**Esercizio** Calcolare le derivate parziali, se esistono, di
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ in un generico punto

---

Dominio $= \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+y^2}} \qquad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad //$$

In $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - \cancel{f(0,0)}}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} \quad \nexists$$

$$\lim_{t\to 0^\pm} \ldots = \pm 1$$

La $\frac{\partial f}{\partial x}$ nell'origine non esiste.

In alternativa:

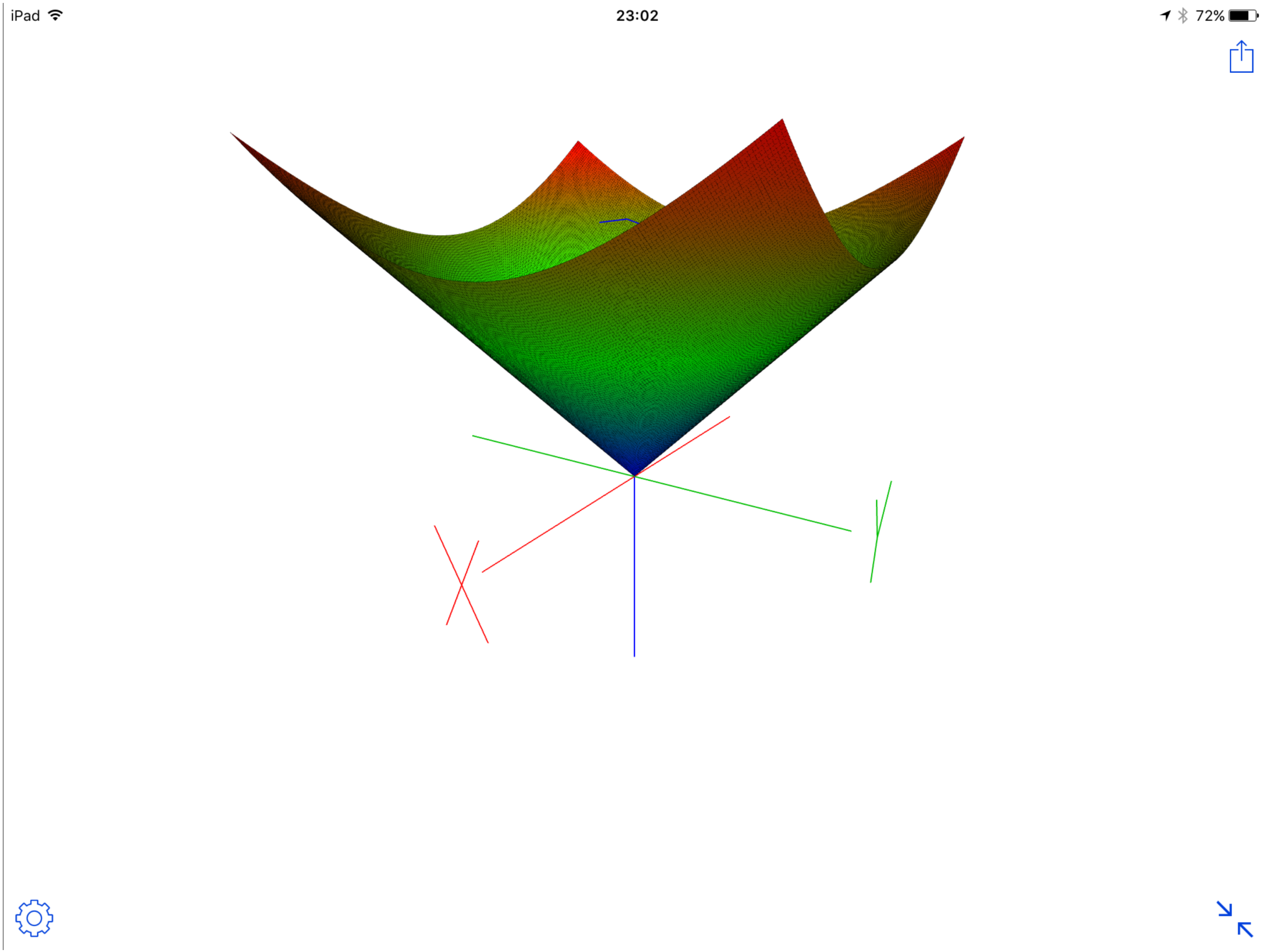
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dt} f(0+t,0)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}|t|\Big|_{t=0} \quad \nexists$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \quad \nexists.$$

