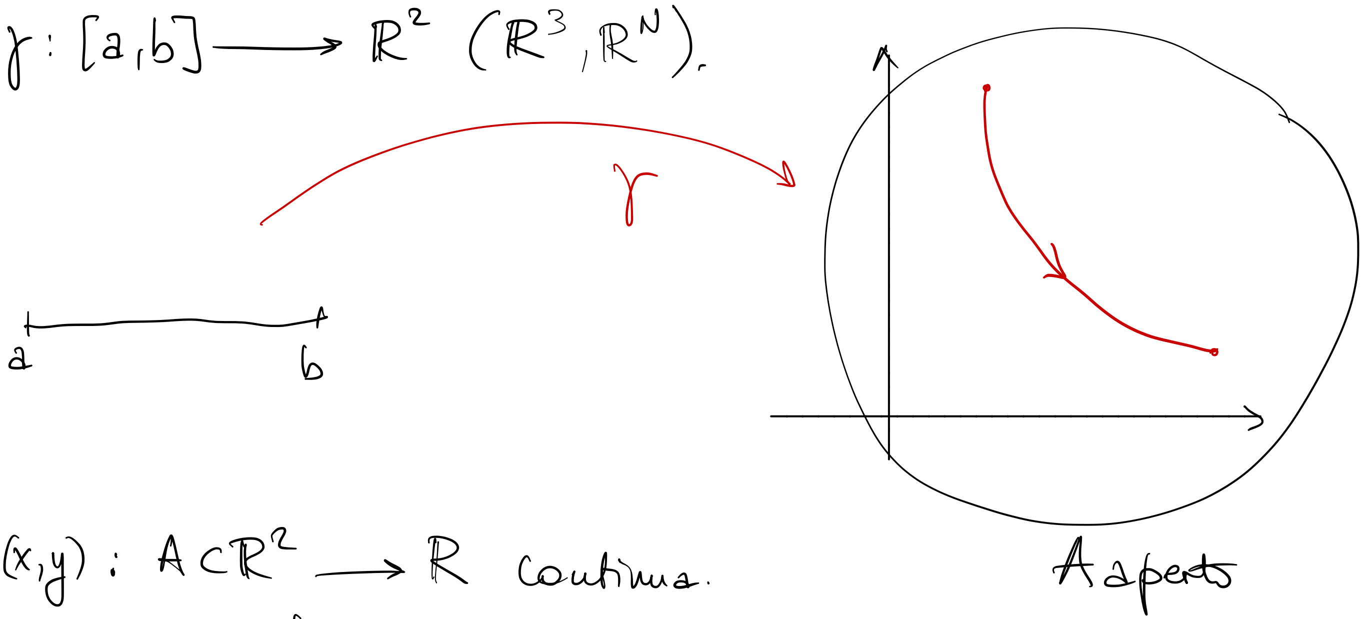
$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^N).$

