Lunedì 3/14 (π-day)

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, A aperto.

Sia $\underline{x}^0 \in A$ un pto critico di f $\quad \nabla f(\underline{x}^0) = \underline{0}$

Pb. capire se $\underline{x}^0$ è pto di min. relativo, max relativo, oppure né max né min. relativo. per f.

Idea: si studia il "segno" della "derivata seconda"

Pb. la "derivata seconda" è una matrice (matrice hessiana).

$$D^2 f(\underline{x}^0) = \left[f_{x_i x_j}(\underline{x}^0) \right]_{i,j=1\dots N}.$$

Segno di una matrice quadrata (simmetrica)

$A = [a_{ij}]_{i,j=1\dots N}$ matrice quadrata $\underbrace{\text{simmetrica}}$

$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i,j = 1\dots N.$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2N} \\ - & - & - & - \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{NN} \end{bmatrix}$$

DEF. Sia $A = [d_{ij}]$ una matrice simmetrica come sopra.
Ad A si associa la forma quadratica

$$F_A(\underline{\xi}) : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_j) \longmapsto F_A(\underline{\xi}) = (\underline{A}\, \underline{\xi}^T, \underline{\xi}) = \sum_{i,j=1}^{N} d_{ij}\, \xi_i \xi_j$$

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad F_A(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - \xi_2^2.$

$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

DEF.

A si dice def^{ta} positiva $\Longleftrightarrow F_A(\underline{\xi}) > 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$

$\Updownarrow$ Teorema

Tutti gli autovalori di A sono > 0.

A si dice def^{ta} negativa $\Longleftrightarrow F_A(\underline{\xi}) < 0 \quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\}$

$\Updownarrow$

Tutti gli autovalori di A sono < 0

A si dice semi-def^{ta} positiva negativa $\Longleftrightarrow F_A(\underline{\xi}) \geqslant 0$ $\leqslant$ $\quad \forall \underline{\xi} \in \mathbb{R}^N$

$\Updownarrow$

Tutti gli autoval. di A sono $\geqslant 0$ $\leqslant 0$

A si dice indefinita $\Longleftrightarrow F_A(\underline{\xi})$ cambia segno

$\Updownarrow$

ci sono autovalori sia positivi che negativi.

Cosa sono gli autovalori di A? quei numeri reali $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\exists\, \underline{\xi} \neq \underline{0}$ t.c. $A\,\underline{\xi}^T = \lambda\,\underline{\xi}$ un tale $\underline{\xi}$ si chiama autovettore

Come si trovano gli autovalori? si risolve l'eq^{ne} algebrica

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad \text{eq}^{ne} \text{ algebrica di grado } N$$

polinomio caratteristico

Si dimostra che <u>se A è simmetrica</u> le radici del polinomio caratteristico sono tutte reali.

<u>Esempio 1</u> $N = 2$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ Gli autovalori sono 1, 3; infatti

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) = 0$$

$\Rightarrow$ matrice def^{ta} positiva.

$$F_A(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 > 0 \qquad \forall (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$ def^{ta} positiva.

$$P(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \text{entrambe} > 0.$$

$$F_A(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 3\xi_2^2 + 2\xi_1\xi_2 = (\xi_1 + \xi_2)^2 + 2\xi_2^2 > 0 \quad \forall (\xi_1, \xi_2) \neq (0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda) - 4 = -5\lambda + \lambda^2 = 0 \iff \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 5 \end{array}$$

matrice semidef positiva

$$F_A(\underline{\xi}) = 4\xi_1^2 + \xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 = (2\xi_1 + \xi_2)^2 \geq 0$$

Ma si annulla anche sul vettore non nullo $(1,-2)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{indefinita}$$

$$P(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) - 9 = \lambda^2 - 3\lambda - 7 = 0$$

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9+28}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{37}}{2} \begin{array}{l} \nearrow \text{una positiva} \\ \searrow \text{una negativa} \end{array}$$

$$F_A(\underline{\xi}) = \xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 6\xi_1\xi_2 .$$

Se $(\xi_1, \xi_2) = (1,0) \Rightarrow F_A(1,0) = 1 > 0$

$$F_A(1,-1) = 1+2-6 < 0 .$$

TEOREMA

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ di classe $C^2(A)$, A aperto.

Sia $\underline{x}^o \in A$ un pto critico di f $\quad \nabla f(\underline{x}^o) = \underline{0}$

C.S. affinché $\underline{x}^o$ sia un punto di $\overset{\text{max}}{\text{min.}}$ relativo (stretto) per f è che la matrice $D^2 f(\underline{x}^o)$ sia def^{ta} $\overset{\text{negativa}}{\text{positiva}}$.

