TEOREMA DI CAUCHY (Esistenza e unicità in piccolo)

$$(P)\quad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f: I \times J \to \mathbb{R} \qquad \begin{matrix} I = [x_0 - a, x_0 + a] \\ J = [y_0 - b, y_0 + b] \end{matrix}$$

1) f continua in $I \times J$

2) f lipschitziana rispetto a y, unif^{te} in x

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2| \qquad \forall\, y_1, y_2 \in J \quad \forall x \in I$$

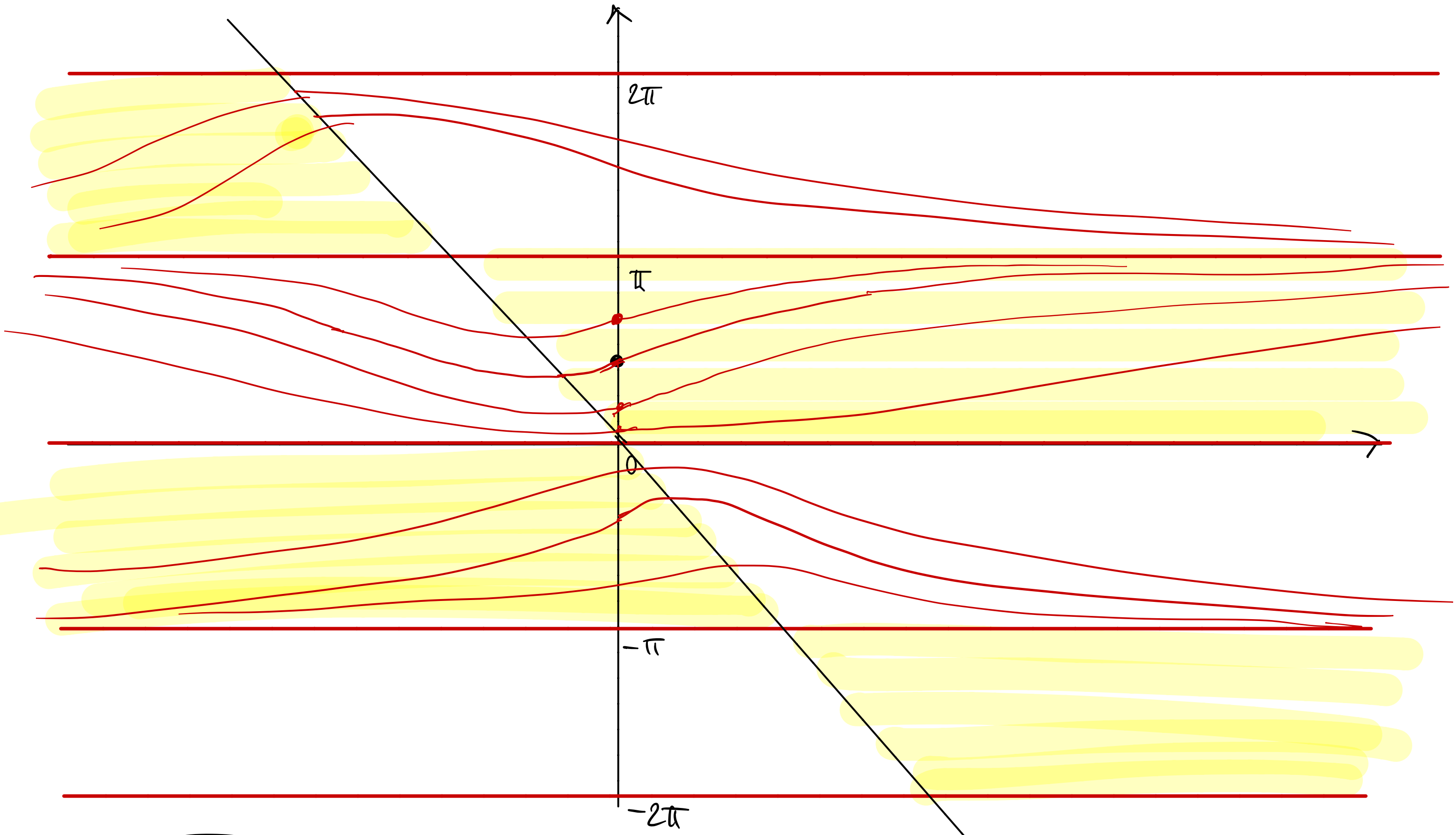
OSS 1) e 2) sono vere se $f \in C^1(I \times J)$

Allora $\exists$ intervallo $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ ed $\exists !$
$y(x) \in C^1(I_0; J)$ sol^{ne} di (P)

$$(P)\begin{cases} y' = \underbrace{(x+y)\,\mathrm{sen}\,y} \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

$\hookrightarrow f(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ $\rightarrow$ Vale il teorema di Cauchy per ogni cond^{ne} iniziale $y(x_0) = y_0$.

Cerchiamo le sol^{ni} costanti. $y(x) \equiv k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ se $\alpha = k\pi$ abbiamo trovato la sol^{ne}.