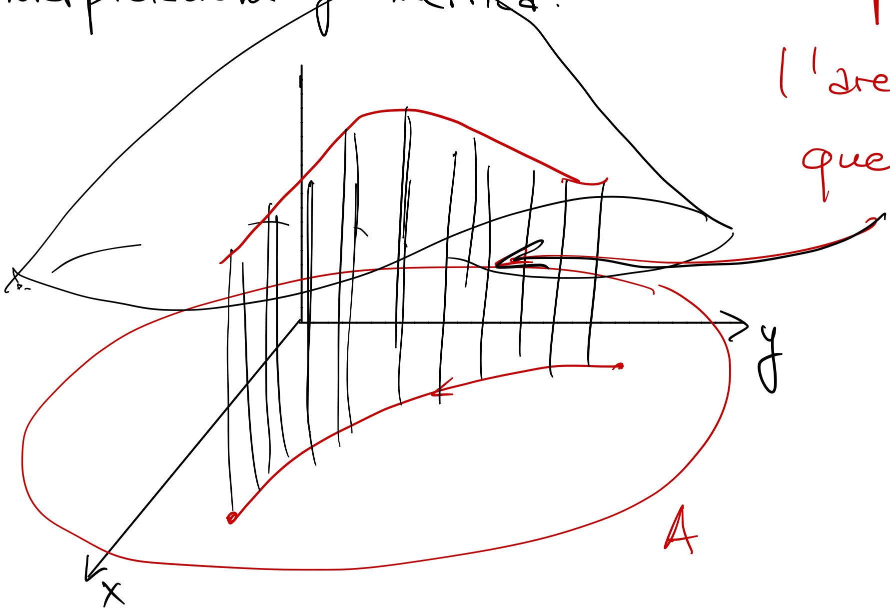


$f(x,y) : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua.

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\underline{\gamma}(t)) \, \| \underline{\gamma}'(t) \| \, dt$$

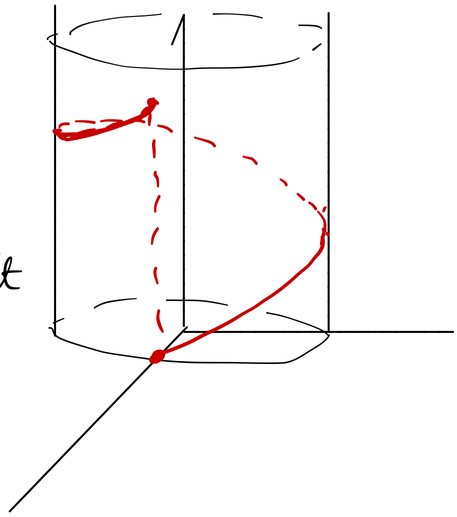
1) interpretazione fisica come massa di un filo con densità pari a f.

2) interpretazione geometrica:



Interpretazione di $\int_\gamma f \, ds$: l'area di questa palizzata.

Esercizio Calcolare la massa di una molla a forma di spira d'elica, di eq^{ni} parametriche
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \\ z = a t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \quad a, R > 0 \text{ fissati}$$
sapendo che la densità lineare della molla in ogni punto è pari al quadrato della distanza dall'origine.



$$M = \int_\gamma (x^2+y^2+z^2)\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2\cos^2 t + R^2 \mathrm{sen}^2 t + a^2 t^2) \cdot \|\underline{\gamma}'(t)\|\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2 + a^2 t^2) \sqrt{R^2+a^2}\, dt =$$

$$= \sqrt{R^2+a^2} \left(R^2 2\pi + \frac{a^2 8\pi^3}{3} \right)$$

Baricentro di una curva

Se γ rappresenta un filo metallico avente densità lineare ρ (variabile).

Si definisce baricentro di γ il punto (per sempl. $N=2$)

$B(x_B, y_B)$, dove

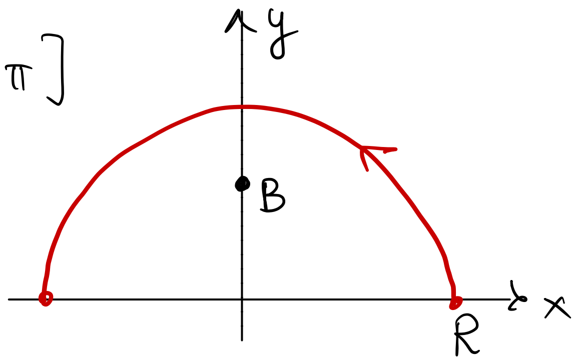
$$x_B = \frac{\int_\gamma x\,\rho(x,y)\,ds}{\text{massa del filo}} = \frac{\int_\gamma x\,\rho\,ds}{\int_\gamma \rho\,ds} = \frac{\int_\gamma x\,ds}{L(\gamma)}$$

se ρ è costante

$$y_B = \frac{\int_\gamma y\,\rho(x,y)\,ds}{\int_\gamma \rho\,ds} = \frac{\int_\gamma y\,ds}{L(\gamma)}.$$

<u>Esempio</u> Baricentro di una semicirconferenza (ρ costante)

$$\gamma \quad \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi]$$



$$x_B = \frac{1}{L(\gamma)}\int_\gamma x\,ds = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R\cos t\,\underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{R}\,dt = 0$$

