Eq^{ni} lineari del 1° ordine $\quad y' = a(x)y + b(x)$

Equazioni di Bernoulli:

$$y' = a(x)y + b(x)y^{\alpha}$$

con $\alpha \neq 0, 1$, altrimenti è lineare.

L'eq^{ne} è non lineare.
Dividiamo per y^{α}

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(x)y^{1-\alpha} + b(x)$$

Poniamo $z(x) = (y(x))^{1-\alpha}$
$\Rightarrow z'(x) = (1-\alpha)\, y(x)^{-\alpha} y'(x)$

$$\frac{z'}{1-\alpha} = a(x)z + b(x)$$ lineare del 1° ordine

$\Rightarrow$ si risolve in $z(x)$. $\Rightarrow \quad y(x) = (z(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$y' = -3e^{3x}y - e^{6x}y^2$$

$$\frac{y'}{y^2} = -\frac{3e^{3x}}{y} - e^{6x}$$

$$z(x) = -\frac{1}{y(x)}$$

$$z'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)^2}$$

$$z' = +3e^{3x}z - e^{6x}$$

$$z' = +3e^{3x}z - e^{6x}$$

$$a(x) = 3e^{3x} \Rightarrow A(x) = e^{3x}$$

$$z(x) = e^{e^{3x}}\left(k - \int e^{-e^{3x}} e^{6x}\,dx\right) = (*)$$

$$\int e^{-e^{3x}} \underset{\underset{e^{3x}\cdot e^{3x}}{\shortparallel}}{e^{6x}}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{-t}\,t\,dt =$$

$$e^{3x} = t$$

$$3e^{3x}dx = dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(-e^{-t}t + \int e^{-t}dt\right) = \frac{1}{3}\left(-e^{-t}t - e^{-t}\right)$$

$$(*) = e^{e^{3x}}\left(k + \frac{1}{3}e^{-e^{3x}}e^{3x} + \frac{1}{3}e^{-e^{3x}}\right) = ke^{e^{3x}} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}$$

$$y(x) = -\frac{1}{z(x)} = -\frac{1}{ke^{e^{3x}} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}} = -\frac{3}{he^{e^{3x}} + e^{3x} + 1}$$

$$h = 3k$$

Eq^{ni} a variabili separabili

$$y' = f(x)\,g(y)$$

1) Si cercano le sol^{ni} $y(x) \equiv$ costante
   Sono i valori y_0 che annullano g.

2) Divido per $g(y)$ $\Rightarrow$ $\dfrac{y'}{g(y)} = f(x)$

Integro rispetto alla x

$$\int \frac{y'(x)\,dx}{g(y(x))} = \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y'(x) = y \\ y'(x)\,dx = dy \end{array}}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = H(y)$$

dove H è una primitiva di $\dfrac{1}{g}$

Se poi riesco a invertire la H, ottengo

$$y(x) = H^{-1}\left(F(x) + c\right).$$

Esempio

$$\begin{cases} xy' = \operatorname{tg} y \\ y(1) = \cancel{\frac{\pi}{3}}\ \pi \end{cases} \qquad y' = \frac{\operatorname{tg} y}{x}$$

$\Rightarrow$ sol^{ne} $y(x) \equiv \pi$

(è l'unica sol^{ne} - discuteremo dopo l'unicità)

$$\begin{cases} xy' = \operatorname{tg} y \\ y(1) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\int \frac{y'}{\operatorname{tg} y}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx$$

$$= \int \frac{dy}{\operatorname{tg} y} = \ln |x| + c$$

$x > 0$

$$\ln |\operatorname{sen} y| = \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\, dy$$

$$\ln(\operatorname{sen} y)$$ perché y parte da $\frac{\pi}{3}$, dove il seno è > 0.

