procedura è più delicata se A è fatto così.



Consideriamo un campo vettoriale conservativo della forma

$$\underline{F}(x,y) = \big(0,\ F_2(x,y)\big).$$

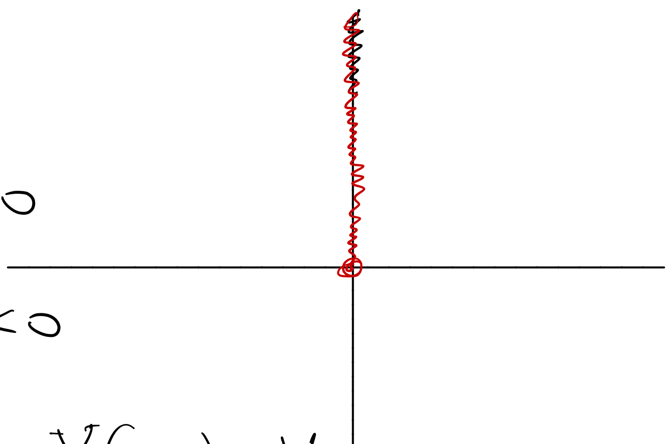
Cerco un potenziale $V(x,y) = \int 0\, dx = 0 + g(y)$

$\Rightarrow$ $V(x,y) = V(y)$ non dipende dalla x.

Not so fast!

$\underline{F}(x,y) = \big(0,\ F_2(x,y)\big)$ definita in $\mathbb{R}^2$ privato del semiasse positivo delle y.

$$F_2(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ y & \text{se } y > 0,\ x > 0 \\ -y & \text{se } y > 0,\ x < 0 \end{cases}$$



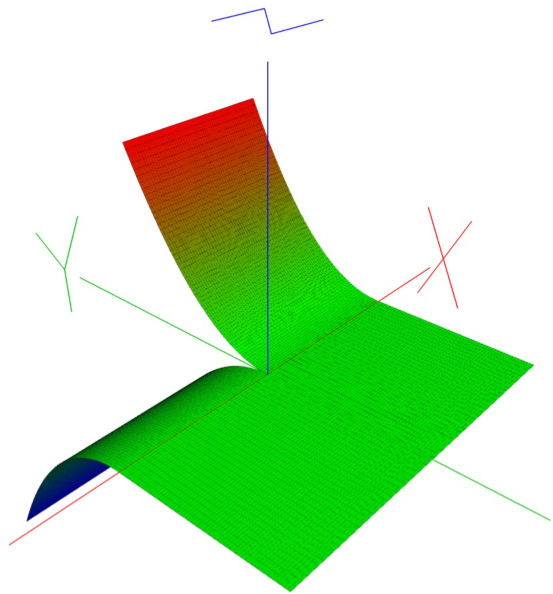
$\Rightarrow$ come prima, si trova che $V(x,y) = V(y)$.

Invece il potenziale è dato da

$$V(x,y) = \left\{ \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 0 \\ \frac{y^2}{2} & \text{se } y > 0,\ x > 0 \\ -\frac{y^2}{2} & \text{se } y > 0,\ x < 0. \end{cases} \right\} + C$$

dipende dalla x. Infatti

$$V(-1,1) = -\frac{1}{2} \neq V(1,1) = \frac{1}{2}$$


Z
Y
X

OSS. 3

Campi "vettoriali" / forme differenziali in dim. 1 $\Big\}$ sono conservativo / esatta ?

$$\underline{F}(x) = (F_1(x)) \qquad x \in I = (a,b).$$

$$\omega = F_1(x)\,dx$$

Basta che $F_1(x)$ sia continua in I.
Infatti basta prendere

$V(x) = \int F_1(x)\,dx$, che esiste per il teorema fond. del calcolo integr.

OSS 4.

