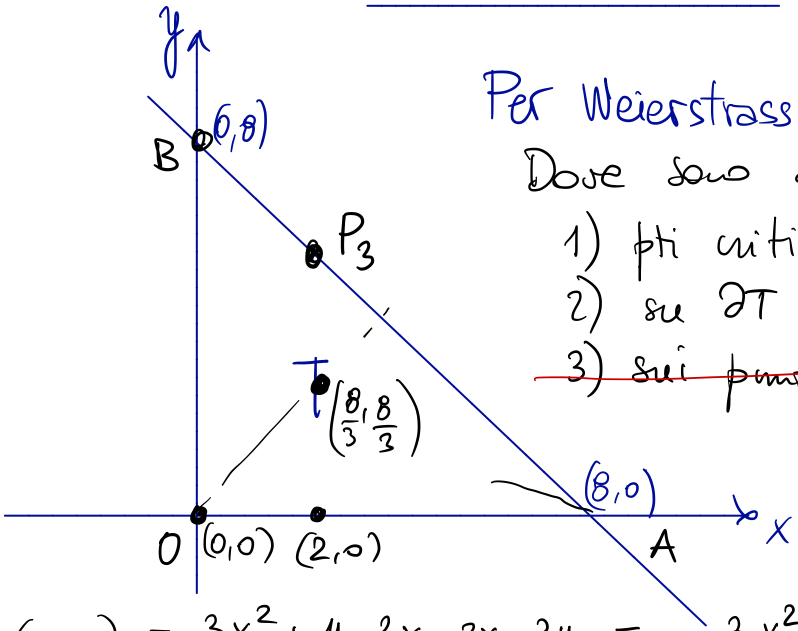
ESERCIZIO Calcolare massimo e min. assoluto di

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

nel triangolo (chiuso) di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$



Per Weierstrass, $\exists$ estremi assoluti.
Dove sono assunti?
1) pti critici interni
2) su ∂T
3) ~~sui punti di non derivabilità~~.

$$f_x(x,y) = 3x^2 + y - 3x - 3x - 3y = 3x^2 - 6x - 2y$$

$$f_y(x,y) = y - 3x + x + y = -2x + 2y$$

1) Pti critici interni $\begin{cases} 3x^2 - 6x - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x^2 - 8x = 0 \\ y = x \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = y = 0 \\ x = y = \frac{8}{3} \end{matrix}$ su ∂T

$$\boxed{P_1\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)}$$

2) Su ∂T.

Studio su OA:

$$\varphi(x) = f(x,0) = x^3 - 3x^2 \qquad x \in [0,8]$$

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 6x = 0 \iff x = 0 \lor x = 2$$

$$\boxed{P_2(2,0), \quad O(0,0), \quad A(8,0)}$$

Studio su OB:

$$f(0,y) = y^2 \qquad y \in [0,8]$$

$$\boxed{B\ (0,8)}$$

Studio su AB:

$$\eta(x) = f(x, 8-x) = x^3 + 8(8-4x) = x^3 - 32x + 64 \qquad x \in [0,8]$$

$$\eta'(x) = 3x^2 - 32 = 0 \qquad x = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{P_3\ \left(\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\ 8 - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}$$

$$f(0,0) = 0 \qquad f(0,8) = 64$$

$$f\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right) \cong 47{,}4 \qquad f(P_3) \cong -145$$ min. assoluto

$$f(2,0) = -4$$

$$f(8,0) = 320$$ max. assoluto.

ESERCIZIO Calcolare **sup. e inf.** di

$$f(x,y) = x^3 + (x+y)(y-3x)$$

nel triangolo (**aperto**) di vertici $(0,0)$, $(8,0)$, $(0,8)$.

(non vale Weierstrass perché l'insieme non è chiuso)

Se l'esercizio fosse formulato così, potrei, visto che f è continua anche sulla chiusura del triangolo, studiare massimo e minimo sul triangolo chiuso.

Dall'esercizio precedente sappiamo che max. e minimo sul triangolo chiuso sono assunti sulla frontiera.