$$\ln(\operatorname{sen} y) = \ln x + c$$

$$\operatorname{sen} y = e^{\ln x + c} = k\, x \qquad \text{dove } k = e^c$$

Impongo la condizione iniziale. $y(1) = \frac{\pi}{3}$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = k \cdot 1 \qquad \Rightarrow \operatorname{sen} y = \frac{\sqrt{3}}{2} x$$

$$\operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ perché parte da $\frac{\pi}{3}$

$$\boxed{y = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)}$$

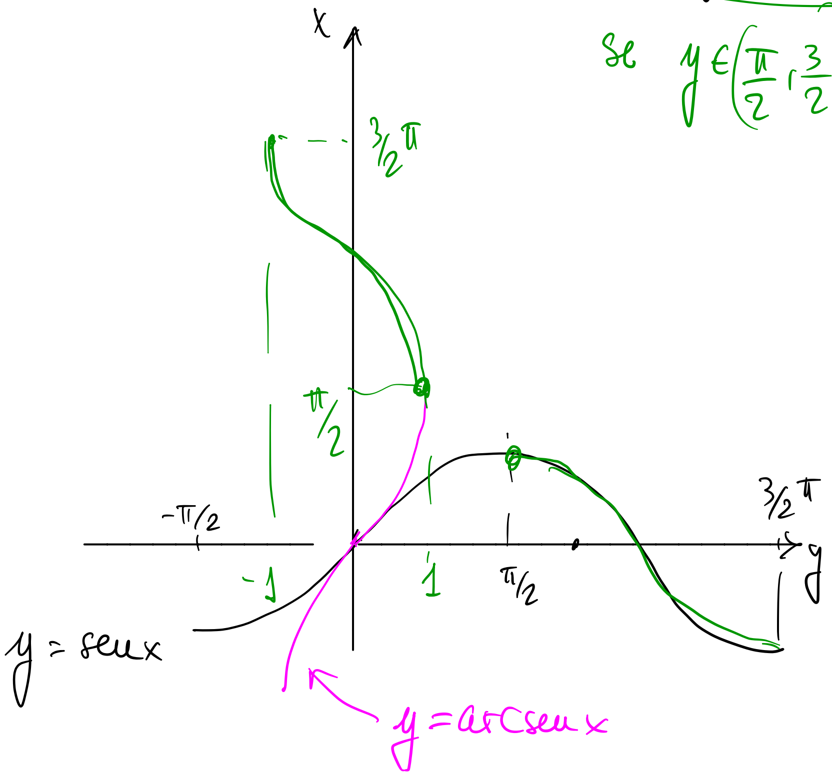
$$\begin{cases} xy' = \operatorname{tg} y \\ y(1) = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

ho cambiato la condizione iniziale

Come prima, si arriva a $\operatorname{sen} y(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

se $y \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, l'inversa di sen y è

$\pi - \operatorname{arcsen} x$



$$y(x) = \pi - \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right)$$

Esercizio: Risolvere l'eq^{ne}

$$y' = y^2$$ è a variabili separabili

1) Cerco le sol^{ni} costanti $\qquad y \equiv 0.$

2) $$\frac{y'}{y^2} = 1 \implies \int \frac{y'}{y^2}\,dx = \int 1\,dx = x + c$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = -\frac{1}{y}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{x+c}}$$

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) \\ y(0) = 1 \end{cases} \implies y(x) = -\frac{1}{x+c}$$

