Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva γ.

$$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ (\mathbb{R}^N) \qquad A \text{ aperto.}$$

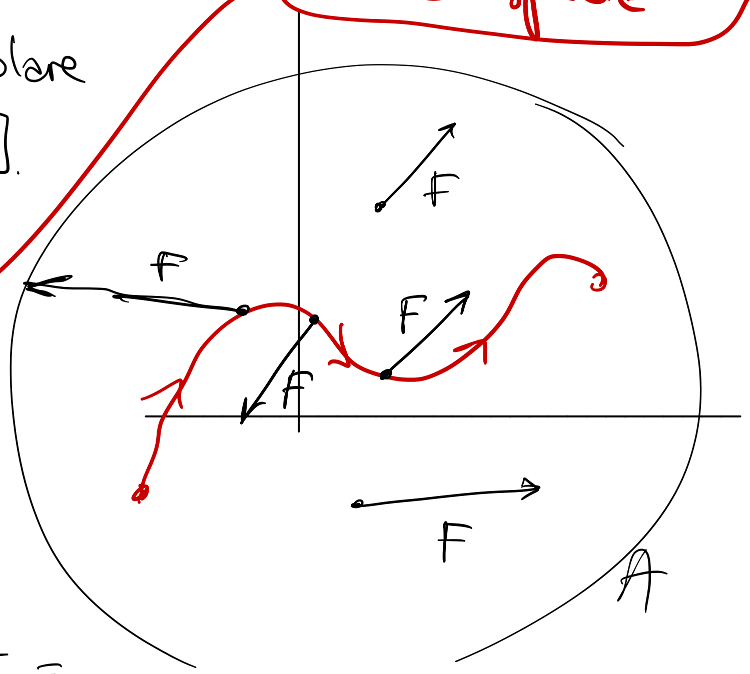
$$\underset{(x,y)}{\cup\!\!\!\!\!\ } \longmapsto \underline{F}(x,y) = \left(F_1(x,y),\, F_2(x,y)\right)$$

$\underline{F}$ continua (cioè F_1, F_2 continue)

Integrale curvilineo di 2^a specie

$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow A$ curva regolare

$$\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a,b].$$



Lavoro di $\underline{F}$ lungo $\underline{\gamma}$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds =$$

versore tangente a $\underline{\gamma}$.

$$= \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \underbrace{\frac{\underline{\gamma}'(t)}{\cancel{\|\underline{\gamma}'(t)\|}}}_{\underline{T}} \underbrace{\cancel{\|\underline{\gamma}'(t)\|}\, dt}_{ds} =$$

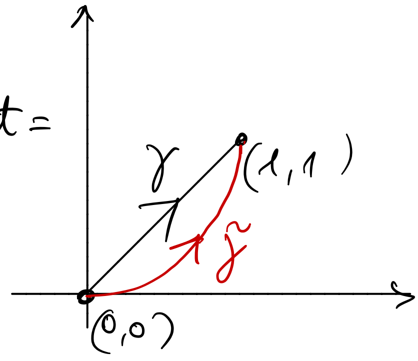
$$= \int_a^b \underline{F}\left(\underline{\gamma}(t)\right) \cdot \underline{\gamma}'(t)\, dt = \int_a^b \left[F_1\left(x(t), y(t)\right) x'(t) + F_2\left(x(t), y(t)\right) y'(t)\right] dt$$

Esempio. Calcolare il lavoro del campo vettoriale

$$\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y},\ x^3+y)$$

lungo la curva $\gamma(t) = (t,t) \qquad t\in[0,1]$.

$$L = \int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_0^1 \Big(\sqrt{t}\,\underbrace{x'(t)}_{=1} + (t^3+t)\,\underbrace{y'(t)}_{=1}\Big)\,dt =$$



$$= \int_0^1 \left(\sqrt{t} + t^3 + t\right) dt =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{8+3+6}{12} = \frac{17}{12}$$

Stesso campo vettoriale, differente curva $\tilde\gamma(t) = (t^2, t^3)$ $\quad t\in[0,1]$

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \Rightarrow \quad y = x^{3/2}$$

$$\tilde L = \int_{\tilde\gamma} \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \int_0^1 dt\,\Big[t^{3/2}\,\underbrace{x'(t)}_{=2t} + (t^6+t^3)\,\underbrace{y'(t)}_{3t^2}\Big] =$$

$$= \int_0^1 dt\,\left(2\,t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5\right) = 2\cdot\frac{2}{7} + \frac{3}{9} + \frac{3}{6}$$ viene diverso da prima.

Osserviamo che, <u>in generale</u>, il lavoro dipende dal percorso effettivamente seguito e non solo dagli estremi.

