$$f(x,y) = x^2 y^3 (6-x-y)$$

Trovare e classificare i pti critici

$$f_x(x,y) = y^3\left[2x(6-x-y) - x^2\right] = x y^3\left[12-3x-2y\right]$$

$$f_y(x,y) = x^2\left[3y^2(6-x-y) - y^3\right] = x^2y^2\left[18-3x-4y\right]$$

$$\begin{cases} x y^3\left[12-3x-2y\right] = 0 \\ x^2y^2\left[18-3x-4y\right] = 0 \end{cases}$$ Gli assi sono luoghi di pti critici

in più, le sol^{ni} di $\begin{cases} 3x+2y=12 \\ 3x+4y=18 \end{cases}$ $\begin{cases} y=3 \\ x=\frac{12-2y}{3}=2 \end{cases}$ $\Rightarrow (2,3)$

Dovrei calcolare f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} per studiare l'hessiano nei pti critici.

Purtroppo sui punti degli assi $\det(D^2 f) = 0$

$\Rightarrow$ matrice hessiana semidef^{ta} $\Rightarrow$ nessuna conclusione.

Nel punto $(2,3)$ lo studio dell'Hessiano fornisce una risposta (ma la vediamo dopo)

Questa situazione è "tipica".

PROP. Se una $f \in C^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$ ha una curva di pti critici, allora:

1) f è costante lungo la curva,
2) $\det(D^2 f) = 0$ nei pti della curva.

PROP. Se una $f \in C^2(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$ ha una curva di pti critici, allora:

1) f è costante lungo la curva;
2) $\det(D^2 f) = 0$ nei pti della curva.

(Una curva è un'applicazione $\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$t \longmapsto (x(t), y(t)) = \underline{\gamma}(t)$

Si chiama curva anche l'immagine di $\underline{\gamma}$

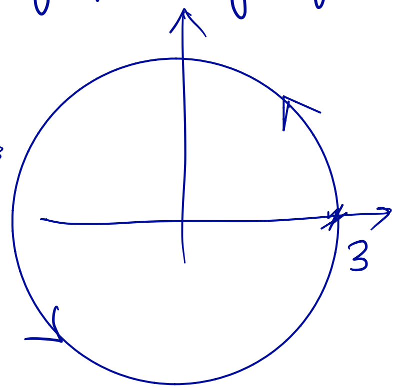
con $x(t), y(t) \in C^1[a,b]$).

Esempi:

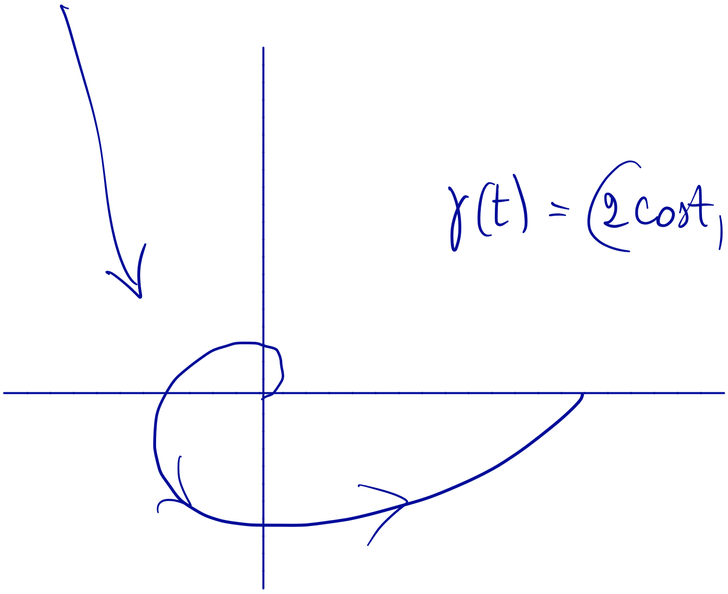
$\gamma(t) = (t, 3t+2)$, $t \in \mathbb{R}$ è la retta $y = 3x+2$.

