TEOREMA

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, A aperto.

Sia $\underline{x}^\circ \in A$ un pto critico di f $\quad \nabla f(\underline{x}^\circ) = \underline{0}$

C.S. affinché $\underline{x}^\circ$ sia un punto di $\overset{\text{max}}{\text{min}}$. relativo (stretto) per f è che la matrice $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ sia def^{ta} $\overset{\text{negativa}}{\text{positiva}}$.

C.N. affinché $\underline{x}^\circ$ sia un pto di $\overset{\text{max}}{\text{min}}$. relativo è che $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ sia semidef^{ta} $\overset{\text{negativa}}{\text{positiva}}$.

Se $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ è indefinita, il pto non è né di max. rel. né di minimo relativo (punto di sella).

OSS Se la matrice $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ è semidef^{ta} positiva (o negativa) non possiamo dire nulla

ESERCIZIO. Trovare e classificare i pti critici di

$$f(x,y) = y^4 + x^3 - 4y^2 - 3x^2 - 1.$$

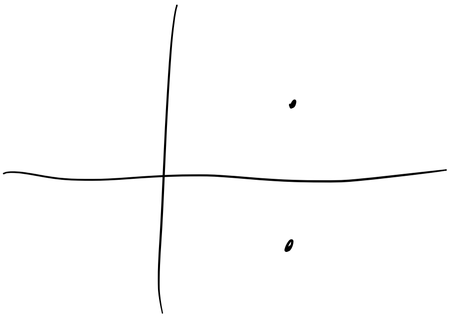
Dire inoltre se f ammette max. e min. assoluti in $\mathbb{R}^2$.

$f_x(x,y) = 3x^2 - 6x$

$f_y(x,y) = 4y^3 - 8y$

Pti critici $\begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 & x = 0,\ 2 \\ 4y^3 - 8y = 0 & y = 0,\ \pm\sqrt{2} \end{cases}$

6 pti critici $(0,0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$, $(2,0)$, $(2,\pm\sqrt{2})$



OSS $f(x,-y) = f(x,y)$

$f_{xx}(x,y) = 6x - 6 = 6(x-1)$

$f_{xy}(\ ) = 0$

$f_{yy}(x,y) = 12y^2 - 8 = 4(3y^2 - 2)$

$H(0,0) = D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

$(0,0)$ = max. relativo

$H(2,0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ sella $\quad H(0,\pm\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}$ sella

$H(2,\pm\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$ min. relativo.

Sull'asse x f vale $f(x,0) = x^3 - 3x^2 - 1$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x,0) = \pm\infty \Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty \ ; \ \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty.$$

$f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$ Dimostrare che è limitata inferiormente. (per casa).

$f(x,y) = x^3 y - 2y^2 + 3x^2 y$ Trovare e classif. i punti critici.

$f_x(x,y) = 3x^2 y + 6xy$

$f_y(x,y) = x^3 - 4y + 3x^2$

Pti critici
$$\begin{cases} xy(x+2) = 0 \\ x^3 - 4y + 3x^2 = 0 \end{cases}$$

$x=0,\ y=0$

$y=0 \quad x=-3$

$x=-2,\ y=1$

$4y = -8 + 12 = 4$

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy + 6y & 3x^2 + 6x \\ 3x^2 + 6x & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6y(x+1) & 3x(x+2) \\ 3x(x+2) & -4 \end{pmatrix}$$

$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ semidef^{ta} negativa $\Rightarrow$ non si può dire nulla.

$H(-3,0) = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix}$ $\det \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow (-3,0)$ pto di sella.

$H(-2,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \Longrightarrow$ max. relativo.

