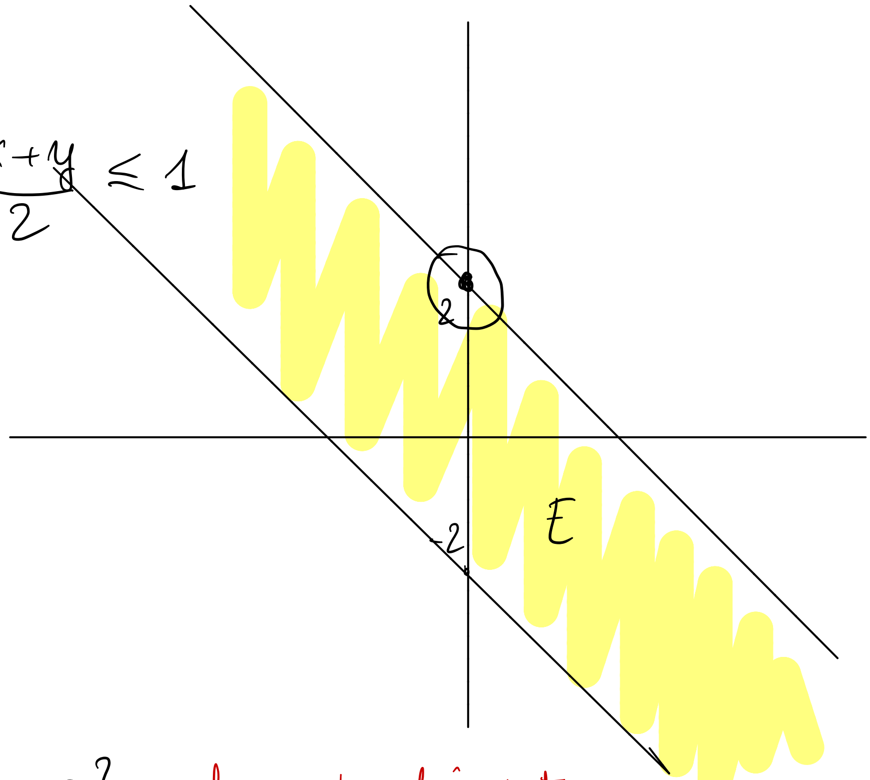
Esercizio: Trovare il dominio di

$$f(x,y) = \arccos \frac{x+y}{2}$$

e dire se tale dominio è: chiuso
aperto
limitato

quale è la frontiera?

Disegnare il dominio E



Deve essere $\quad -1 \leq \dfrac{x+y}{2} \leq 1$

$$-2 \leq x+y \leq 2.$$

$$-2-x \leq y \leq 2-x$$

E non è aperto.

E è chiuso in quanto

$E = \{x+y \leq 2\} \cap \{x+y \geq -2\}$ = chiuso perché intersez. di chiusi

chiuso perché della forma $P(x,y) \leq a$

$$\partial E = \{(x,y): \; x+y = \pm 2\}$$

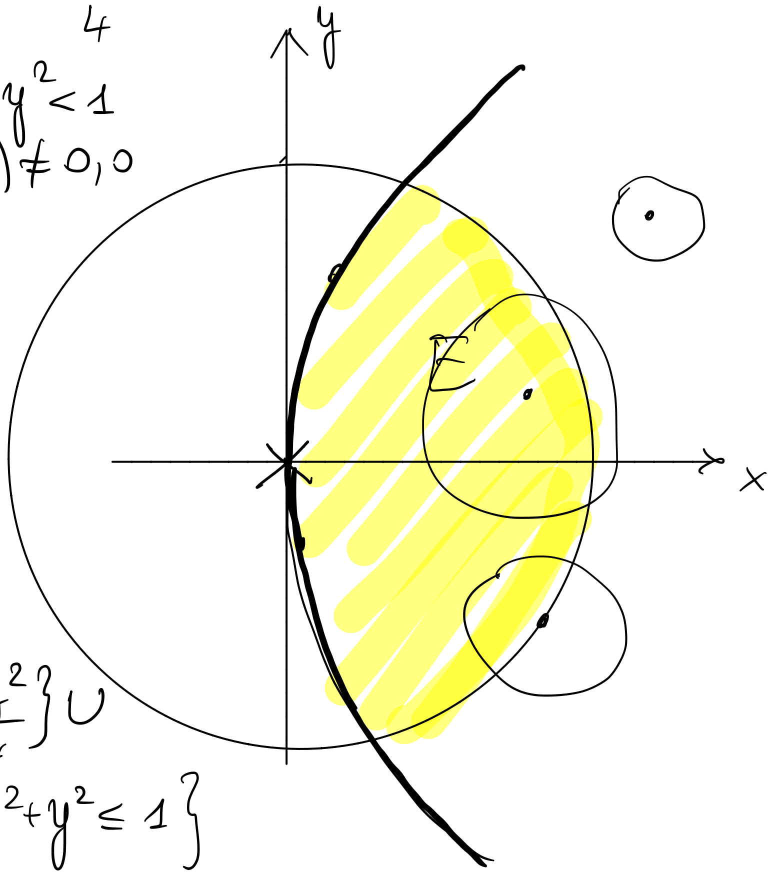
E non è limitato. Infatti, comunque fissato $M>0$, posso trovare $(x,y) \in E$ t.c. $\|(x,y)\| > M$.