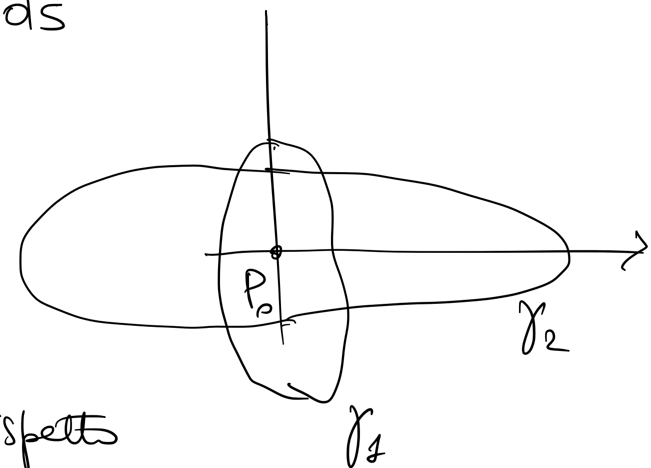
$$y_B = \frac{1}{\pi R}\int_\gamma y\,ds = \frac{1}{\pi R}\int_0^\pi R^2 \sin t\,dt =$$

$$= \frac{2R}{\pi}$$

Momento d'inerzia di un filo (rispetto a un punto P_0, ad una retta r, ad un piano π).

$$I = \int_\gamma \rho \; d(P(x,y), P_0)^2 \, ds$$

ρ ← densità lineare



Momento d'inerzia della semicirconferenza di prima rispetto all'asse delle x ($\rho = 1$ per semplicità)

$$I_r = \int_\gamma y^2 \, ds = \int_0^\pi \underbrace{R^2 \operatorname{sen}^2 t}_{y^2} \; \underbrace{R \, dt}_{ds} =$$

$$= R^3 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 t \, dt = R^3 \int_0^\pi \frac{1 - \cancel{\cos 2t}}{2} \, dt = \frac{R^3}{2}\pi$$

OSS L'integrale curvilineo (e la lunghezza) di una curva non dovrebbe cambiare se parametrizzo la curva in maniera diversa, neanche se cambio verso di percorrenza.

Esempio. La semicirconferenza di prima, che abbiamo parametrizzato come

$$\gamma_1 \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, \pi]$$

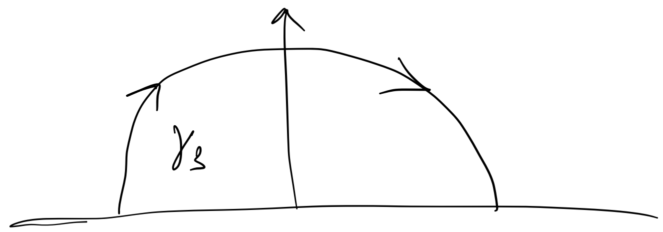
avrei anche potuto parametrizzarla come

$$\gamma_2 \begin{cases} x = R\cos \frac{t}{2} \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\frac{t}{2} \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

oppure come

$$\gamma_3 \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{R^2 - t^2} \end{cases} \quad t \in [-R, R].$$

(curva grafico)



Intuitivamente, sono tre curve diverse ma "imparentate" perché descrivono "la stessa curva".

La lunghezza e gli integrali curvilinei non dovrebbero dipendere dalla rappresentazione scelta.

N.B. Le due curve

$$\gamma_1 \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \qquad \gamma_2 \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\,t \end{cases} \quad t \in [0, 4\pi].$$

hanno lo stesso sostegno ma lunghezze diverse

$$L(\gamma_1) = 2\pi R \qquad\qquad L(\gamma_2) = 4\pi R$$

Def. Curve equivalenti.