OSS Se γ e $\tilde\gamma$ sono due curve "equivalenti", allora il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ o $\tilde\gamma$: (Esercizio)

1) se γ e $\tilde\gamma$ sono equiverse (stesso verso di percorrenza) $\Rightarrow$ il lavoro resta uguale.

2) se γ e $\tilde\gamma$ sono controverse $\Rightarrow$ il lavoro cambia segno.

DEFINIZIONE Un campo vettoriale $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si dice <u>conservativo</u> se $\underline{F}$ è il gradiente di una funzione $V(x,y): A \to \mathbb{R}$, detta <u>potenziale</u>,

cioè se $\exists\, V(x,y): A \to \mathbb{R}$ t.c. $V \in C^1(A)$

$$\nabla V(x,y) = F(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$$

cioè $\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = F_1 \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = F_2 \end{cases}$ in tutto A.

<u>OSS</u> Il potenziale è definito a meno di costanti additive.

Calcoliamo il lavoro di un campo vettoriale <u>conservativo</u> lungo una curva $\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a,b]$

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_a^b dt \left[F_1(x(t),y(t))\, x'(t) + F_2(x(t),y(t))\, y'(t) \right] =$$

$$\underset{\underline{F}\text{ conservativo}}{=} \int_a^b dt\, \underbrace{\left[\frac{\partial V}{\partial x}(x(t),y(t))\, x'(t) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(t),y(t))\, y'(t) \right]}_{=\ \frac{d}{dt}\left(V(x(t),y(t))\right) = \frac{d}{dt} V(\underline{\gamma}(t))} =$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} V(\underline{\gamma}(t))\, dt \underset{\text{Teor. fondam. calc. int.}}{=} V(\underline{\gamma}(b)) - V(\underline{\gamma}(a)) =$$

= differenza di potenziale tra gli estremi della curva.

TEOREMA Se $\underline{F}: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ è un campo conservativo (lavoro) con potenziale V, allora il suo integrale lungo una qualsiasi curva $\underline{\gamma}: [a,b] \to A$ con estremi:

$P_1 = \gamma(a)$, $P_2 = \gamma(b)$ vale

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = V(P_2) - V(P_1)$$

In particolare, il lavoro non dipende dal percorso seguito

<u>OSS</u> Il campo vettoriale di prima $\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y}, x^3 + y)$ non era conservativo.

Pb. come riconoscere un campo vettoriale conservativo.

Esempi:

$$\underline{F}(x,y) = (2xy,\ x^2) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

è conservativo e ammette come potenziale

$$V(x,y) = x^2 y + c$$

Esempio $\quad F(x,y) = (0, -k)$ campo gravitazionale

$k = mg$ $\qquad$ campo gravitazionale al suolo.

$$V = -ky$$

Esempio $\quad \underline{F}(x,y) = \left(-\frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}},\ \frac{-ky}{(x^2+y^2)^{3/2}} \right) =$

$$= -k \frac{(x,y)}{\|(x,y)\|^3} = -k \frac{\hat{r}}{\|(x,y)\|^2}$$

dove $\hat{r} = \frac{(x,y)}{\|x,y\|}$ versore radiale

Campo gravitazionale centrale

Conservativo con potenziale:

$$V(x,y) = k\ (x^2+y^2)^{-1/2}$$

$$V_x = -\frac{1}{\cancel{2}} k \frac{\cancel{2}x}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

In generale, non è immediato capire se un campo è conservativo o no.

Sia $\underline{F}(x,y)$ un campo vettoriale <u>conservativo</u> di classe $C^1(A;\mathbb{R}^2)$

$\Rightarrow \exists\ V(x,y): A \to \mathbb{R}$ t.c. $\nabla V = \underline{F}$ in A.

$\Rightarrow V \in C^2(A)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

<u>PROP</u>. C.N. affinché un campo vettoriale $\underline{F}(x,y) \in C^1(A;\mathbb{R}^2)$ sia conservativo è che

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} \equiv \frac{\partial F_1}{\partial y} \quad \text{in tutto } A.$$

cioè

$$\text{rot}\ \underline{F} := \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 0 \quad \text{(campo irrotazionale)}$$

$\underline{F}(x,y) = (\sqrt{y},\ x^3 + y)$ in $A = \{(x,y): y > 0\}$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+y) = 3x^2$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

sono diverse

$\Downarrow$

non è conservativo

Se $\underline{F}(x,y,z) : A \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^1

ed è conservativo, allora deve essere

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}; \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

versori degli assi

$$\text{rot}\, \underline{F} = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \underline{\nabla} \wedge \underline{F} =$$

$$= \left((F_3)_y - (F_2)_z, (F_1)_z - (F_3)_x, (F_2)_x - (F_1)_y \right)$$

<u>C.N.</u> affinché un campo C^1 sia conservativo è che sia irrotazionale, cioè che "le derivate incrociate" siano uguali.

