Derivazione di funzioni composte (caso generale)

TEOREMA $A \subset \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^N$ aperti

$\underline{G} : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow E \subset \mathbb{R}^N$ differenziabile

$$\underline{x} = (x_1, \dots x_m) \mapsto \underline{G}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} G_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ G_N(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

$\left(\Longrightarrow D\underline{G}(\underline{x}) \text{ matrice } N \times m \right.$
$= \left(\frac{\partial G_i}{\partial x_j}\right)_{\substack{i=1\dots N \\ j=1\dots m}} \Big)$

$\underline{F} : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$\underline{y} = (y_1 \dots y_N) \longmapsto \underline{F}(\underline{y}) = \begin{bmatrix} F_1(\underline{y}) \\ \vdots \\ F_k(\underline{y}) \end{bmatrix}$$ differenziabile

($D\underline{F}(\underline{y})$ matrice $k \times N$)

Allora la funzione composta

$$\underline{F} \circ \underline{G} : A \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{è differenziabile in } A$$
$$\underline{x} \longmapsto \underline{F}(\underline{G}(\underline{x}))$$

e si ha:

formalmente identica alla formula nota da Analisi I.

$$\underbrace{D(\underline{F} \circ \underline{G})(\underline{x})}_{k \times m} = \underbrace{D\underline{F}(\underline{G}(\underline{x}))}_{k \times N} \; \underbrace{D\underline{G}(\underline{x})}_{N \times m}$$ prodotto righe x col.

$$\left(F^i(G(\underline{x}))\right)_{x_j} = \sum_{h=1}^{N} (F^i)_{y_h}(\underline{G}(\underline{x}))\, G^h_{x_j}(\underline{x}) \qquad \forall i = 1 \dots k, \ \forall j = 1 \dots m$$

$$\left((AB)_{ij} = \sum_h a_{ih} b_{hj} \right)$$

$f(x,y)$

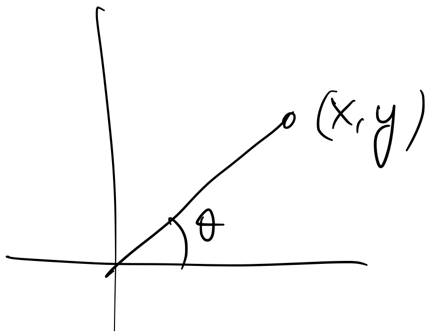
$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Se siamo nel semipiano $x>0$

$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$\theta = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$



Voglio trovare le derivate parziali di f date quelle di g

$$f(x,y) = f(\rho\cos\theta, \rho \operatorname{sen}\theta) = g(\rho,\theta) = g\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g_\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - g_\theta\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\cdots\right)\frac{y}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2}$$

$$= g_\rho\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - g_\theta\left(\sqrt{x^2+y^2}, \operatorname{arctg}\cdots\right)\frac{y}{x^2+y^2}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \cdots$ completare.

Classificazione dei pti critici:

In dim 1. se $x_0 \in (a,b)$ è t.c. $f'(x_0) = 0$.
Posso vedere se è min. relativo, max. relativo, flesso?

$$f''(x_0) \begin{cases} > 0 & \Rightarrow x_0 \text{ pto di min. rel.} \\ < 0 & \Rightarrow \text{'' --- max. rel.} \\ = 0 & \Rightarrow \begin{cases} f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0 \text{ flesso} \\ f'''(x_0) = 0 \Longrightarrow f^{(4)}(x_0) \ldots \end{cases} \end{cases}$$

$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} n \text{ dispari} \Rightarrow x_0 \text{ flesso} \\ n \text{ pari}, f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ min. rel.} \\ n \text{ pari}, f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ max. rel.} \end{cases}$$

Si dim. con la formula di Taylor.

Per funz di n variabili, si va a vedere la "derivata seconda" in $\underline{x}^0$, ma le derivate seconde sono n^2.

$f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$
aperto

Sia $\underline{x}^o \in A$. Diremo che f è 2 volte differenziabile in $\underline{x}^o$ se

f è differenziabile in un intorno di $\underline{x}^o$ e le sue derivate parziali sono differenziabili in x_o.

Restano definite le derivate seconde

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_o)$$

Per esempio, se $f(x,y)$, restano definite le seguenti derivate seconde

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f_{yx}(\quad) = \ldots$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

<u>OSS</u> Si dimostra che se le derivate parziali seconde sono continue in A, cioè se $f \in C^2(A)$, allora f è due volte differenziabile in ogni pto di A.

$$f(x,y) = x e^{xy} \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$$

$$f_x(x,y) = e^{xy}(1 + xy)$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^{xy}$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{xy}\left(y + (1+xy)y\right) = y e^{xy}(2+xy)$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{xy}\left(x + (1+xy)x\right) = x e^{xy}(2+xy)$$

sono uguali!