Abbiamo un campo <u>irrotazionale</u>

$$\underline{F}(x,y) = \left(F_1(x,y), F_2(x,y)\right)$$

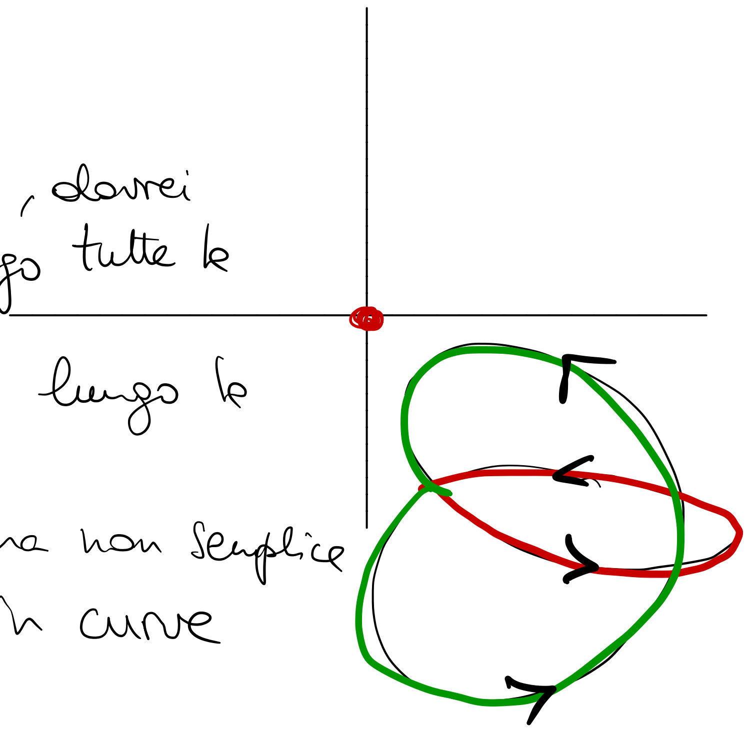
ma l'aperto A non è semplic. connesso

per esempio, A ha una lacuna

$$\left(A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \qquad A = \mathbb{R}^2 \setminus \{x^2+y^2 \leq 1\} \right)$$

$\underline{F}$ è conservativo o No? non si può dire a priori.

$$A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

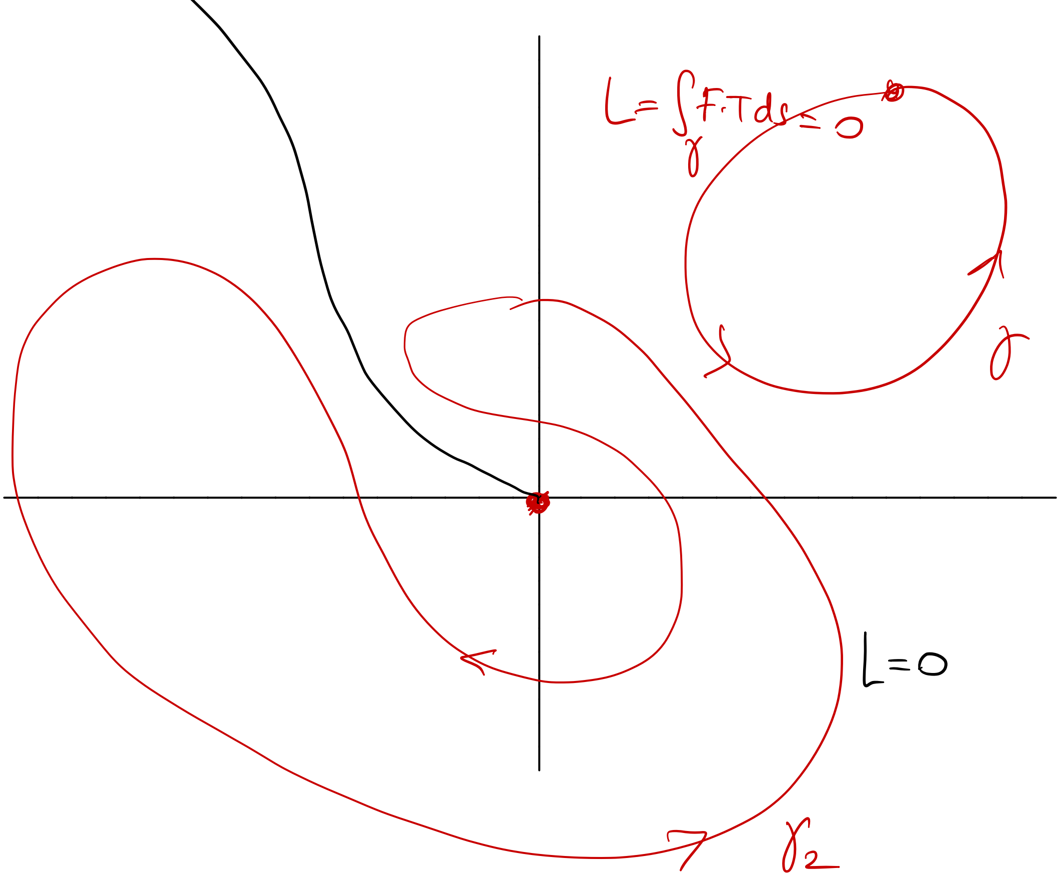


Per vedere se è conservativo, dovrei controllare che l'integrale lungo tutte le curve chiuse vale zero.