$\forall (x,y) \in$ triangolo aperto $\quad f(x,y) \leq f(8,0) = 320$

Ma i valori di f nel triangolo aperto si avvicinano "quanto vogliono" a 320 $\Rightarrow 320 = \sup_{\mathring{T}} f$

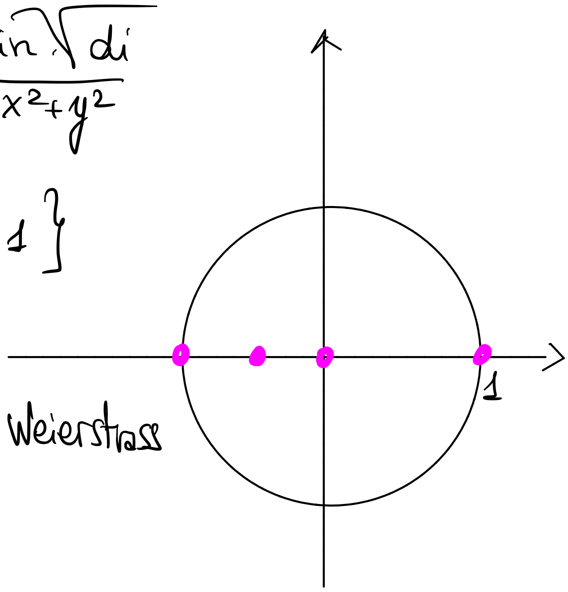
Analogamente $\quad \inf_{\mathring{T}} f = f(P_3) \simeq -145$

ESERCI

ESERCIZIO. Trovare max e min assoluti di

$$f(x,y) = (2x+3)\, e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

in $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$



Max e min. assoluti esistono per Weierstrass (f è continua).

1) Pti critici
2) Pti su ∂D
3) Pti di non derivabilità.

3) L'origine $(0,0)$ è un pto di possibile mancanza di derivabilità. (da vedere, eventualmente, se lo è davvero).

$\boxed{O(0,0)}$

1) $$f_x(x,y) = 2e^{\sqrt{x^2+y^2}} + (2x+3)\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{x^2+y^2}}\,2x =$$

$$= e^{\sqrt{x^2+y^2}}\left(2 + \frac{(2x+3)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$f_y(x,y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}\,\frac{(2x+3)y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$(x,y) \neq (0,0)$

Pti critici $\begin{cases} 2\sqrt{x^2+y^2} + 2x^2+3x = 0 \\ (2x+3)y = 0 \end{cases}$

$y=0 \Rightarrow 2|x| + 2x^2+3x = 0$

$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2+5x = 0 \end{cases}$ $\quad \cancel{x=0}$ $\quad x = -\frac{5}{2}$ $\quad \left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ esterno

$\begin{cases} x < 0 \\ 2x^2+x = 0 \end{cases}$ $\quad \cancel{x=0}$ $\quad x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{P_1\left(-\frac{1}{2}, 0\right)}$ interno

$x = -\frac{3}{2}$ sicuramente esterno.

2) Su ∂D.

$$f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = (2\cos\theta + 3)\, e$$

max per $\theta = 0$ $\quad P_2\,(1,0)$

min. per $\theta = \pi$ $\quad P_3\,(-1,0)$

Calcolo f sui 4 pti trovati $\Rightarrow$ il valore più grande è max
piccolo min.

Per curiosità: derivabilità di f in $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ anche questo non esiste (es. per casa)

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - \overset{3}{\overset{\parallel}{f(0,0)}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{3e^{|h|} - 3}{h} =$$

$$= 3 \lim_{h\to 0} \frac{e^{|h|} - 1}{h} \quad \nexists$$

perchè $\lim_{h\to 0^\pm} \frac{e^{|h|} - 1}{h} = \pm 1$

Derivate di funzioni composte.

$$\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{funzione a valori vettoriali}$$

$$\underline{x} \longmapsto \underline{F}(\underline{x}) = (F_1(\underline{x}), \dots F_m(\underline{x}))$$

corrisponde ad assegnare m funzioni scalari (di N variabili)

Cosa vuol dire $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} \underline{F}(\underline{x}) = \underline{\lambda} \in \mathbb{R}^m$?