$$1 = -\frac{1}{c} \implies c = -1$$

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

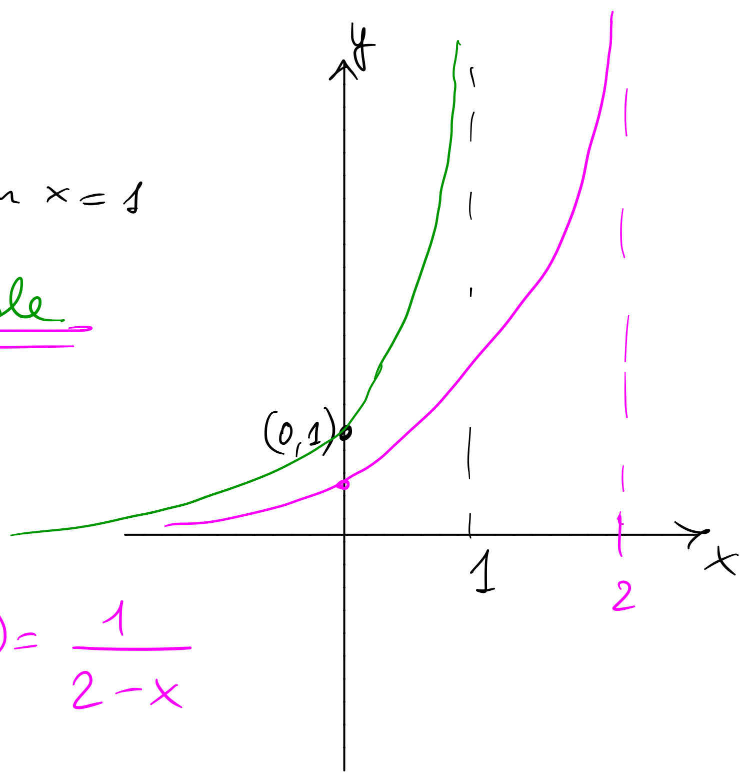
N.B ha un asintoto verticale in $x = 1$

E' una soluz. locale, non globale

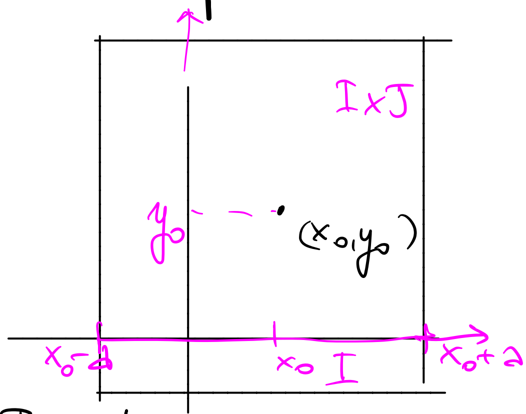
Se la C.I. fosse

$$y(0) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{1}{c} \implies c = -2 \implies y(x) = \frac{1}{2-x}$$



TEOREMA (Esistenza e unicità "locale", "in piccolo" per il pb di Cauchy).



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (P)$$

$f(x,y)$ è una funzione definita in $I \times J$, dove
$I = [x_0 - a, x_0 + a]$, $J = [y_0 - b, y_0 + b]$

1) f continua in $I \times J$. ($\Rightarrow f$ limitata in $I \times J$)

2) $\exists L$ t.c. $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L|y_1 - y_2|$ $\forall x \in I$ $\forall y_1, y_2 \in J$

cioè f è Lipschitziana rispetto alla y (unif. rispetto a x)

Allora $\exists$ $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ (quindi $\delta \le a$)

ed $\exists$ un'unica funzione $y(x) : I_0 \longrightarrow J$ di classe $C^1(I_0)$

sol^{ne} del pb. di Cauchy (P)

OSS una c.s. affinché 2) sia vera è che

$\frac{\partial f}{\partial y}$ sia limitata in $I \times J$, quindi va benissimo se

$\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua in $I \times J$.

Infatti $$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi)\right| |(y_1 - y_2)|$$
$$\le L \, |y_1 - y_2|$$

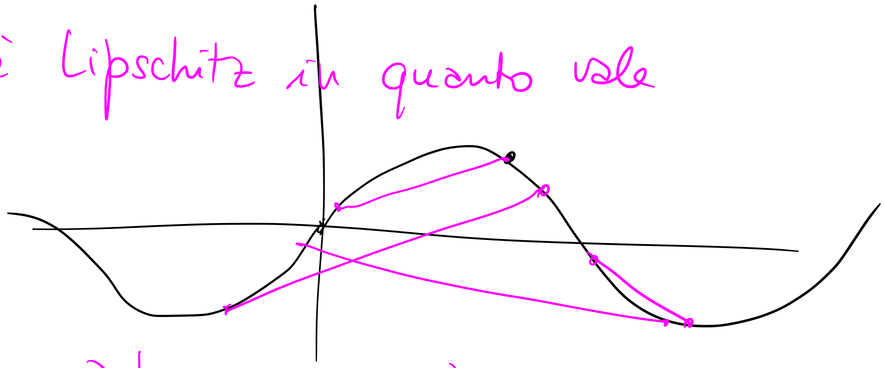
Una funzione $g(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ si dice Lipschitziana se $\exists\ L > 0$ t.c.