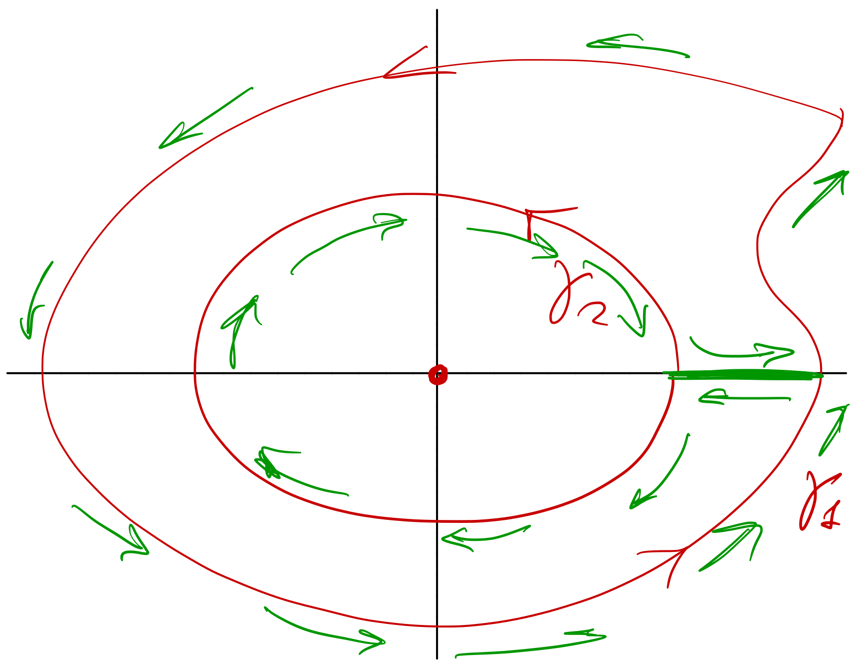
In realtà basta controllare lungo le curve semplici e chiuse,

perché una curva chiusa ma non semplice si può sempre scomporre in curve chiuse e semplici

Mi limito a studiare curve regolari, chiuse e semplici in $\mathbb{R}^2$ (= curve di Jordan).



$L_{\gamma_1} = L_{\gamma_2}$



$L_{\gamma_1} - L_{\gamma_2} = 0.$

Se abbiamo un campo irrotazionale in un aperto connesso con una lacuna (es: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).

prendo una curva chiusa (comoda!) che gira intorno alla lacuna, sia essa γ.
e calcolo il lavoro lungo γ.

2 casi:

1) $\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds \neq 0 \Rightarrow$ il campo non è conservativo

2) $\int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = 0 \Rightarrow$ il campo è conservativo.

Esempio: $F(x,y) = \left(\frac{3y^2}{9y^4+x^2}, \frac{6xy}{9y^4+x^2}+2\right)$.

definito in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$\underline{F}$ è irrotazionale $\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3y^2}{9y^4+x^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{6xy}{9y^4+x^2}+2\right)$

farlo!

E' conservativo?

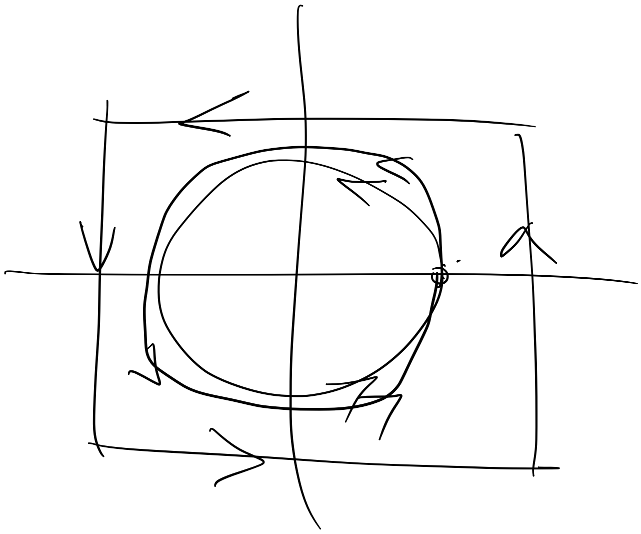
Prendo una curva che gira intorno all'origine.