$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ha un grafico "di rotazione".

Questo è vero per tutte le funzioni della forma

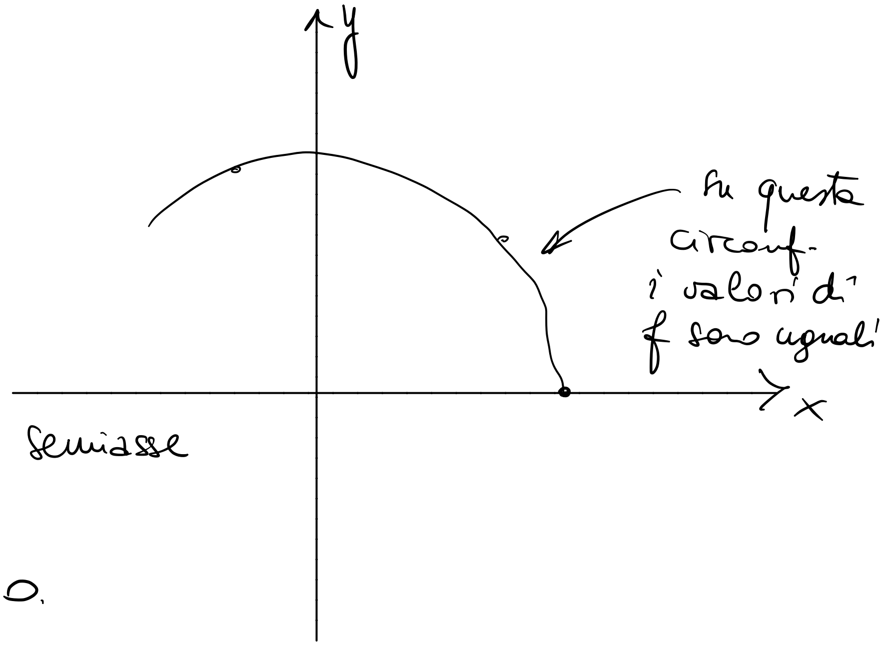
$$f(x,y) = h(x^2+y^2)$$


iPad
23:02
72%

Questo è vero per tutte le funzioni della forma

$f(x,y) = h(x^2+y^2)$

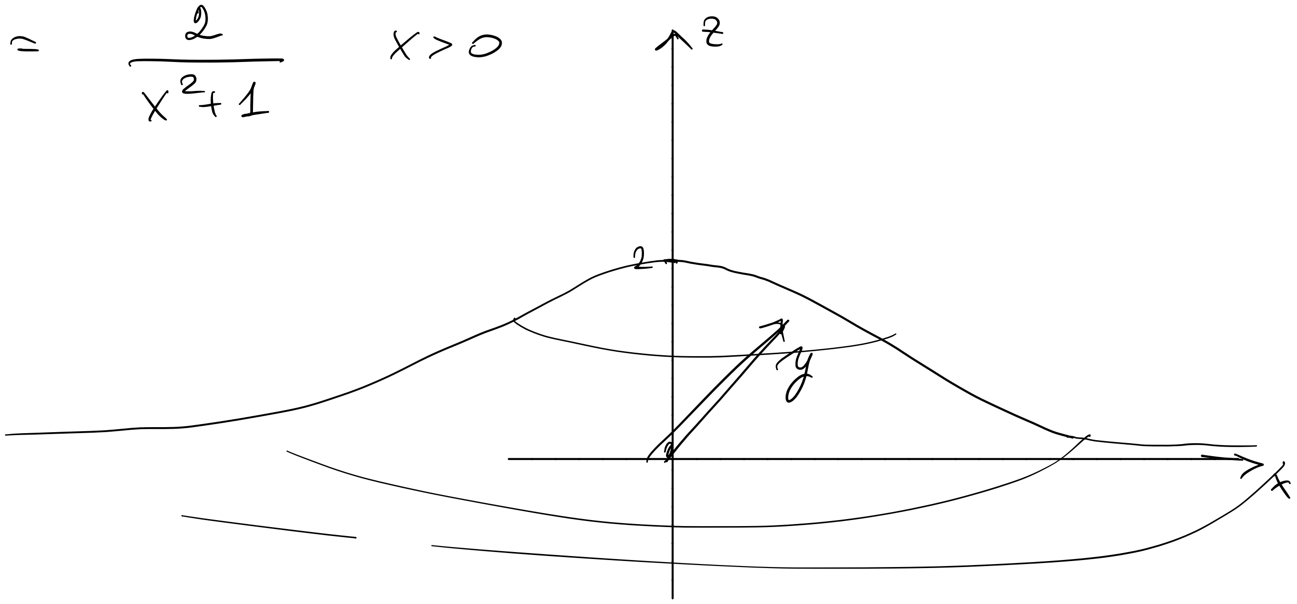
$$f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2+1}$$




Disegno il grafico lungo il semiasse positivo delle x.

$\Rightarrow$ Pongo $y=0$, $x>0$.

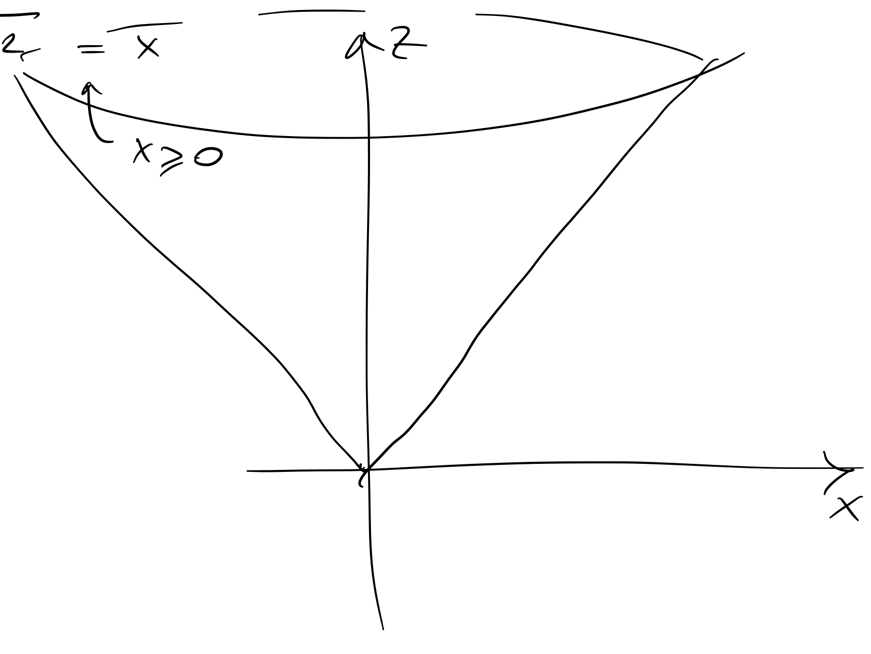
$$f(x,0) = \frac{2}{x^2+1} \qquad x>0$$




$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2} = x$

$y=0$, $x>0$

$x \geq 0$



# Gradiente di una funzione

**DEF.** Se $f(x,y)$ ammette derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ chiamiamo gradiente di $f$ nel pto $(x,y)$ il vettore

$$\nabla f(x,y) = \left(f_x(x,y), f_y(x,y)\right)$$

nabla

$\underline{x} = (x_1 \dots x_N)$

Nel caso N-dimensionale $f(x_1, \dots x_N)$

$$\nabla f(\underline{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\underline{x}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_N}(\underline{x})\right).$$