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq L\, |t_1 - t_2| \qquad \forall\, t_1, t_2 \in I$$

<u>Esempi</u>. $g(t) = \operatorname{sen} t$ è Lipschitz in quanto vale

$|\operatorname{sen} t_1 - \operatorname{sen} t_2| \leq L |t_1 - t_2|$

con $L = 1$

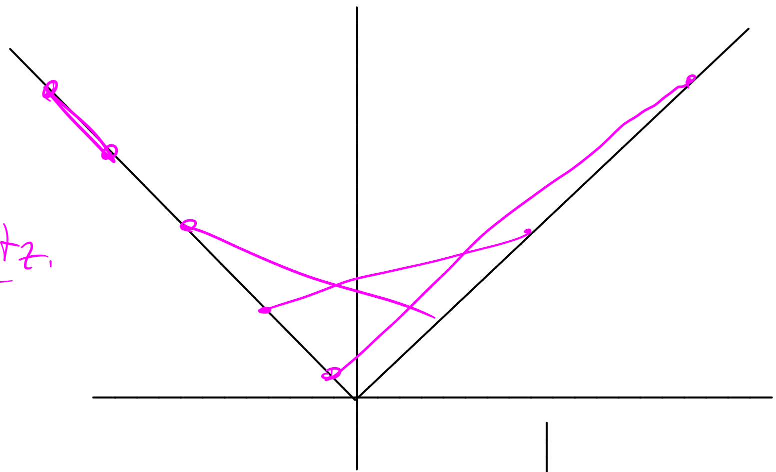


$$|\operatorname{sen} t_1 - \operatorname{sen} t_2| = |\cos \xi \ (t_1 - t_2)| \leq |t_1 - t_2|$$

<u>OSS</u> Se g ha derivata limitata, allora è Lipschitziana.

$$|g(t_1) - g(t_2)| = |g'(\xi)|\ |t_1 - t_2| \leq L\, |t_1 - t_2|$$

$g(t) = |t|$ è Lipschitz (anche se non è derivabile).



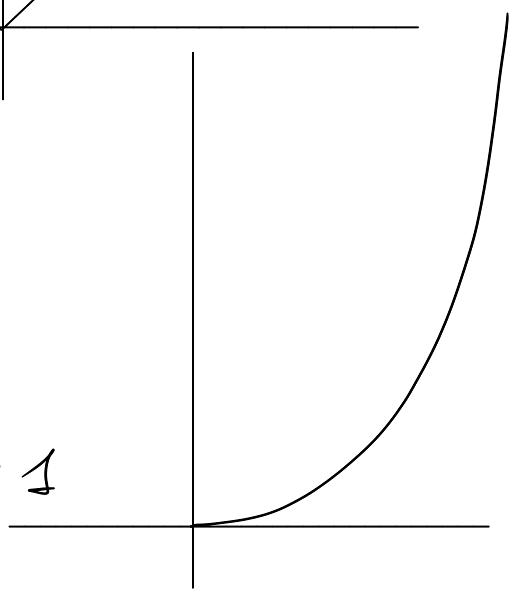
<u>Esempi di $g(t)$ non Lipschitz.</u>

$g(t) = t^2$ su $\mathbb{R}$.

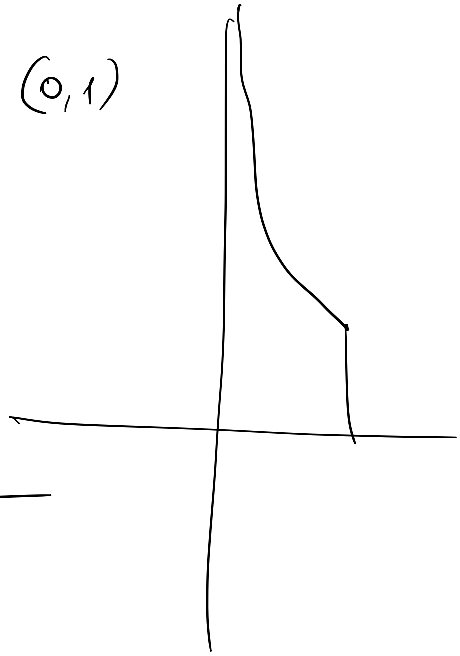
se fosse $|t_1^2 - t_2^2| \leq L\, |t_1 - t_2|$

