Test statistici, test di adattamento del chi quadrato

Test statistico

Supponiamo di osservare che, su 20 lanci di una moneta, esca testa (T) solo 6 volte.

La moneta è truccata o è frutto del caso?

In statistica esiste una procedura per decidere se i valori che osserviamo sono compatibili con l'ipotesi che la moneta sia onesta.

Questa procedura si chiama test statistico

Una moneta onesta o truccata?

Supponiamo che la moneta sia onesta
(P(T)=P(C)=0,5)

n=20; P(X=6)= = 0,0369

Valore piccolo (circa 3,7%). Moneta truccata?
Qual' è la probabilità, se la moneta è onesta, di avere un risultato estremo quanto (o più di) quello che abbiamo osservato?

Una moneta onesta o truccata?

Probabilità di avere un valore “estremo” quanto o più di quello che abbiamo osservato

$P(X \leq 6) = P(X=0)+P(X=1)+\ldots.+P(X=6)=0{,}0577$

Poichè avere 6 volteT è un risultato estremo quanto avere 6 volte C (quindi 14 volte T), abbiamo la probabilità complessiva

$$p = P(X \leq 6) + P(X \geq 14) = 2\,(0{,}0577) \approx 0{,}12$$

Una moneta onesta o truccata?

Tirando molte volte una moneta onesta, nel 12% dei casi ci troveremmo a osservare risultati “estremi” come e più di quello che abbiamo osservato (quindi più di una volta su 10!)

Il dato osservato è compatibile con il fatto che la moneta sia onesta

ATTENZIONE: non stiamo affermando che la moneta è onesta, ma solo che, in base alle osservazioni fatte, non possiamo ragionevolmente escludere che lo sia.

Test statistico

Serve a verificare se un dato è compatibile con una teoria, cioè con un' ipotesi statistica

- Si formula l'ipotesi da verificare, chiamata ipotesi nulla (H_0).
- Ipotizzando che H_0 sia vera, si calcola la probabilità *p* di ottenere un valore estremo quanto o più di quello effettivamente ottenuto
- Se il valore di *p* è tropo piccolo si rifiuta l'ipotesi H_0, altrimenti la si accetta.

p-value o valore *p* del test

Se $p \geq 0,05$ la discrepanza tra dato osservato e valore atteso non è statisticamente significativa, quindi H_0 viene accettata.

- Se $0,01 \leq p < 0,05$ la discrepanza è statisticamente significativa.
- Se $0,001 \leq p < 0,01$ la discrepanza è molto significativa.
- Se $p \leq 0,001$ la discrepanza è estremamente significativa.

Il livello di significatività che utilizziamo per decidere se rifiutare o accettare l'ipotesi H_0 è fissato in anticipo.

Moneta onesta o truccata?

Esercizio.
Fissando il livello di significatività al 5%, il risultato di 6 teste su 20 lanci è compatibile con l'ipotesi nulla che

- P(T)=0,40 ?
- P(T)=0,48?
- P(T)= 0,52?
- P(T)= 0,60?

Moneta onesta o truccata?

- H_0 : P(T)=0,52
- valore atteso di successi (T) su 20 lanci

  20* 0,52= 10,4
- p=P(X≤ 6) + P(X≥ 15) =0,071

  (X=6 dista dalla media 4,4; X=14 dista dalla media 3,6, X=15 dista dalla media 4,6)
- p > 0,05 accetto l'ipotesi nulla

Intervallo di confidenza

Fissato il livello di significatività, es. 0,05, si chiama intervallo di confidenza al 5 % di fiducia l'insieme dei valori dei parametri dell'ipotesi nulla che sono compatibili con il dato osservato.

Esempio: lancio di una moneta, 20 prove, 6 T.
Parametro: P(T)=q
Il valore q è nell'intervallo di confidenza al 5 % se non si può rifiutare l'ipotesi nulla P(T)=q con questo livello di fiducia.

Verifica di ipotesi su proporzioni di popolazione

Un produttore di microprocessori dichiara che non più del 2% dei processori che produce sono difettosi.
Troviamo che su un campione di 400 processori, 13 sono difettosi (3,25 %). Si può smentire la dichiarazione del produttore a un livello di significatività del 5 % ?

H_0 : $q \leq 0,02$ (q: proporzione dei processori difettosi)

Verifica di ipotesi su proporzioni di popolazione

- H_0: $q \leq 0{,}02$
- X := numero di difetti("successi") su 400 prove.
  Valore atteso $<X> = 400 * 0{,}02 = 8$
- *p*-value = $P(X \geq 13) = 1 - P(X < 13) = 1 - P(X \leq 12)$
  = 1- BINOMDIST(12;400; 0,02; 1)= 0,0619

Poiché *p*-value > 0,05 non posso rifiutare l'ipotesi nulla

Verifica di ipotesi su proporzioni di popolazione

Se uso l'approssimazione binomiale

nq= 400* 0,02=8

nq(1-q)= 400 * 0,02 * 0,98= 7,84

p= P(X≥ 13)= P(X≥ 12,5) (correz. di continuità)

P($\frac{X-8}{\sqrt{7,84}} \geq \frac{12,5-8}{\sqrt{7,84}}$) = P(Z≥ 1,607) = 0,054

Non possiamo rifiutare l'ipotesi nulla

Esempio

Viene analizzato un campione di 1235 semi importati. Di essi 22 risultano transgenici. La ditta produttrice garantisce che la percentuale di semi transgenici tra i suoi prodotti è al più l’1%. Si testi l’ipotesi nulla che la ditta affermi il vero a un livello di significatività del 5%.

Esempio

- H_0: $q \leq 0{,}01$
- X:= numero di semi transgenici su 1235 semi (v.a. binomiale con probabilità di successo nella singola prova pari a q.
  Per q=0,01 <X>=0,01 * 1235= 12,35
- *p*-value = $P(X \geq 22) = 1 - P(X<21) = 1 - P(X \leq 20)$
  =1-BINOMDIST(20;1235;0,01;1)=0,015

Poiché $p < 0{,}05$ rifiuto H_0

Esercizio: calcolare il *p*-value usando l'approssimazione normale.