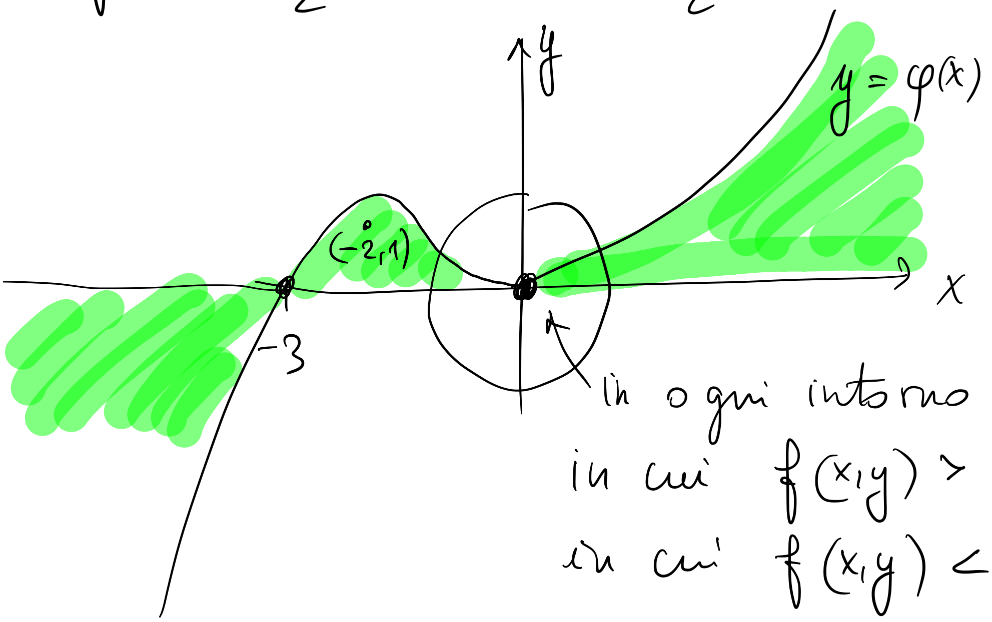
$f(x,y) = x^3y - 2y^2 + 3x^2y = y\left(x^3 - 2y + 3x^2\right)$

$f_x(x,y) = 3x^2y + 6xy$

$f_y(x,y) = x^3 - 4y + 3x^2$

Studio di $(0,0)$

$$y = \frac{x^3+3x^2}{2} = \varphi(x) = \frac{1}{2}x^2(x+3)$$



Coloro in verde la zona dove $f(x,y)$ è positiva.

In ogni intorno di $(0,0)$ ci sono pti in cui $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ e pti in cui $f(x,y) < 0 = f(0,0)$

$\Longrightarrow (0,0)$ sella.

Pti critici di

$$f(x,y,z) = (x^2+y^2)(1-z^2) + z^2$$

$$f_x(x,y,z) = 2x\,(1-z^2)$$
$$f_y(x,y,z) = 2y\,(1-z^2)$$
$$f_z(x,y,z) = -2z(x^2+y^2) + 2z = 2z(1-x^2-y^2)$$

$f_{xx} = 2(1-z^2)$ $\quad f_{xy} = 0 \quad f_{xz} = -4xz$

$f_{yy} = 2(1-z^2), \quad f_{yz} = -4yz$

$f_{zz} = 2(1-x^2-y^2)$

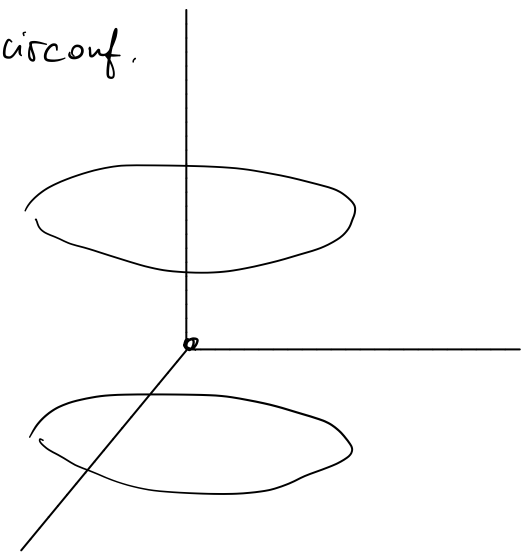
$$\begin{cases} 2x\,(1-z^2) = 0 \\ 2y\,(1-z^2) = 0 \\ -2z(x^2+y^2) + 2z = 2z(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

$x=0,\ y=0,\ z=0$

$z=\pm 1,\ x^2+y^2=1$

Pti critici sono: $(0,0,0)$, più le due circonf.

$x^2+y^2=1, \quad z=\pm 1$



$$D^2f(0,0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

def^{ta} positiva $\Rightarrow$ $(0,0,0)$ pto di min. rel.