Stessa domanda per

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{4x-y^2}}{\log(1-(x^2+y^2))}$$

$$4x - y^2 \geq 0 \iff x \geq \frac{y^2}{4}$$

$$\log(1-(x^2+y^2)) \neq 0 \iff \begin{cases} x^2+y^2 < 1 \\ (x,y) \neq 0,0 \end{cases}$$



$$E = \left\{ (x,y) : \ x \geq \frac{y^2}{4}, \ 0 < x^2+y^2 < 1 \right\}$$

E è chiuso? No

E è aperto? No

$$\partial E = \left\{ (x,y) : \ x^2+y^2 = 1, \ x \geq \frac{y^2}{4} \right\} \cup$$

$$\cup \left\{ (x,y) : \ x = \frac{y^2}{4}, \ x^2+y^2 \leq 1 \right\}$$

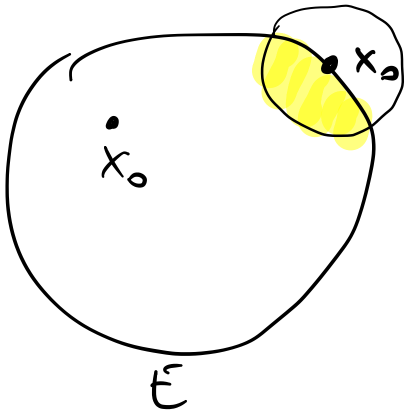
E è limitato, perché contenuto nel cerchio $x^2+y^2 \leq 1$.

DEF. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$. Diremo che $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$ è p.to di accumulazione per E se ogni intorno di $\underline{x}$ contiene almeno un p.to di E, diverso da $\underline{x}$

DEF equivalente. $\underline{x}$ pto di accumulazione per E se ogni intorno di $\underline{x}$ contiene infiniti pti di E.

DEF Un pto di E che non sia di accumulazione si dice pto isolato di E.

DEF. Sia $E \subset \mathbb{R}^N$, sia $\underline{x}^0$ pto di accum.^{ne} per E.
Diremo che una certa proprietà puntuale $P(x)$ è verificata **definitivamente per** $\underline{x} \to \underline{x}^0$ se $\exists$ un intorno $U(\underline{x}^0)$ t.c. $\forall\, \underline{x} \in E \cap U \setminus \{\underline{x}^0\}$ vale $P(x)$.

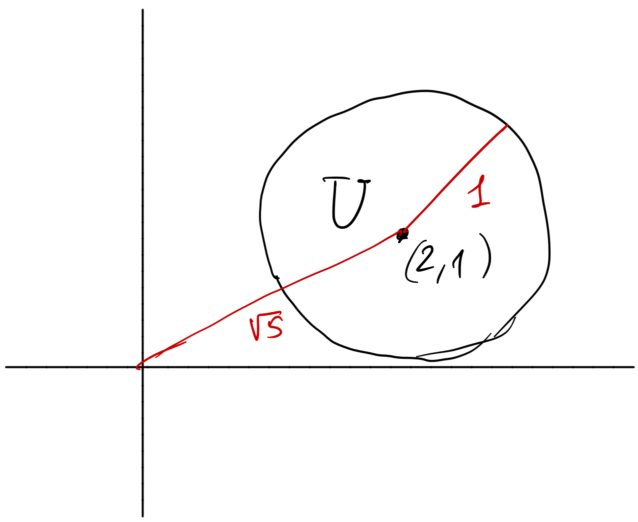


ESEMPIO

$f(x,y) = x^2+y^2-1$ è definitivamente positiva per $(x,y) \to (2,1)$

E in questo caso è sottinteso: $E = \text{dom } f = \mathbb{R}^2$.

Prendo $U = B((2,1), 1)$
Voglio mostrare che
$\forall (x,y) \in U \setminus \{(2,1)\}$
si ha $x^2+y^2 > 1$.
Infatti i pti di U verificano
$x^2+y^2 > \sqrt{5}-1 > 1$



$x^2+y^2 \geq 0$ def^{te} per $(x,y) \to (0,0)$?

Sì, perché ~~preso~~ un qualunque U intorno di $(0,0)$

$\forall (x,y) \in U \setminus \{(0,0)\}$ si ha $x^2+y^2 > 0$.