<u>è anche una C.S.?</u> a volte sì, a volte no, dipende dall'aperto A.

Esempio di un campo vettoriale piano irrotazionale ma non conservativo.

$$\underline{F}(x,y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$

<u>E' irrotazionale?</u> sì

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) \overset{?}{\equiv} \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

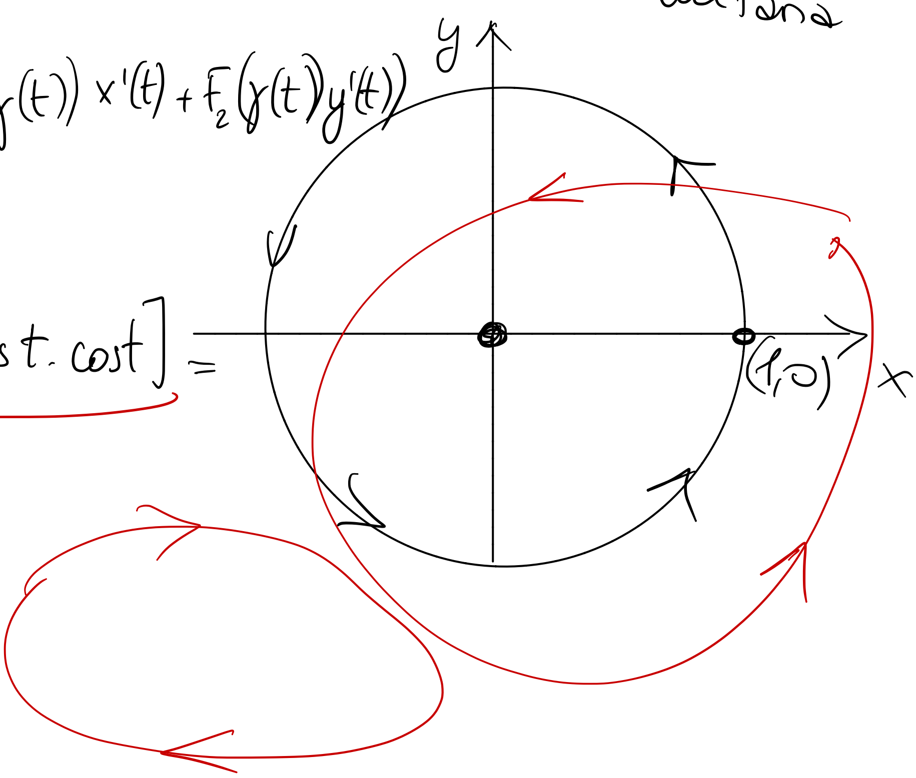
<u>E' conservativo?</u> Se lo fosse, l'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa dovrebbe essere zero.

Prendo $\underline{\gamma} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$ la circ. unitaria

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\, ds = \int_0^{2\pi} dt \left(F_1(\gamma(t))\, x'(t) + F_2(\gamma(t))\, y'(t)\right)$$

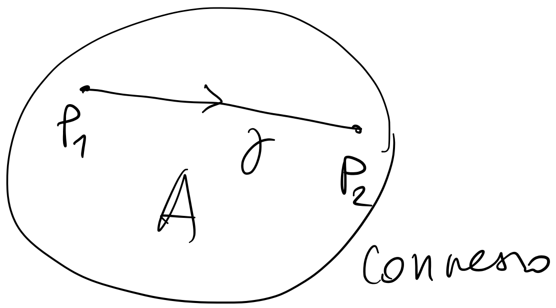
$$= \int_0^{2\pi} dt \underbrace{\left[-\operatorname{sen} t(-\operatorname{sen} t) + \cos t \cdot \cos t\right]}_{1} =$$