Due curve regolari

$$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (\mathbb{R}^N)$$
$$t \longmapsto \gamma_1(t)$$

$$\gamma_2 : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\tau \longmapsto \gamma_2(\tau)$$

si dicono equivalenti se esiste un cambiamento di parametro biettivo $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ e di classe C^1 t.c. $\varphi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a,b)$

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \quad \forall t \in (a,b).$$

Se $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in (a,b)$, le due curve si dicono equivalenti ed equiverse

$\varphi'(t) < 0 \quad \forall t$, le due curve si dicono equivalenti e contraverse.

OSS anche φ^{-1} è di classe C^1.

$$\gamma_1 \quad \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\,\mathrm{sen}\, t \end{cases} \qquad t \in [0,\pi]$$

$$\gamma_2 \quad \begin{cases} x = R\cos \frac{t}{2} \\ y = R\,\mathrm{sen}\, \frac{t}{2} \end{cases} \qquad t \in [0,2\pi]$$

$$\gamma_3 \quad \begin{cases} x = \tau \\ y = \sqrt{R^2 - \tau^2} \end{cases} \qquad \tau \in [-R,R].$$

γ_1 è equivalente ed equiversa a γ_2.

Devo trovare φ come prima (diffeomorfismo C^1) t.c.

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t)) \qquad \varphi : [0,\pi] \to [0,2\pi].$$

$$t \longmapsto 2t$$

$$\left(R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t\right) \stackrel{?}{=} \left(R\cos\frac{(2t)}{2}, R\,\mathrm{sen}\frac{(2t)}{2}\right)$$

OK!

γ_1 è equivalente e controversa risp. a γ_3.

Voglio trovare $\varphi : [0,\pi] \to [-R,R]$. diffeomorfismo C^1.

t.c. $\quad \gamma_1(t) = \gamma_3(\varphi(t))$

$$\begin{cases} R\cos t = \varphi(t) \\ R\,\mathrm{sen}\, t = \sqrt{R^2 - \varphi(t)^2} \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi(t) = R\cos t.$$

$$\varphi'(t) = -R\,\mathrm{sen}\, t < 0 \quad \forall t \in (0,\pi).$$

OK.

TEOREMA Se γ_1 e γ_2 sono due curve equivalenti (equiverse o contraverse), allora

$$L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$$

$$\int_{\gamma_1} f\, ds = \int_{\gamma_2} f\, ds.$$

Dim. $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

$\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad t \longmapsto \gamma_1(t)$

$\gamma_2 : [\alpha,\beta] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\quad \tau \longrightarrow \gamma_2(\tau)$

$\varphi : [a,b] \longrightarrow [\alpha,\beta]$. C^1.

biettiva, $\varphi(t) \neq 0 \ \forall t \in (a,b)$

$\gamma_1(t) = \gamma_2(\varphi(t))$

$$L(\gamma_1) = \int_a^b \|\gamma_1'(t)\|\, dt = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \gamma_1(t) \right\| dt =$$

$$= \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \left(\gamma_2(\varphi(t))\right) \right\| dt = \int_a^b \|\gamma_2'(\varphi(t))\, \varphi'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_a^b |\varphi'(t)|\ \|\gamma_2'(\varphi(t))\|\, dt =$$

sost. $\varphi(t) = \tau$

(I° caso): $\varphi'(t) > 0$ $$= \int_a^b \varphi'(t)\, \|\gamma_2'(\varphi(t))\|\, dt = \int_{\varphi(a)=\alpha}^{\varphi(b)=\beta} \|\gamma_2'(\tau)\|\, d\tau = L(\gamma_2)$$

(II° caso: $\varphi'(t) < 0$) $$= -\int_a^b \varphi'(t)\, \|\gamma_2'(\varphi(t))\|\, dt = (\text{sost } \varphi(t) = \tau)$$

$$= -\int_{\varphi(a)=\beta}^{\varphi(b)=\alpha} \|\gamma_2'(\tau)\|\, d\tau = L(\gamma_2)$$

$$L(\gamma_2) = \int_\alpha^\beta \|\gamma_2'(\tau)\|\, d\tau.$$

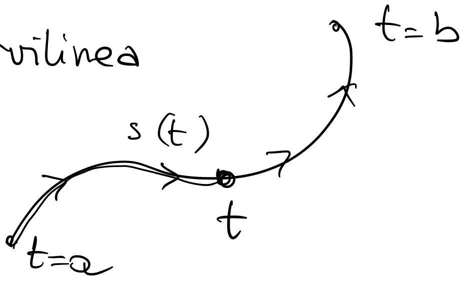
!!!