DEF di LIMITE in più variabili.

Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$. Sia $\underline{x}^\circ$ un pto di accum. per E.
Sia inoltre $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.
Diremo che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^\circ} f(\underline{x}) = \ell \quad \text{se}$$

$\forall V$ intorno di ℓ si ha $f(\underline{x}) \in V$ def^{te} per $\underline{x} \to \underline{x}^\circ$.

Cioè se

$\forall V$ intorno di ℓ $\exists U$ intorno di $\underline{x}^\circ$ t.c.

$\forall \underline{x} \in U \cap E \setminus \{\underline{x}^\circ\}$ si ha $f(\underline{x}) \in V$.

cioè se $\quad U = B(\underline{x}^\circ, \delta)$

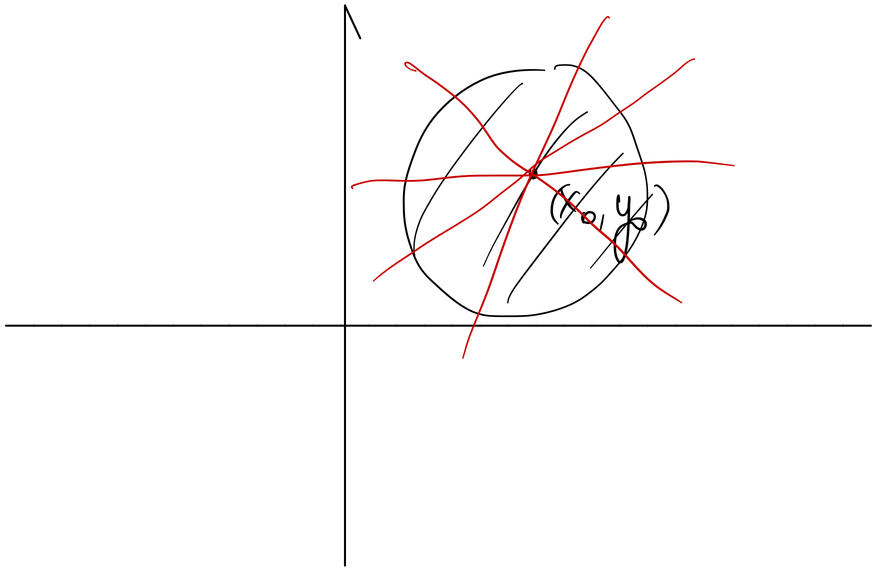
$\forall V$ intorno di ℓ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall \underline{x} \in E$ verificante

$0 < \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \delta$ si ha $f(\underline{x}) \in V$.

Se $\ell \in \mathbb{R}$, si legge così: $\quad (V = (\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon))$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall \underline{x} \in E$ verificante

$0 < \|\underline{x} - \underline{x}^\circ\| < \delta$ si ha $|f(\underline{x}) - \ell| < \varepsilon$

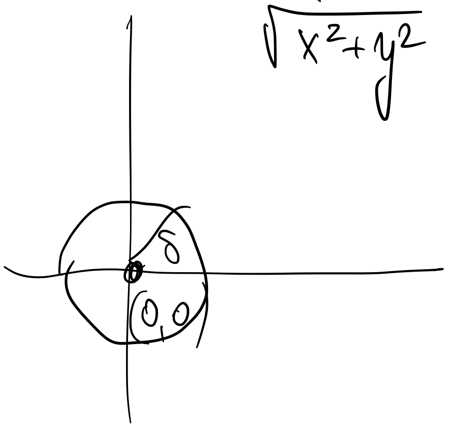


Verifichiamo che:

$$\lim_{\underbrace{(x,y)\to(0,0)}_{x^0}} x^2 y = \underset{\ell}{\overset{\shortparallel}{0}} \qquad E = \mathbb{R}^2$$

Dobbiamo verificare che, fissato $\varepsilon > 0$, possiamo trovare $\delta > 0$ t.c. se

$$0 < \underset{\sqrt{x^2+y^2}}{\overset{\shortparallel}{\|(x,y)\|}} < \delta \quad \text{si ha} \quad |x^2 y| < \varepsilon.$$



OSS $\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$

$\Rightarrow$ sappiamo che $|x| < \delta$

analog. $\Rightarrow$ $|y| < \delta$.

$$|x^2 y| = x^2 \, |y| \leq x^2 \delta < \delta^3 \leq \varepsilon$$

$\leq$ se scelgo $\delta = \sqrt[3]{\varepsilon}$

$$\Downarrow$$

$$|x^2 y| < \varepsilon$$

Verifica che $\displaystyle \lim_{(x,y)\to \underbrace{(0,0)}_{= x^0}} \frac{1}{x^2y^2} = +\infty = \ell$