$$t_1 = t_2 + 1 \Rightarrow |(t_2+1)^2 - t_2^2| \leq L \cdot 1$$

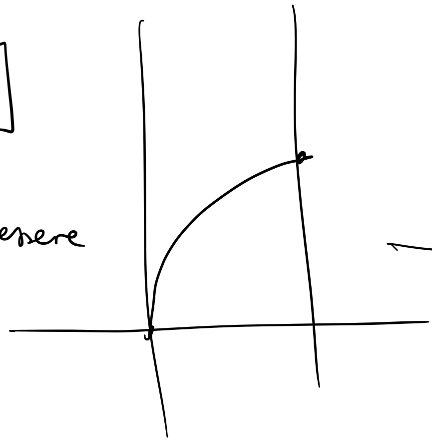
$$\overset{\shortparallel}{|2t_2 + 1|} \quad \text{falso per } t_2 \gg 1$$



$g(t) = \dfrac{1}{t}$ non è Lipschitz in $(0,1)$



$g(t) = \sqrt{t}$ in $[0,1]$



Se fosse Lipschitz, dovrebbe essere

$$|\sqrt{t_2} - \sqrt{t_1}| \le L\, |t_2 - t_1|$$

$t_1 = 0$

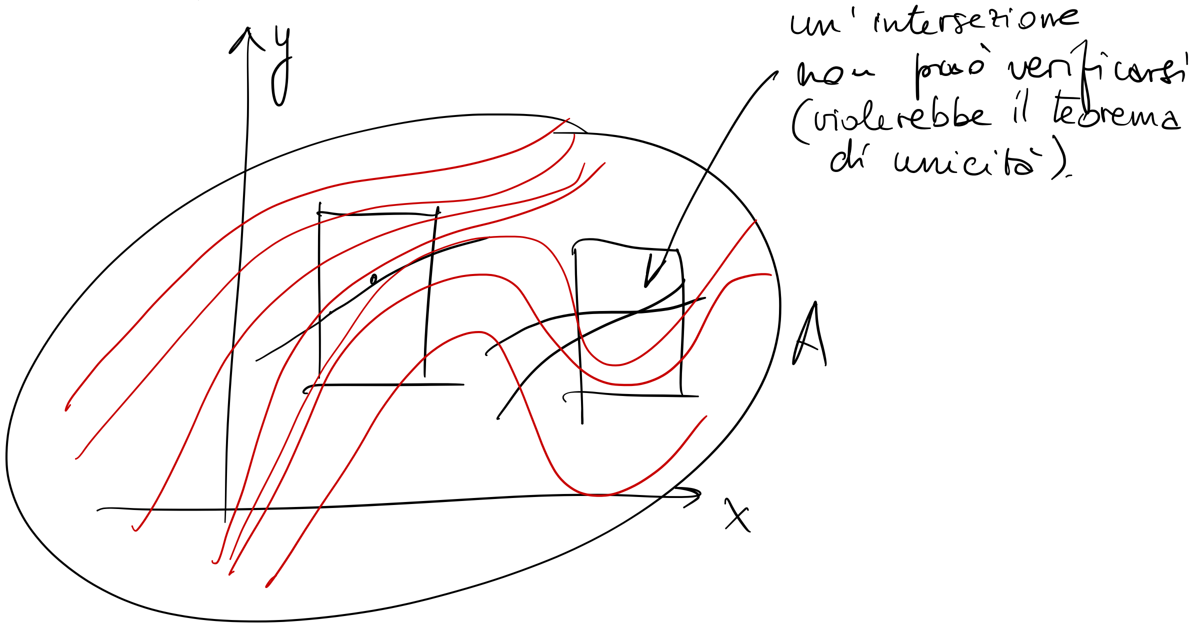
$$\sqrt{t_2} \le L\, t_2$$

$1 \le L \sqrt{t_2}$ $\qquad \dfrac{1}{\sqrt{t_2}} \le L.$ $\qquad$ falso per $t_2 \to 0^+$

Conseguenze del teorema di Cauchy:

(E) $y' = f(x,y)$ con f di classe $C^1(A)$

come sono fatte le sol^{ni} di (E)?



per ogni p.to di A passa una e una sola soluzione

Attenzione: se manca la cond^{ne} di 2) di Lipschitzianità, continua a valere l'esistenza, ma viene meno l'unicità.