Tra le possibili parametrizzazioni della curva γ,

$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

c'è quella che si ottiene considerando il parametro

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau \quad \text{ascissa curvilinea}$$



$$s'(t) = \|\gamma'(t)\| > 0.$$

$$s : [a,b] \longrightarrow [0, L(\gamma)].$$

biettiva, diffeomorfismo C^1.

La sua inversa la chiamo $t(s)$. è anch'essa diffeomorf.

$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t(s))$ è equivalente ed equiversa a γ.

$$\int_\gamma f \, ds = \int_{\tilde{\gamma}} f \, ds = \int_0^{L(\gamma)} f(\tilde{\gamma}(s)) \|\tilde{\gamma}'(s)\| d(s)$$

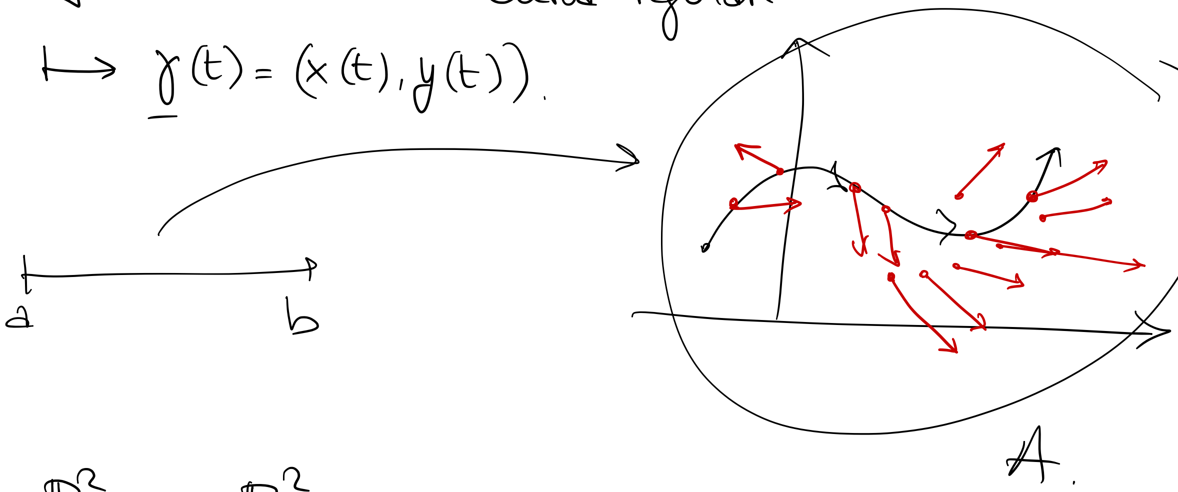
$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = \left\| \frac{d}{ds} (\gamma(t(s))) \right\| = \|\gamma'(t(s))\| \underbrace{|t'(s)|}_{= \frac{1}{\|\gamma'(t(s))\|}} = 1$$

In altre parole, usare il parametro s (ascissa curvilinea) permette di "omettere" il fattore correttivo $\|\tilde{\gamma}'(s)\|$: il parametro è la lunghezza!

Lavoro di una forza lungo una curva.

$\gamma : [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^2$ curva regolare

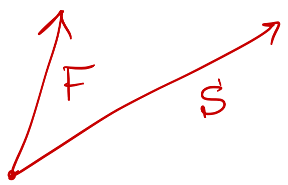
$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$.



$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ campo vettoriale

$(x,y) \longmapsto \underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$

Se F fosse costante e lo spostamento fosse rettilineo, il lavoro del campo di forze sarebbe



$$L = \underline{F} \cdot \underline{S} = F_1 S_1 + F_2 S_2$$

Nel caso generale (F variabile, spostamento curvilineo lungo γ).

$$L = \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds$$