$\gamma(t) = (t, f(t))$ $t \in [a,b]$ è il grafico $y = f(x)$

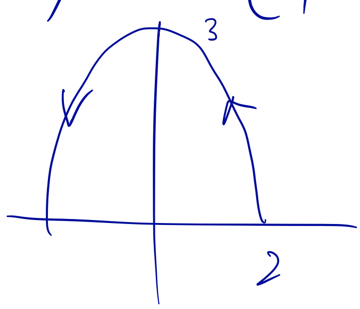
$\gamma(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$



$\gamma(t) = (t\cos t, t\operatorname{sen} t)$ $t \in [0, 2\pi]$



$\gamma(t) = (2\cos t, 3\operatorname{sen} t)$ $t \in [0, \pi]$



<u>Dim.</u> 1) La funzione lungo la curva è data da

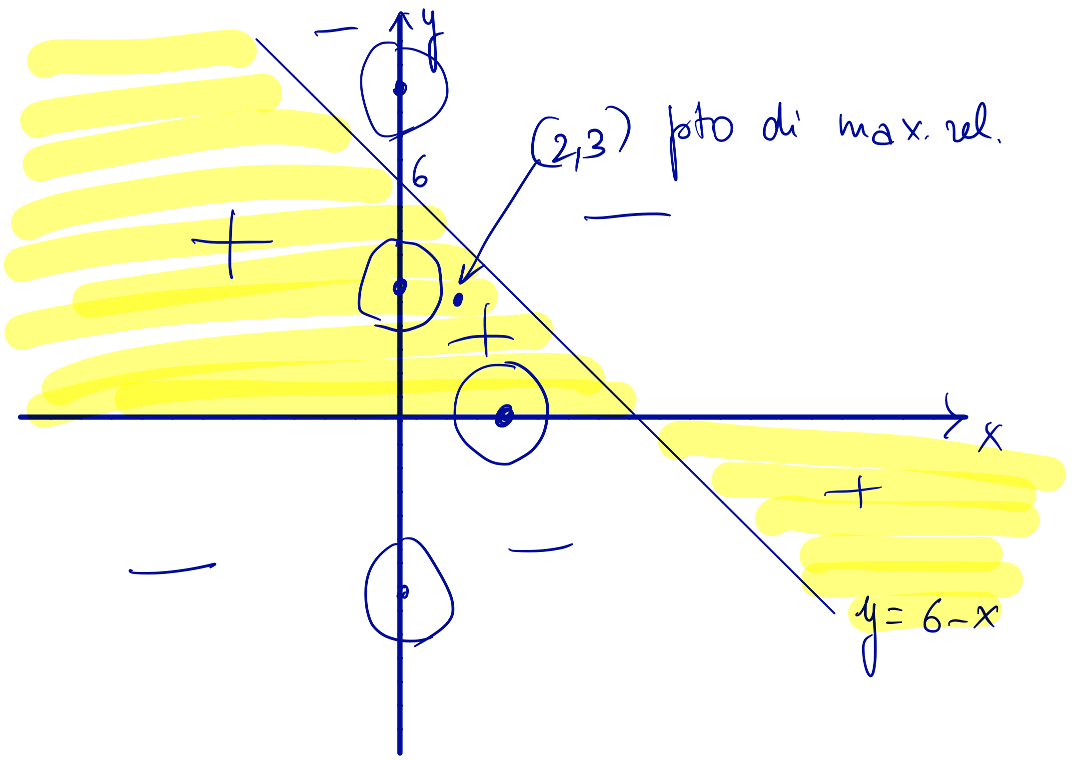
$$\varphi(t) = f(\underline{\gamma}(t)) = f(x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b]$$

$$\varphi'(t) = \underbrace{\nabla f(\underline{\gamma}(t))}_{\substack{\parallel \\ 0 \\ \text{per ipotesi}}} \cdot \underline{\gamma}'(t) = f_x(x(t), y(t))\, x'(t) + f_y(x(t), y(t))\, y'(t) =$$

$$= 0 \implies \varphi(t) = \text{costante}$$

$\square$

Torniamo all'esercizio. $\Rightarrow$ f sugli assi vale zero.
Studio il segno di f.



I pti dell'asse x sono tutti "di sella" (anche se l'unico che ha la forma di una sella è $(6,0)$)
I pti dell'asse y, della forma $(0,y)$, sono:

- min. rel. se $0 < y < 6$
  max. rel se $y < 0 \lor y > 6$.
  selle se $y = 0$, $y = 6$.