$E = \mathbb{R}^2 \setminus (\text{assi coordinati}) = \mathbb{R}^2 \setminus (\{x=0\} \cup \{y=0\})$

Gli intorni di $\ell^{=+\infty}$ sono della forma $(M,+\infty) = V$

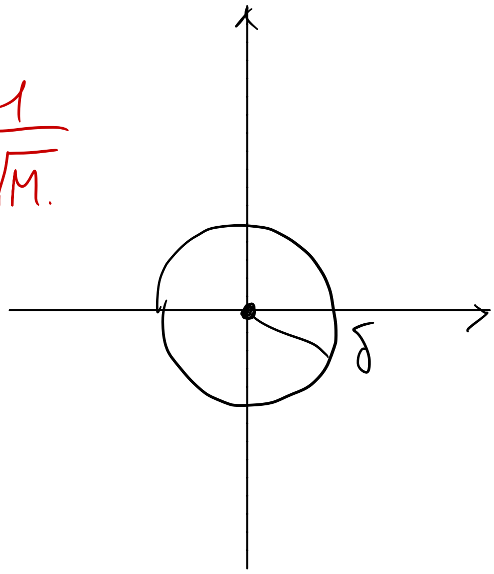
basta provarlo $\forall M > 0$.

Devo provare che $\forall M \in \mathbb{R}$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$\forall (x,y) \in E$ verificante $0 < \|(x,y)\| < \delta$ si ha $\dfrac{1}{x^2y^2} > M$.

$$\frac{1}{x^2y^2} > \frac{1}{\delta^2 y^2} > \frac{1}{\delta^4} \geq M$$

se scelgo $\delta = \dfrac{1}{\sqrt[4]{M}}$.



come prima, se $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$, si ha

$0 < |x| < \delta$ e $0 < |y| < \delta$.

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{|x|} > \dfrac{1}{\delta}, \quad \dfrac{1}{|y|} > \dfrac{1}{\delta}$

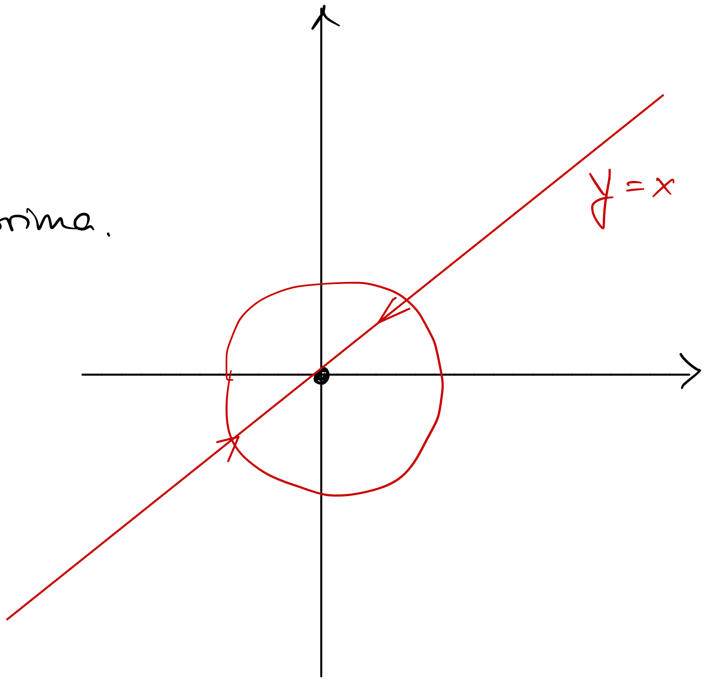
OSS In tutte queste verifiche si usa la dis.

$|x - x_0| \leq \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$

$|y - y_0| \leq \ldots\ldots$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2 y} \quad \nexists.$$

dominio è lo stesso di prima.



Faccio il limite lungo le rette.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x,x) = -\infty$$

$\Rightarrow$ ne segue che il limite non esiste.

Verifica

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} xy = 6$$

Fissato $\varepsilon>0$, cerco δ t.c. $\forall (x,y)$ verificante $0<\|(x,y)-(2,3)\|<\delta$ si ha $|xy-6|<\varepsilon$.

$$\|(x,y)-(2,3)\| = \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \geq |x-2|, \qquad \sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2} \geq |y-3|$$

dis. triang.

$$|xy-6| = |xy-2y+2y-6| \leq |xy-2y| + |2y-6| =$$

$$= \underbrace{|y|\,|x-2|}_{<4\delta<\varepsilon/2} + \underbrace{2\,|y-3|}_{<2\delta<\varepsilon/2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

basta prendere $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{8}\}$

se scelgo $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$

se scelgo $\delta \leq \frac{\varepsilon}{8}$

se scelgo $\delta \leq 1$

$$|y-3| < \delta \leq 1 \Rightarrow 2<y<4 \Rightarrow |y|<4$$