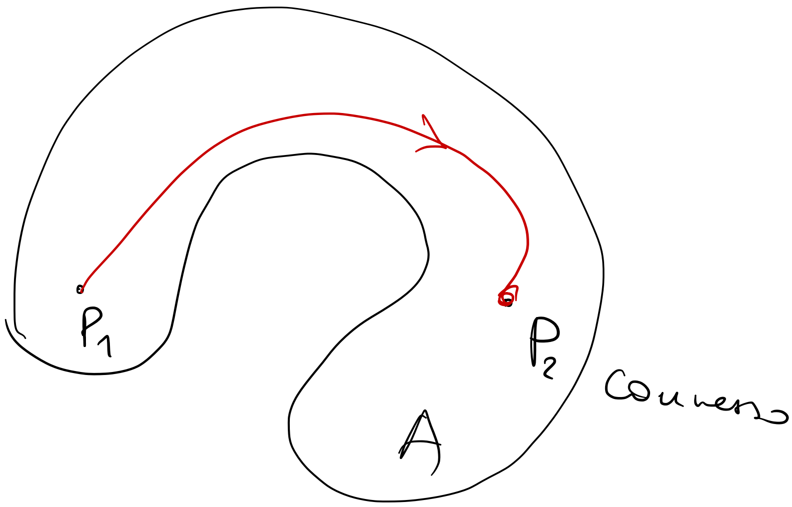
$$= 2\pi \neq 0.$$

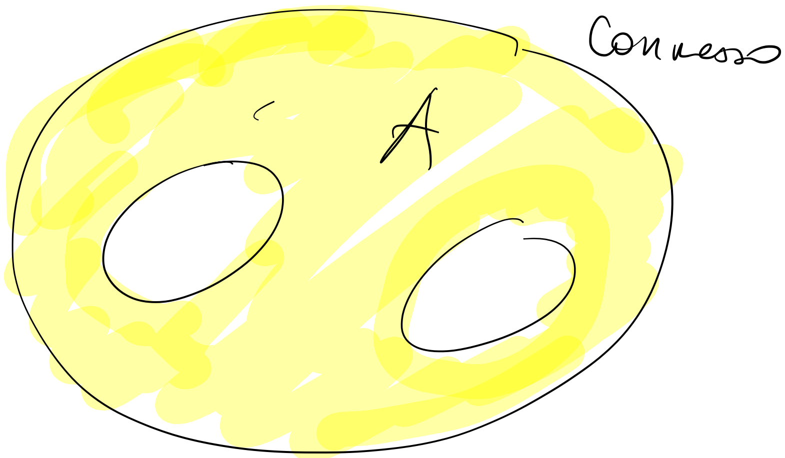


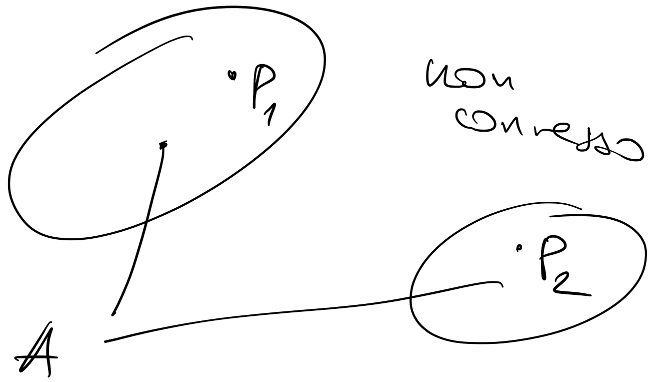
DEF. $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto ($A \subset \mathbb{R}^N$)

A si dice <u>connesso</u> (connesso per archi) se $\forall$ coppia di punti $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2) \in A$, esiste una curva regolare a tratti che li congiunge tutta contenuta in A.









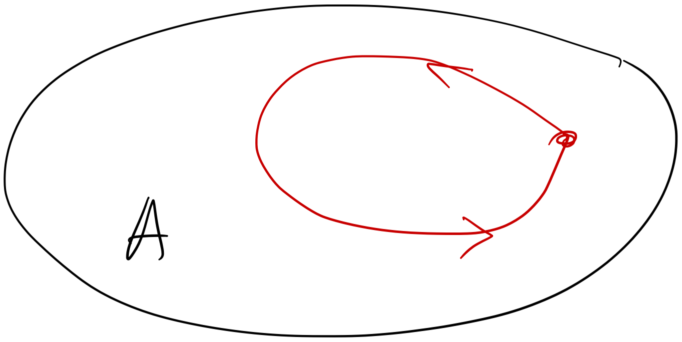
Def. $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\qquad (A \subset \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^n)$

si dice <u>semplicemente connesso</u> se:

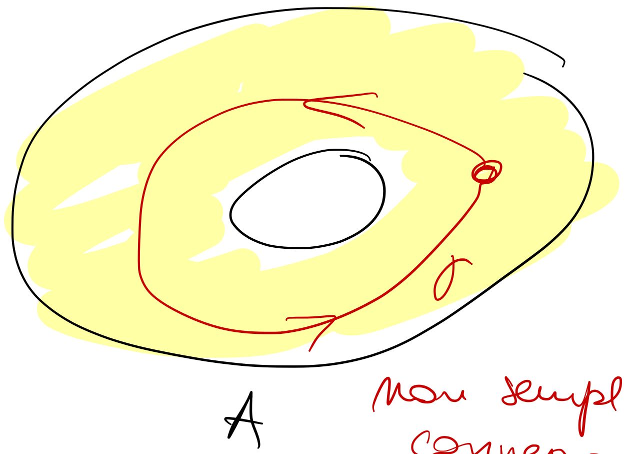
senza autointersezioni

1) è connesso

2) ogni curva chiusa e semplice in A. si può "deformare" ad un punto senza uscire da A.



semplic. connesso



non sempl. connesso