$\alpha \in (0,\pi)$ Studiamo il segno di $f(x,y) = (x+y)\,\mathrm{sen}\,y$

In giallo la regione dove $y' > 0$

$\rightarrow$ $y(x)$ continua a crescere $\forall x > 0$. e $y(x) < \pi$.

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \begin{cases} \pi \\ \lambda < \pi \end{cases}$$

$\exists$ perché $y(x)$ crescente.

$\lambda < \pi \leftarrow$ se fosse vero questo, si avrebbe (dall'eq) $\lim_{x\to+\infty} y'(x) = +\infty$ impossibile

Volendo, potremmo studiare concavità e convessità:

$$y' = (x+y)\,\text{sen}\,y \Rightarrow \text{derivo rispetto a } x$$

$$y'' = (1+y')\,\text{sen}\,y + (x+y)\cos y\; y' = \qquad \text{sost}$$

$$y'' = \big(1+(x+y)\,\text{sen}\,y\big)\,\text{sen}\,y + (x+y)\cos y\,(x+y)\,\text{sen}\,y$$

e così via $\Rightarrow$ $y(x)$ è di classe C^∞.

<u>TEOREMA</u> Se $f(x,y)$ del teorema di Cauchy è di classe $C^k(I \times J)$, allora anche la soluzione $y(x) \in C^{k+1}(I_0; J)$

<u>DIM</u> $y' = f(x,y)$ supp. f di classe C^1. $\Rightarrow$

$f(x, y(x))$ è una comp. di funz. C^1.

$\Rightarrow$ è C^1 $\Rightarrow$ $y' \in C^1 \Rightarrow y \in C^2$.

e così via ...

TEOREMA DI PEANO Stesse ipotesi di Cauchy, ma f verifica solo l'hyp. 1) (continuità). La 2) viene soppressa.

Allora $\exists\, y(x) \in C^1(I_0; J)$ sol^{ne} di (P), ma manca l'unicità.

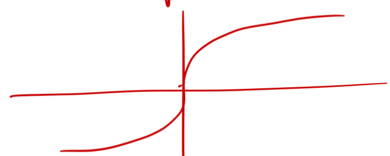
Si può avere non unicità.

ESEMPIO

$$(P)\begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$f(x,y) = f(y) = \sqrt[3]{y}$$

OSS $\sqrt[3]{y}$ non è lipschitz.



1) $y(x) \equiv 0$ è sol^{ne} di (P).

2) $$\frac{y'}{\sqrt[3]{y}} = 1 \implies \int \frac{y'}{\sqrt[3]{y}}\,dx = \int 1\,dx = x + c$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt[3]{y}} = \frac{3}{2} y^{2/3}$$

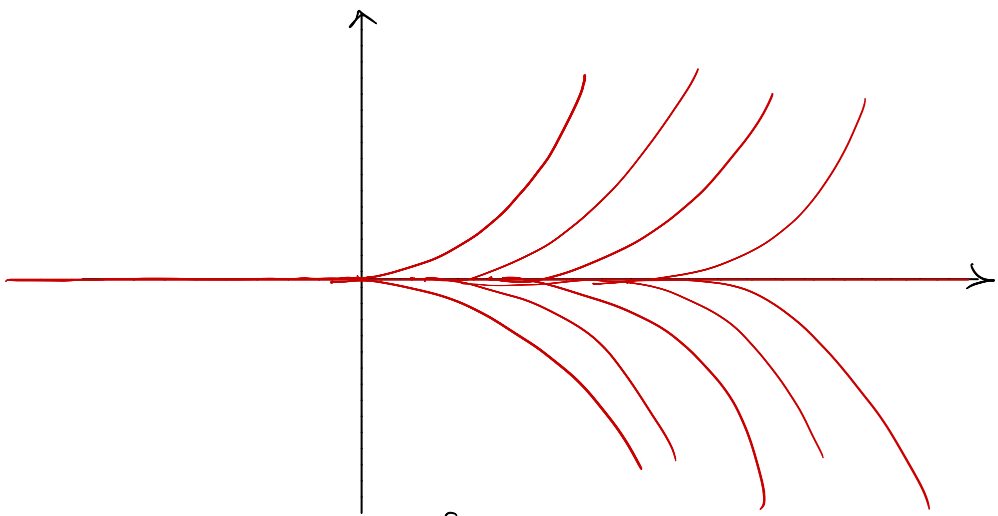
$x>0$

$$\Rightarrow y^{2/3} = \frac{2}{3}(x+c)$$

C.I. $\Rightarrow c = 0$

$$y^{2/3} = \frac{2}{3}x \implies y = \pm\left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2}$$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \left(\frac{2}{3}x\right)^{3/2} & x > 0 \end{cases}$$



"Pennello di Peano"

Anche $$y(x) = \begin{cases} 0 & x \le a \\ \left(\frac{2}{3}(x-a)\right)^{3/2} & x > a \end{cases}$$ è sol^{ne}.