Sulla circ. $x^2+y^2=1, \quad z=1$

$$D^2 f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -4x \\ 0 & 0 & -4y \\ -4x & -4y & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -4x \\ 0 & -\lambda & -4y \\ -4x & -4y & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda x^2 + 16\lambda y^2 =$$
$$= \lambda(16x^2+16y^2-\lambda^2) = \lambda(16-\lambda^2)$$

$\lambda = 0$

$\lambda = \pm 4$

sella

Dim. TEOREMA $f \in C^2(A)$, $\underline{x}^0 \in A$, $\nabla f(\underline{x}^0) = 0$.

$D^2 f(\underline{x}^0)$ def^{ta} positiva $\Longrightarrow$ $\underline{x}^0$ pto di min. rel. ?

LEMMA (le matrici positive sono "uniformemente positive")

A matrice simmetrica $N \times N$ def^{ta} positiva.

Allora $\exists\, m > 0$ t.c. $F_A(\underline{\xi}) = (A\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}) \geq m \|\underline{\xi}\|^2 \quad \forall\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N$

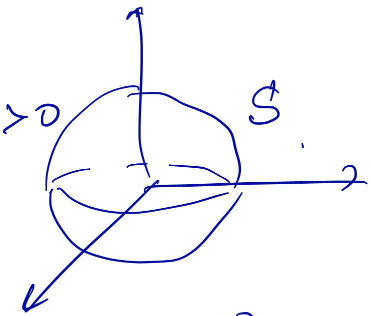
$$(A\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}) = \sum_{ij} a_{ij}\, \xi_i \xi_j$$

Dim. Lemma

Consideriamo $S = \{ \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N : \|\underline{\xi}\| = 1 \}$ chiuso e limitato.

$F_A(\underline{\xi})$ continua su S, $F_A(\underline{\xi}) > 0$ su S.

$F_A(\underline{\xi})$ ammette min. assoluto su S, chiamiamolo $m > 0$



Sia ora $\underline{\xi} \in \mathbb{R}^N$

$$F_A(\underline{\xi}) = (A\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}) = \|\underline{\xi}\|^2 \left(A \left(\frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|}\right)^T, \frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \right) \geq m \|\underline{\xi}\|^2 \qquad \square$$

$$\frac{\underline{\xi}}{\|\underline{\xi}\|} \in S$$

Ora usiamo la formula di Taylor (2° ordine, resto di Peano)

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \cancel{\nabla f(\underline{x}^0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}^0)} + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}^0)(\underline{x}-\underline{x}^0)^T, \underline{x}-\underline{x}^0\right) +$$
$$+ o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2\right)$$

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) = \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}^0)(\underline{x}-\underline{x}^0)^T, \underline{x}-\underline{x}^0\right) + o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2\right) \geq$$

per $\underline{x} \to \underline{x}^0$.

Lemma

$$\geq \frac{m}{2}\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2 + o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2\right) =$$

$$= \underbrace{\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2}_{\geq 0} \underbrace{\left(\frac{m}{2} + o(1)\right)}$$

$\hookrightarrow$ positiva in un opportuno intorno di $\underline{x}^0$ perché è una funzione che tende a $m/2 > 0$.

Abbiamo provato che $\exists$ un intorno U di $\underline{x}^0$ t.c.

$\forall \underline{x} \in U \setminus \{\underline{x}^0\} \quad f(\underline{x}) - f(\underline{x}^0) > 0. \implies \underline{x}^0$ pto di min. rel. stretto.

$\square$

Dim. Teorema parte 2^a.

$\underline{x}^\circ$ pto di min. rel. $\Rightarrow$ $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ semidef. positiva. ?

Per assurdo, supponiamo di no. $\Rightarrow \exists\, \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N$ t.c.

$$F_A(\underline{\xi}) = (A\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}) < 0 \qquad \text{dove } A = D^2 f(\underline{x}^\circ)$$

Formula di Taylor: questo $\underline{\xi}$!!