Estremi relativi di $f(x,y)= e^{x^2-y^2}(x^4-y^4)$

$$f_x(x,y)= e^{x^2-y^2}\left(4x^3+2x(x^4-y^4)\right) = 2xe^{x^2-y^2}(2x^2+x^4-y^4)$$

$$f_y(x,y)= e^{x^2-y^2}\left(-4y^3-2x^4y+2y^5\right) = -2y\, e^{x^2-y^2}(2y^2+x^4-y^4)$$

<u>Pti critici</u>
$$\begin{cases} x\,(2x^2+x^4-y^4)=0 \\ y\,(2y^2+x^4-y^4)=0 \end{cases}$$

$(0,0)$
$$\begin{cases} x=0 \\ y^4=2y^2 \end{cases} \qquad y=\pm\sqrt{2} \qquad (0,\pm\sqrt{2})$$

$$\cancel{\begin{cases} y=0 \\ 2x^2+x^4=0 \end{cases}} \qquad \begin{array}{l} 2x^2+x^4-y^4=0 \\ 2y^2+x^4-y^4=0 \end{array} \Bigg|\Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow \cancel{(0,0)}$$

$$f_{xx}(x,y)= 2e^{x^2-y^2}(2x^2+x^4-y^4)+\underbrace{2x(\dots)}_{=0 \text{ se } x=0}$$ se $x=0$

$$= 2e^{-y^2}(-y^4)$$

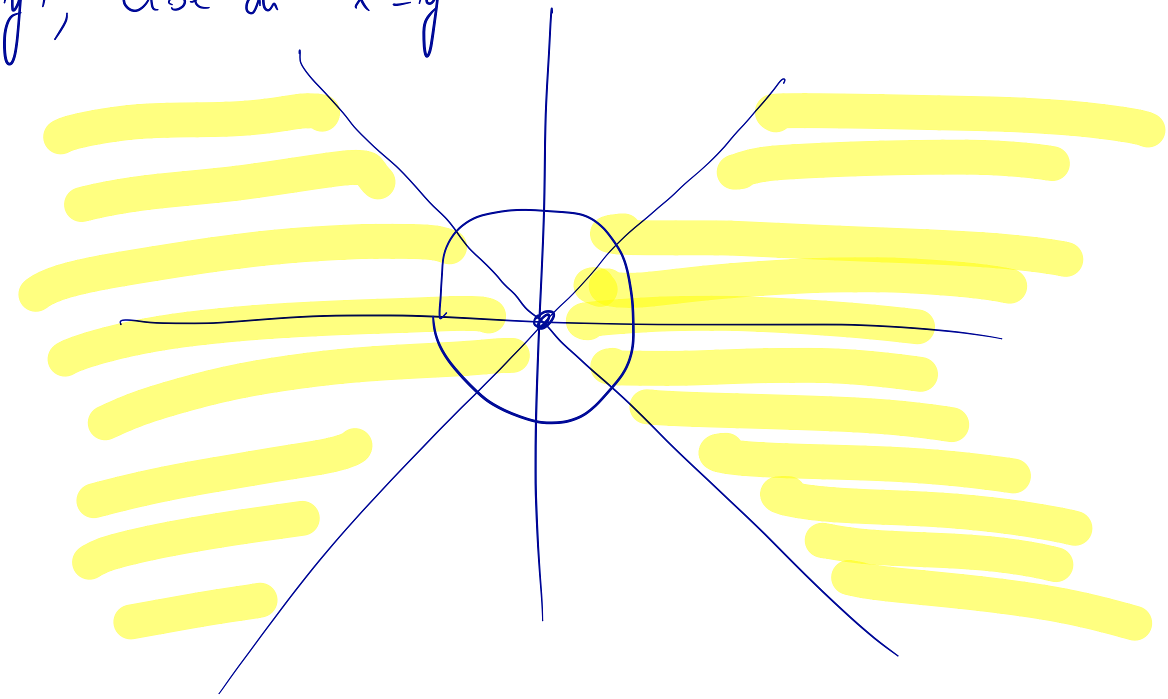
$$f_{xy}(0,y)=0 \qquad f_y=-2y\,e^{x^2-y^2}(2y^2+x^4-y^4)$$

$$f_{yy}(0,y)=-2e^{-y^2}\left(2y^2-y^4+y(4y-4y^3)-2y^2(2y^2-y^4)\right)$$
$$=-2e^{-y^2}\left(2y^2-y^4+4y^2-4y^4-4y^4+2y^6\right)$$
$$=-2e^{-y^2}y^2(6-9y^2+2y^4)$$

$$D^2f(0,0)=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow ??$$

$$D^2f(0,\pm\sqrt{2})=\begin{bmatrix}-8e^{-2}&0\\0&16e^{-2}\end{bmatrix} \Rightarrow \text{pti di sella.}$$

Per studiare l'origine, studio il segno di f, che è il segno di x^4-y^4, cioè di x^2-y^2



$(0,0)$ pto di sella.

$$f(x,y) = (2x-3)\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Dimostrare che l'origine è un estremo relativo.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2 + \dfrac{(2x-3)\,x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \\ f_y(x,y) = (2x-3)\,e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