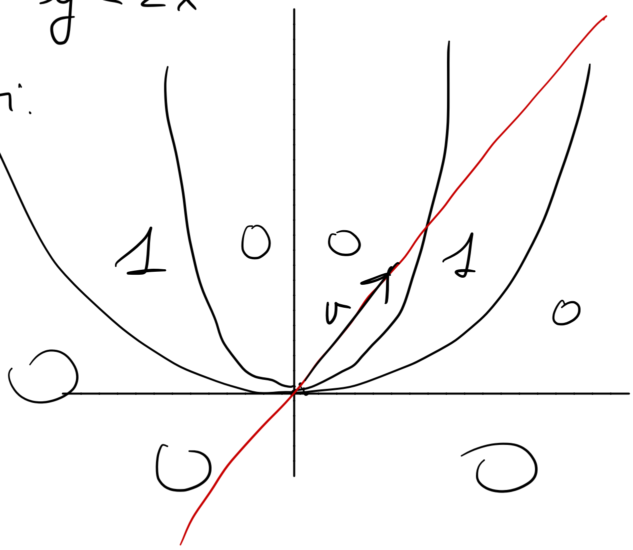
# Derivabilità e continuità

In dim 1:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \implies f \text{ continua in } x_0.$$

Questo è falso in dim. $\geq 2$

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$




$f$ ammette tutte le derivate direz. nell'origine e sono tutte nulle.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 0 \quad \forall \underline{v} \text{ direz.}$$

Tuttavia $f$ non è continua in $(0,0)$

Altro esempio:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(0,0) = 0 \quad \forall \underline{v}$ ma $f$ non è continua.

"La derivabilità direzionale in un pto non è il concetto "giusto" per garantire la continuità"!

# Funzioni differenziabili

**DEF.** Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $A$ aperto

Sia $(x_0, y_0) \in A$. Diremo che $f$ è <u>differenziabile</u> in $(x_0, y_0)$

se esistono due costanti $a, b \in \mathbb{R}$ t.c

$$\underbrace{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}}_{} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - a(x-x_0) - b(y-y_0)}{\underbrace{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}_{= d((x,y),(x_0,y_0))}} = 0$$

!! limite in due variabili

$\boxed{\text{Cioè:}}$

$x - x_0 = h$

$y - y_0 = k$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\boxed{\text{Cioè:}}$ $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk = o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$ per $(h,k)\to(0,0)$

$\boxed{\text{Cioè:}}$ $f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + ah + bk + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$

$\boxed{\text{Cioè}}$ $f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\right)$

per $(x,y)\to(x_0,y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + a(x-x_0) + b(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

per $(x,y) \to (x_0,y_0)$

Vedremo che deve essere $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$$

$$= f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0) + o\left(\quad\right)$$

(è la formula di Taylor!).

Il piano di equazione

$$z = f(x_0,y_0) + \nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0, y-y_0)$$ è il

piano tangente al grafico di $f$ nel pto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

Esercizio: verificare che $f(x,y)=x^2y$ è differenziabile nel pto $(1,4)=(x_0,y_0)$

Il piano tg. al grafico di $f$ nel pto $(1,4,4)$ è $z=4+8(x-1)+1(y-4)$

$$f(x_0,y_0)=4$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2xy \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=8\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=1\ .$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\overset{x^2y}{\cancel{f(x,y)}}-\overset{4}{\cancel{f(x_0,y_0)}}-\nabla f\overset{(8,1)}{\cancel{(x_0,y_0)}}\cdot(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=0$$