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^\circ) = \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}^\circ)(\underline{x}-\underline{x}^\circ)^T, (\underline{x}-\underline{x}^\circ)\right) + o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^\circ\|^2\right),$$

$\underline{x} = \underline{x}_0 + t\,\underline{\xi}$, $t \in \mathbb{R}$.

$$f(\underline{x}) - f(\underline{x}^\circ) = \frac{t^2}{2}\left(D^2 f(\underline{x}^\circ)\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}\right) + o\left(\|\underline{\xi}\|^2 \cdot t^2\right) =$$

$$= t^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}\underbrace{\left(D^2 f(\underline{x}^\circ)\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}\right)}_{<0} + o(1)\right)}_{<0 \text{ def}^{te} \text{ per } t\to 0} \qquad \text{per } t \to 0$$

$\Rightarrow$ def^{te} per $t \to 0$ $\quad f(\underline{x}^\circ + t\,\underline{\xi}) < f(\underline{x}^\circ)$ incompatibile con $\underline{x}^\circ$ min relativo $\square$

3^a parte Se $D^2 f(\underline{x}^\circ)$ indefinita $\Rightarrow$ x° né max né min. rel. ?

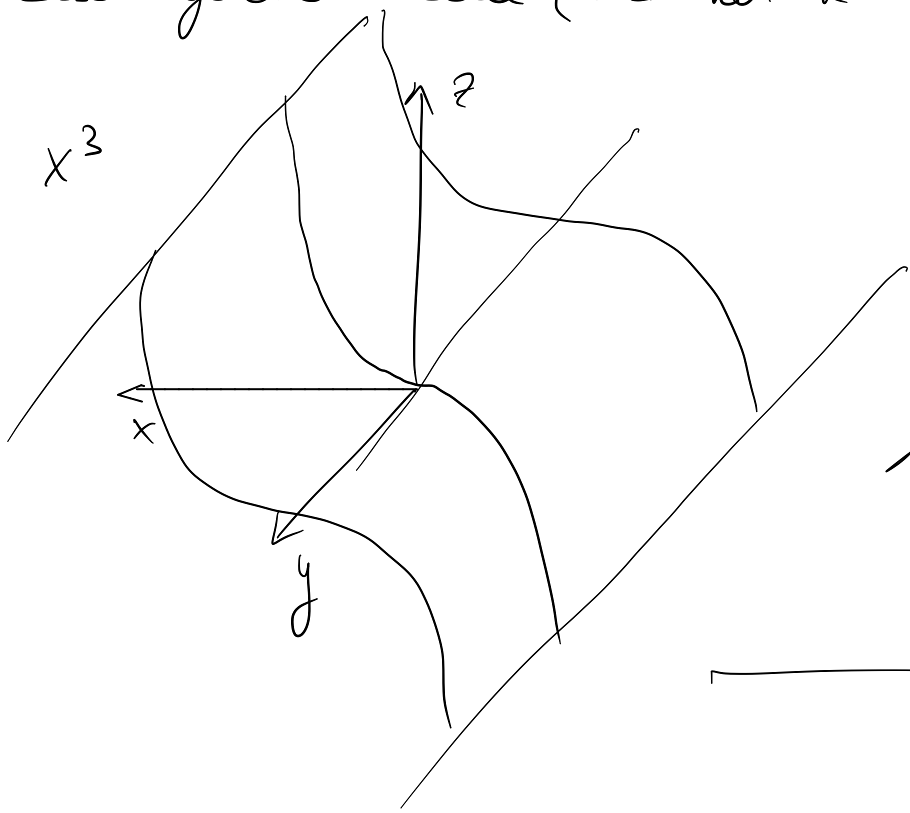
$\Downarrow$

$\exists\, \underline{\xi}$ t.c. $\left(D^2 f(\underline{x}^\circ)\,\underline{\xi}^T, \underline{\xi}\right) < 0 \Rightarrow$ Lungo la direz. di $\underline{\xi}$. f ha un max. rel. stretto

$\exists\, \eta$ t.c. $\left(D^2 f(\underline{x}^\circ)\,\underline{\eta}^T, \eta\right) > 0 \Rightarrow$ Lungo la direz. di $\underline{\eta}$ f ha un min rel. stretto

Esistono pti critici che non sono né max, né min relativo e che non assomigliano a selle (ma noi le chiamiamo selle)

$$f(x,y) = x^3$$



$$f_x(x,y) = 3x^2$$

$$f_y(x,y) = 0$$