Varie possibilità:

$\boxed{\gamma = \text{circonf. unitaria}}$

γ = quadrato

γ = "ovale" $9y^4+x^2=1$



$$y = \pm\sqrt[4]{\frac{1-x^2}{9}}$$

$$\gamma \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_0^{2\pi}\left[\frac{3\operatorname{sen}^2\theta}{9\operatorname{sen}^4\theta+\cos^2\theta}(-\operatorname{sen}\theta) + \left(\frac{6\cos\theta\operatorname{sen}\theta}{9\operatorname{sen}^4\theta+\cos^2\theta}+\cancel{2}\right)\cos\theta\right] d\theta$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}\left[\qquad\qquad\qquad\right] d\theta = 0$$

f è dispari.

$\Rightarrow$ il campo è conservativo.

OSS 5. Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale irrotazionale ma non conservativo su un aperto non sempl. connesso

Es. $\underline{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

se mi limito ad un "sottoaperto" semplicemente connesso (esempio: primo quadrante), il campo è conservativo in tale aperto.

Esercizio: Troviamo un potenziale di F nel semipiano $x>0$.

$$V(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \frac{x}{x^2}\int \frac{dy}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} =$$

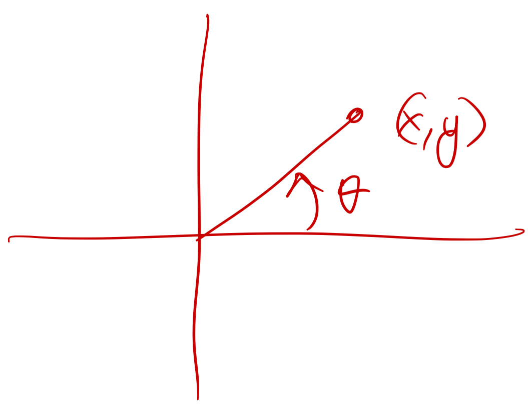
$$= \frac{1}{x} \cdot x \; \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + g(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + g(x).$$

$$V_x(x,y) = \cancel{-\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$\parallel$$

$$\cancel{\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\left(-\frac{y}{x^2}\right)} + g'(x) \Rightarrow g'(x) = 0$$

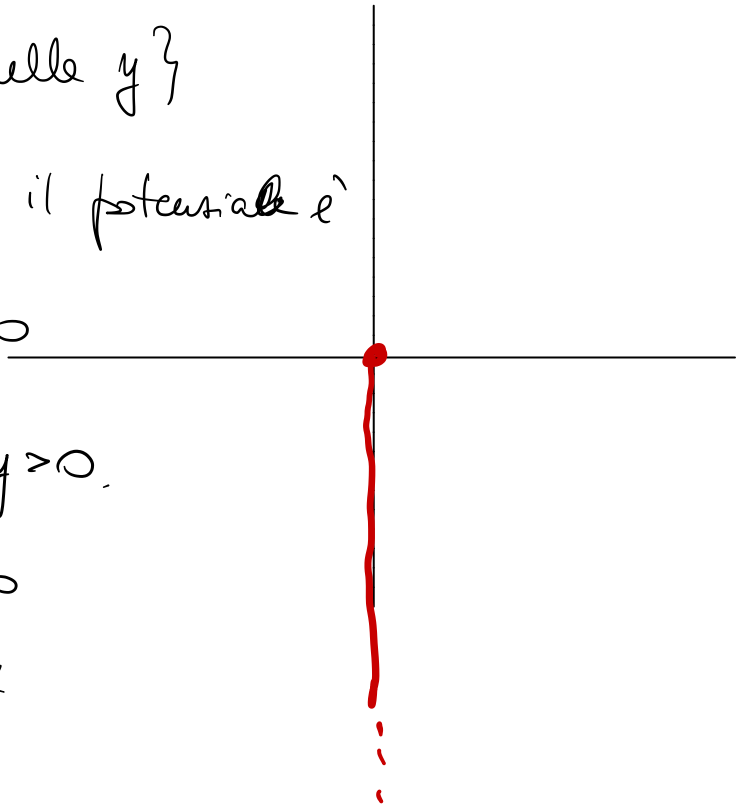
$$\Rightarrow V(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + c. = \theta(x,y) + c$$



Voglio trovare un potenziale dello stesso F

sull'aperto semplicemente connesso

$\mathbb{R}^2 \setminus \{$ semiasse negativo delle $y \}$



Si verifica facilmente che il potenziale è

$$V(x,y) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{se } x = 0,\ y > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

verificare che è di classe C^1

e che $\nabla V = \underline{F}$