$$f_{yx}(x,y) = e^{xy}(2x + x^2 y)$$

$$f_{yy}(x,y) = x^3 e^{xy}$$

<u>TEOREMA</u> (Schwarz) $A \subset \mathbb{R}^N$ aperto

Se $f \in C^2(A)$, allora $f_{x_i x_j}(x,y) = f_{x_j x_i}(x,y) \quad \forall i,j = 1 \ldots N, \ i \neq j$

(s.d)

La matrice delle derivate parziali seconde è una matrice $N \times N$ (matrice Hessiana)

$$D^2 f(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\underline{x}) & f_{x_1 x_2} & \cdots & f_{x_1 x_N} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & \cdots & f_{x_2 x_N} \\ - & - & - & - \\ f_{x_N x_1} & f_{x_N x_2} & \cdots & f_{x_N x_N} \end{bmatrix} = \left[f_{x_i x_j}(\underline{x}) \right]_{i,j=1 \dots N}$$

è simmetrica per Schwarz.

FORMULE DI TAYLOR

$N = 1$

$N > 1$

$\underline{x}^0 \in A$ aperto di $\mathbb{R}^N$, $\quad f: A \to \mathbb{R}$ derivabile q.b.

Formula di Taylor del 1° ordine con resto di Peano.

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) + o(|x - x^0|) \qquad \text{per } x \to x^0$$

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \nabla f(\underline{x}^0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^0) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^0\|) \qquad \underline{x} \to \underline{x}^0$$

vera sotto l'hyp f differenziabile in $\underline{x}^0$

Formula di Taylor del 1° ordine con resto di Lagrange

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0) + \frac{1}{2} f''(c)(x - x^0)^2$$

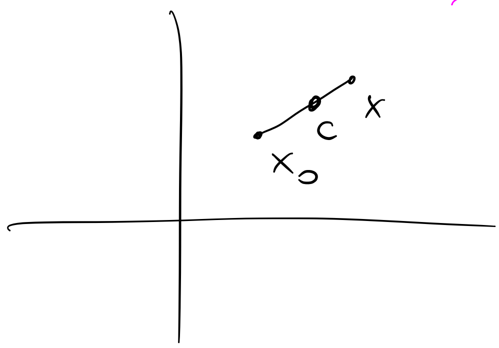
dove c compreso tra x e x^0.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \nabla f(\underline{x}^0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^0) + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{c})(\underline{x} - \underline{x}^0)^T, (\underline{x} - \underline{x}^0)\right) =$$

$$= f(\underline{x}^0) + \sum_{i=1}^{N} f_{x_i}(\underline{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} f_{x_i x_j}(\underline{c})(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$$

sotto l'ipotesi f di classe C^2 in un intorno di $\underline{x}^0$, e $\underline{x}$ appartiene a tale intorno.

$\underline{c}$ è un vettore sul segmento di estremi $\underline{x}$, $\underline{x}_0$.



Formula di Taylor di 2° ordine con resto di Peano.

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x-x^0) + \frac{1}{2} f''(x^0)(x-x^0)^2 + o\left((x-x^0)^2\right)$$

$x \to x^0$.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \nabla f(\underline{x}^0) \cdot (\underline{x}-\underline{x}^0) + \frac{1}{2}\left(D^2 f(\underline{x}^0)(\underline{x}-\underline{x}^0)^T, \underline{x}-\underline{x}^0\right) + o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2\right)$$

per $\underline{x} \to \underline{x}^0$.

sotto l'hyp. f sia due volte differenziabile in $\underline{x}^0$.

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \sum_i f_{x_i}(\underline{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2}\sum_{i,j} f_{x_i x_j}(\underline{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) +$$

$$+ o\left(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|^2\right).$$

In dim 2. $\underline{x}^0 = (x^0, y^0)$ $\quad \underline{x} = (x, y)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2 f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+ f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2 \Big] + o\left((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\right)$$

$$f(x,y) = xe^{xy} \in C^{\infty}(\mathbb{R}^2) \qquad f(2,0) = 2$$

$$f_x(x,y) = e^{xy}(1 + xy) \qquad f_x(2,0) = 1$$

$$f_y(x,y) = x^2 e^{xy} \qquad f_y(2,0) = 4$$

$$f_{xx}(x,y) = e^{xy}\big(y + (1+xy)y\big) = y\,e^{xy}(2+xy) \qquad f_{xx}(2,0) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{xy}\big(x + (1+xy)x\big) = xe^{xy}(2+xy) \qquad f_{xy}(2,0) = 4$$

sono uguali!

$$f_{yx}(x,y) = e^{xy}(2x + x^2 y)$$

$$f_{yy}(x,y) = x^3 e^{xy} \qquad f_{yy}(2,0) = 8$$

Formula di Taylor del secondo ordine con pto iniziale $(2,0)$

$$x e^{xy} = 2 + (x-2) + 4y + \frac{1}{2}\left[8(x-2)y + 8y^2\right] + o\left((x-2)^2 + y^2\right)$$

per $(x,y) \to (2,0)$