$\forall$ intorno V di $\underline{\lambda}$ $\exists$ intorno U di $\underline{x}^0$ t.c. $\forall \underline{x} \in U \cap A \setminus \{\underline{x}^0\}$

si ha $\underline{F}(\underline{x}) \in V$.

Cioè:

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ $\underline{x} \in A$ verificante $0 < \|\underline{x} - \underline{x}^0\| < \delta$ si ha

$$\|\underline{F}(\underline{x}) - \underline{\lambda}\| < \varepsilon$$

Si può dim. (è un buon esercizio !!) che vale il limite precedente se e solo se le singole componenti verificano il limite, cioè se e solo se

$$\forall k = 1 \dots m \qquad \lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} F_k(\underline{x}) = \lambda_k \longleftarrow \text{k-esima componente di } \underline{\lambda}.$$

Similmente

$\underline{F}$ è continua in $\underline{x}^0$ se

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} \underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}(\underline{x}^0)$$

o (equivalentemente) se le componenti $F_1, \dots F_m$ sono continue in $\underline{x}^0$.

Se le componenti sono tutti derivabili parzialmente, le derivate parziali costituiscono una matrice (matrice jacobiana)

$$D\underline{F} = \left[\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right]_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots N}} = \begin{bmatrix} (F_1)_{x_1} & \dots & (F_1)_{x_N} \\ (F_2)_{x_1} & \dots & (F_2)_{x_N} \\ - & - & - \\ (F_m)_{x_1} & \dots & (F_m)_{x_N} \end{bmatrix} \text{ matrice } m \times N$$

Derivate di f. composte

In dim 1 $\quad \frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = f'(g(x))\, g'(x)$

1° caso $\quad f(g(x,y))$

$g: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$f: B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad$ con $Im(g) \subset B$

$\Rightarrow$ è definita $f \circ g : A \to \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto f(g(x,y))$.

Se g è differenziabile in (x,y), e f è derivabile in $g(x,y)$, allora $f \circ g$ è differenziabile in (x,y)

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(f(g(x,y))\right) = f'(g(x,y))\, g_x(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\quad '' \quad \right) = f'(g(x,y))\, g_y(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{g(x,y)} = \frac{1}{2\sqrt{g(x,y)}}\, g_x(x,y) \qquad \forall (x,y): \ g(x,y) > 0$$

2° caso

$$f(g(t), h(t))$$

$$f(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(g(t), h(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\frac{d}{dt}\left(f(g(t), h(t)) \right) = f_x(g(t), h(t))\, g'(t) + f_y(g(t), h(t))\, h'(t)$$

2° caso (revisited)

$$\underline{\gamma}(t) = (g(t), h(t)) \qquad \gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

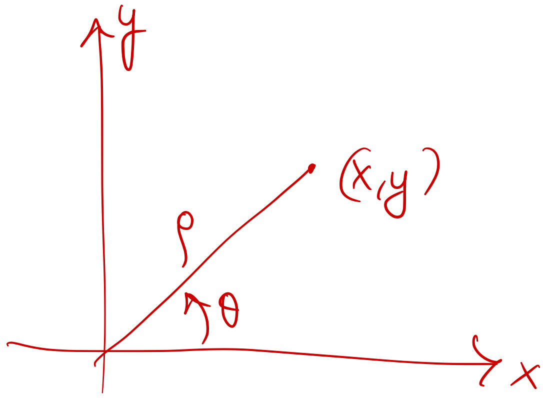
$$D\gamma(t) = \underline{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f(\underline{\gamma}(t)) = \nabla f(\underline{\gamma}(t))\, \underline{\gamma}'(t) = f_x(\underline{\gamma}(t))\, g'(t) + f_y(\underline{\gamma}(t))\, h'(t)$$

prodotto righe × colonne

$f(x,y)$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$



$$g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$$

$$g_\rho(\rho,\theta) = f_x(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$

$$g_\theta(\rho,\theta) = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\operatorname{sen}\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)\,\rho\cos\theta$$