C.N. affinché $\underline{x}^o$ sia un pto di $\overset{\text{max}}{\text{min.}}$ relativo è che $D^2 f(\underline{x}^o)$ sia semidef^{ta} $\overset{\text{negativa}}{\text{positiva}}$.

Se $D^2 f(\underline{x}^o)$ è indefinita, il pto non è né di max. rel. né di minimo relativo (punto di sella).

OSS Se la matrice $D^2 f(\underline{x}^o)$ è semidef^{ta} positiva (o negativa) non possiamo dire nulla

Modelli di riferimento

$f(x,y) = x^2 + y^2$. paraboloide ellittico.

$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x \\ f_y(x,y) = 2y \end{cases} \Rightarrow$ pto critico $(0,0)$

$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ def^{ta} positiva $\rightarrow$ $(0,0)$ è pto di min. relativo stretto (in realtà assoluto)

$f(x,y) = -x^2 - y^2$

$(0,0)$ pto critico $D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ def^{ta} negativa

$(0,0)$ pto di max. ~~relativo~~ assoluto per f.

$f(x,y) = x^2 - y^2$ paraboloide iperbolico.

$(0,0)$ pto critico, $D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ matrice indefinita

$\Rightarrow (0,0)$ punto di sella

Osserviamo che, se $D^2 f(\underline{x}^0)$ è solo semidefinita, può succedere di tutto.

$$f(x,y) = x^2 + y^4$$

$(0,0)$ unico pto critico.

$$g(x,y) = x^2 - y^4$$

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = D^2 g(0,0)$$

ma per f abbiamo un pto di min relativo (e assoluto)

per g " una sella

ESERCIZIO Trovare e classificare i punti critici di

$$f(x,y) = e^{3x-y}\,(x^2-y^2)$$

$$f_x(x,y) = e^{3x-y}\left(2x+3x^2-3y^2\right)$$
$$f_y(x,y) = e^{3x-y}\left(-2y-x^2+y^2\right)$$

Ricerca pti critici $\begin{cases} 2x+3x^2-3y^2=0 \\ -2y-x^2+y^2=0 \end{cases}$

$$2x-2y+2x^2-2y^2=0$$
$$x-y+(x-y)(x+y)=0$$
$$(x-y)(1+x+y)=0$$

$$\begin{cases} x=y \\ x=0 \end{cases} \;\Big|\; \Longrightarrow (0,0)=0$$

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ 2x+3x^2-3(x+1)^2=0 \end{cases} \Rightarrow -4x-3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{4} \quad y=-\frac{1}{4}$$

$$P_1=\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{4}\right)$$ due pti critici

$$f_x(x,y) = e^{3x-y}\left(2x+3x^2-3y^2\right)$$
$$f_y(x,y) = e^{3x-y}\left(-2y-x^2+y^2\right)$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{3x-y}(2+6x)+\left(2x+3x^2-3y^2\right)3e^{3x-y}$$

$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(\ )=-6y\,e^{3x-y}+\underbrace{(\qquad)}_{\text{si annulla nei pti critici}}$$

$$f_{yy}(x,y)=e^{3x-y}(-2+2y)+(\qquad)$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{3x-y}(2+6x) + (2x+3x^2-3y^2)\,3e^{3x-y}$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(\ ) = -6y\,e^{3x-y} + \underbrace{(\qquad)}_{\text{si annulla nei pti critici}}$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{3x-y}(-2+2y) + (\qquad)$$

$$D^2f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\text{sella}}$$

$$D^2f\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \begin{bmatrix} e^{-2}\left(-\frac{5}{2}\right) - \lambda & \frac{3}{2}e^{-2} \\ \frac{3}{2}e^{-2} & -\frac{5}{2}e^{-2} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \frac{25}{4}e^{-4} + 5e^{-2}\lambda - \frac{9}{4}e^{-4}$$

$$= \lambda^2 + 5e^{-2}\lambda + 4e^{-4} \qquad \text{radici negative}$$

$\Rightarrow D^2f(P_1)$ def^{ta} negativa $\Rightarrow \left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ pto di massimo rel. stretto.

N.B Tutto quanto sto per dire vale solo in dim 2.

$$D^2 f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = (a-\lambda)(c-\lambda) - b^2 = 0$$

$$\lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{\lambda_1+\lambda_2}\lambda + \underbrace{ac - b^2}_{\det(D^2 f) = \lambda_1 \cdot \lambda_2} = 0.$$

Se ne deduce che:

se $\det D^2 f(x_0,y_0) < 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ pto di sella.

se $\det D^2 f(x_0,y_0) > 0$, $f_{xx}(x_0,y_0) > 0 \Rightarrow (x_0,y_0)$ pto di minimo rel.

$\det > 0$, $f_{xx} < 0 \Rightarrow$ pto di massimo rel

$\det D^2 f(x_0,y_0) = 0 \Rightarrow$ non si può dire nulla dall'esame delle derivate seconde.