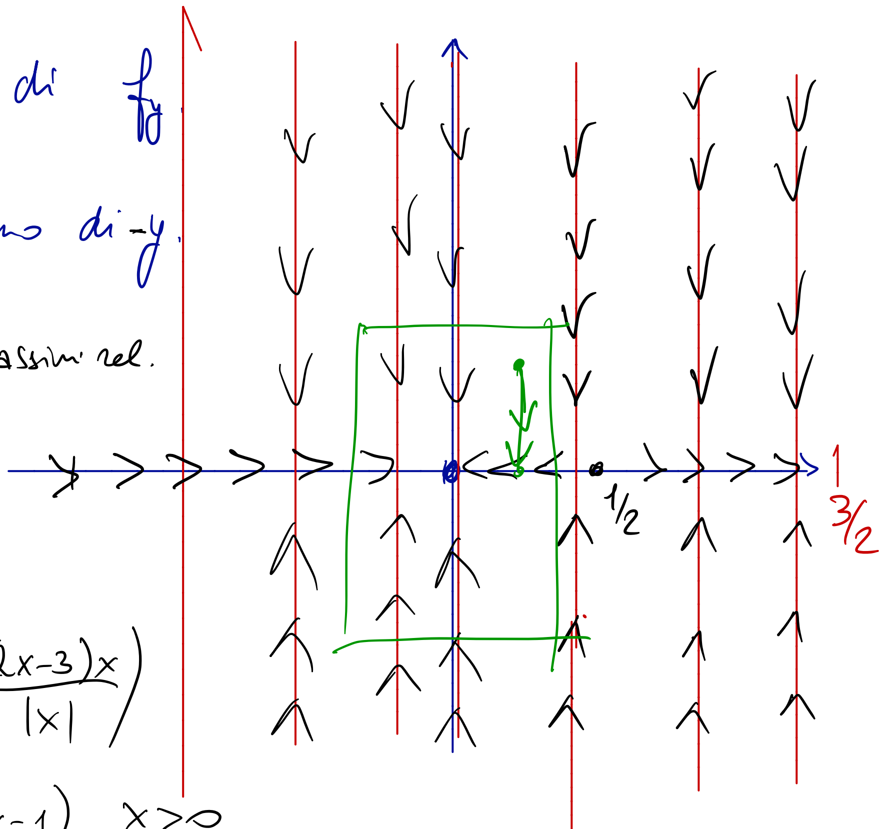
f non è derivabile parzialmente in $(0,0)$ (già visto).

1° modo) studio del segno di $f(x,y) - f(0,0) = (2x-3)e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 3$
(non lo faccio)

2° modo) Studio il segno di f_y

f_y, per $x < \frac{3}{2}$, ha il segno di $-y$.

$\Rightarrow$ L'asse x è luogo di massimi rel. lungo le rette verticali.



Studio $f(x,0) = \varphi(x)$

$$\varphi'(x) = f_x(x,0) = e^{|x|}\left(2 + \frac{(2x-3)x}{|x|}\right)$$

$$= \begin{cases} e^x(2+2x-3) = e^x(2x-1) & x > 0 \\ e^{-x}(2-2x+3) = e^{-x}(5-2x) & x < 0 \end{cases}$$

$\forall (x,y)$ nell'intorno disegnato in verde si ha :

$f(x,y) \leq f(x,0) \leq f(0,0)$ pto di max. rel.

Equazioni differenziali

Sono uguaglianze della forma $F(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad x \in [a,b]$

L'incognita è la funzione $y(x)$.

Esempi:

$$y'(x) = g(x) \leftarrow \text{assegnata}$$

$$y'(x) = \frac{1}{1+4x^2} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

soluzione: $\quad y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + c$

$$y'(x) = \lambda\, y(x)$$

se $\lambda > 0$, descrive la crescita di una colonia di organismi in condizioni favorevoli

Sol^{ni} $\quad y(x) = c e^{\lambda x} \quad c \in \mathbb{R}.$

Se $\lambda < 0$, per esempio modellizzo il decadimento radioattivo di una sostanza

Eq^{ni} del 2° ordine $\quad F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$

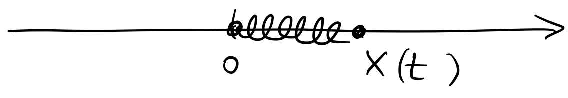
Esempio $\quad x = x(t)$ posizione di un punto su una retta.

Eq. della dinamica

$$m\, x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

$$x''(t) = -K\, x(t)$$

$$K > 0$$



$$x(t) = c_1 \cos(\sqrt{K}\, t) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{K}\, t)$$