Eq^{ni} che si possono abbassare di ordine

$$(P)\begin{cases} y'' = 2(1+y')^2 \\ y(0) = \alpha \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

eq^{ne} del 2° ordine, non compare espl. $y(x)$

Poniamo $y'(x) = z(x)$

(P) diventa
$$(P')\begin{cases} z' = 2(1+z)^2 \\ z(0) = 0 \end{cases}$$
del 1° ordine.

$$\frac{z'}{(1+z)^2} = 2 \implies \int \frac{dz}{(1+z)^2} = 2x + c$$

$$\int \frac{dz}{(1+z)^2} = -\frac{1}{1+z}$$

C.I. $c = -1$

$$-\frac{1}{1+z} = 2x - 1 \qquad 1+z = \frac{1}{1-2x}$$

$$y'(x) = z(x) = \frac{1}{1-2x} - 1 = \frac{2x}{1-2x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int z(x)\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1-2x) - x \quad + c_1$$

$y(0) = \alpha$

$$\alpha = c_1 \qquad \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}\ln(1-2x) - x + \alpha$$

$$x^2 y' = y^2 + xy + 4x^2$$

$$y' = \frac{y^2 + xy + 4x^2}{x^2} \qquad \text{è del tipo} \quad y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{y}{x} + 4 \qquad \text{Eq}^{\text{ne}} \text{ "omogenea"}$$

Si pone $\quad v(x) = \dfrac{y(x)}{x}$

$$y(x) = x\,v(x) \Rightarrow y'(x) = v(x) + x\,v'(x)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{v} + xv' = v^2 + \cancel{v} + 4$$

$$v' = \frac{v^2+4}{x} \qquad \text{variabili separabili}$$

$$\frac{v'}{v^2+4} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{dv}{\left(\frac{v}{2}\right)^2 + 1} = \int \frac{dv}{v^2+4} = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

4

$$\frac{1}{4} \cdot 2 \arctan\left(\frac{v}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{v}{2}\right) = \ln|x| + c.$$

$$\arctan \frac{v}{2} = 2\ln|x| + c$$

$$v(x) = 2\tan\left(2\ln|x| + c\right)$$

$$\frac{y(x)}{x} = v(x) \Rightarrow y(x) = 2x\tan\left(2\ln|x| + c\right)$$

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \implies \text{si pone} \quad v(x) = \frac{y(x)}{x}$$

$$y'(x) = v + xv'$$

$$v + xv' = f(v) \implies v' = \frac{f(v) - v}{x} \quad \text{variabili separabili}$$

Teorema di esistenza <u>globale</u> ("in grande") per il pb. di Cauchy.

$$(P) \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I \text{ intervallo.}$$

1) f continua in $I \times \mathbb{R}$

2) f localmente lipschitziana nella variabile y, cioè:

$\forall Q = [a,b] \times [c,d] \subset I \times \mathbb{R} \quad \exists L_Q$ t.c.

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq L_Q |y_1 - y_2| \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall y_1, y_2 \in [c,d].$$

<u>OSS</u> Questo è vero, per esempio, se $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua.

3) f a crescita lineare risp. alla y

$$|f(x,y)| \leq M(x)\,(1+|y|) \qquad \forall (x,y) \in I \times \mathbb{R}$$

$M(x)$ continua

Allora, $\forall x_0 \in I, \forall y_0 \in \mathbb{R} \quad \exists!$ sol^{ne} (<u>globale!</u>) di (P), definita su tutto l'intervallo I. Vero anche se $I = \mathbb{R}$.

Esempi: eq

eq^{ne} lineare

$$\begin{cases} y' = a(x)\,y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

$a(x), b(x)$ continue in I

$f(x,y) = a(x)y + b(x)$ definita in $I \times \mathbb{R}$

continua in $I \times \mathbb{R}$ 1) ok

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = |a(x)(y_1 - y_2)| = |a(x)|\,|y_1 - y_2| \le L\,|y_1 - y_2|$$

se $x \in [a,b] \subset I$, $|a(x)| \le L$ 2) ok.

$$|f(x,y)| = |a(x)\,y + b(x)| \le |a(x)|\,|y| + |b(x)| \le$$

$$\le M(x)\,(|y| + 1)$$ 3) ok.

$M(x) = \max\{|a(x)|, |b(x)|\}$ continua

Altri esempi:

$$y' = \operatorname{sen}(xy)\, y\, e^x$$

$f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)\, y\, e^x \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ 1) e 2) ok).

$|f(x,y)| \le |y|\, e^x$ 3) ok.

Eq^{ni} di ordine superiore

$$y'' = f(x, y, y').$$

$$y'' = xy + (y')^2$$

La voglio trasformare in un <u>sistema</u> del 1° ordine.

$$\begin{cases} y'(x) = v(x) \\ v'(x) = x\,y(x) + v(x)^2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ formalmente si può scrivere nella forma

$$\underline{Y}'(x) = \underset{\sim}{F}(x, \underline{Y}(x))$$

$$\underline{Y}(x) = (y(x), v(x)) \qquad \underline{Y}'(x) = (y'(x), v'(x))$$