$x=1+h,\quad y=4+k$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\overset{1+2h+h^2}{(1+h)^2}(4+k)-4-8h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$

$$= \frac{\cancel{4}+\cancel{8h}+4h^2+\cancel{k}+2hk+h^2k-\cancel{4}-\cancel{8h}-\cancel{k}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \frac{4h^2+2hk+h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \underbrace{\frac{4h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\mathrm{II}}+\underbrace{\frac{h^2k}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\mathrm{III}}$$

$$0\le|\mathrm{I}|=4|h|\underbrace{\frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1}\le 4|h|\longrightarrow 0$$

anche II e III vanno a zero per $(h,k)\to(0,0)$

# Relazione tra differenziabilità e derivabilità direzionale

## TEOREMA

Sia $f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0,y_0) \in A$

Se $f$ è differenziabile in $(x_0,y_0)$, allora è derivabile lungo ogni direzione $\underline{v}$ in $(x_0,y_0)$, e si ha

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{v}}$$

In particolare $a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

DIM. Per ipotesi $\exists\, a,b \in \mathbb{R}$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k) - f(x_0,y_0) - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

$\Longrightarrow$ se $\forall (h,k) = (tv_1, tv_2)$, dove $\underline{v} = (v_1,v_2)$ è una direzione fissata

deve essere $$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0) - atv_1 - btv_2}{\underbrace{\sqrt{t^2v_1^2+t^2v_2^2}}_{\sqrt{t^2}\,\underbrace{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}_{=1} = |t|}} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0) - atv_1 - btv_2}{|t|} = 0$$

$\Rightarrow$ Facendo separatamente i limiti per $t\to 0^+$, $t \to 0^-$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0) - atv_1 - btv_2}{t} = 0$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0) - atv_1 - btv_2}{t} = 0$$

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv_1, y_0+tv_2) - f(x_0,y_0)}{t}}_{\substack{\parallel \\ \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0)}} = av_1 + bv_2 = \underbrace{(a,b)}_{\substack{\parallel \\ \nabla f(x_0,y_0)}} \cdot \underline{v}$$

1) $\underline{v} = (1,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = a$

2) $\underline{v} = (0,1) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = b$

$\square$

**DEF.** equivalente di differenziabilità

$f$ differenziabile in $(x_0, y_0)$ se $\exists \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, e

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \nabla f(x_0,y_0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Si generalizza a $n$ variabili:

$f$ si dice differenziabile in $\underline{x}^0$ se $\exists \nabla f(\underline{x}^0)$ e

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^0) + \nabla f(\underline{x}^0)\cdot(\underline{x}-\underline{x}^0) + o(\|\underline{x}-\underline{x}^0\|)$$

per $\underline{x} \to \underline{x}^0$

Trovare $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,4)$ dove $f(x,y) = x^2 y$ e $\underline{v} = \frac{(-3,4)}{5}$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,4) = \underbrace{\nabla f(1,4)}_{=(8,1)} \cdot \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{5} + \frac{4}{5} = -4$$

## TEOREMA

$f$ differenziabile in $(x_0,y_0) \Rightarrow f$ continua in $(x_0,y_0)$.

Dim.

Proverò che $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y)-f(x_0,y_0)\right]=0$

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)= f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)+$$

$$+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)=$$

$$=\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}+$$

$$+\nabla f(x_0,y_0)\cdot(x-x_0,y-y_0)$$

$\to 0 \quad (x,y)\to(x_0,y_0)$

$\to 0$

$\to 0$

$\square$

$\to 0$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0,y_0) = \nabla f(x_0,y_0)\cdot \underline{v}}$$

<u>OSS</u> La derivata è massima quando v ha la direzione di $\nabla f$,

è minima (negativa) quando v ha la direz. opposta di $\nabla f$,

ed è nulla quando v è ortogonale al gradiente

In particolare, il gradiente indica la "direzione di massima salita".